الرياضيات البحتة

الجزء الخاص بالإجابات

2021



التفاضل و التكامل

المعاصر

إعداد نخبة من خبراء التعليم

3 ثانوى

تنويه

نحيط علم سيادتكم اننا
ننشر هذا الكتاب فقط من اجل
الطلبة الغير قادرين وان كل ذخرنا
من اجلهم

وايضا لمحبي الكتب الالكترونية
وليس لناعلاقة بالاستخدام السئ
دمتم موفقين طالبين لكم
النجاح

يسرنا تواجدكم معنا في جروب

تالتة ثانوي تفوق وليس النجاح



انضم الينا من خلال

تحت اشراف



قناة تالتة ثانوي تفوق وليس النجاح







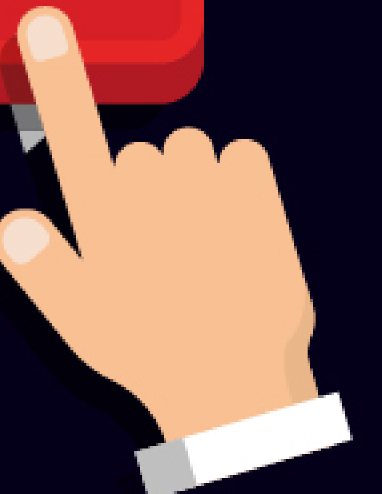
كتب خارجية

مراجعات

معلومات عامة ونضائح

بيكم مكملين





subscribe

اشترك في القناة وفعل الجرس عشان يوصلك كل جديد

إجابات تمارين 1

١

① $\frac{ءص}{ءس} = -\text{قتا}^{٢}\,٥س \times ٥ = -٥\,\text{قتا}^{٢}\,٥س$

② $\frac{ءص}{ءس} = -\text{قتا}\,٢س\;\text{ظتا}\,٢س \times ٢$

$= -٢\,\text{قتا}\,٢س\;\text{ظتا}\,٢س$

③ $\frac{ءص}{ءس} = \text{قا}\,٧س\;\text{ظا}\,٧س \times ٧$

$= ٧\,\text{قا}\,٧س\;\text{ظا}\,٧س$

④ $\frac{ءص}{ءس} = -\text{قتا}\,\frac{س}{٢}\;\text{ظتا}\,\frac{س}{٢} \times \frac{١}{٢}$

$= -\frac{١}{٢}\,\text{قتا}\,\frac{س}{٢}\;\text{ظتا}\,\frac{س}{٢}$

⑤ $\frac{ءص}{ءس} = \text{قا}\,\frac{٣}{٤}س\;\text{ظا}\,\frac{٣}{٤}س \times \frac{٣}{٤}$

$= \frac{٣}{٤}\,\text{قا}\,\frac{٣}{٤}س\;\text{ظا}\,\frac{٣}{٤}س$

⑥ $\frac{ءص}{ءس} = \text{قا}\,(٥س + ٢)\;\text{ظا}\,(٥س + ٢) \times ٥$

$= ٥\,\text{قا}\,(٥س + ٢)\;\text{ظا}\,(٥س + ٢)$

⑦ $\frac{ءص}{ءس} = -\text{قتا}\,(\pi - ٢س)\;\text{ظتا}\,(\pi - ٢س) \times -٢$

$= ٢\,\text{قتا}\,(\pi - ٢س)\;\text{ظتا}\,(\pi - ٢س)$

⑧ $\frac{ءص}{ءس} = -\text{قتا}^{٢}\,(س^{٢} + ٣) \times ٢س$

$= -٢س\,\text{قتا}^{٢}\,(س^{٢} + ٣)$

⑨ $\frac{ءص}{ءس} = ١ + (-\text{قتا}^{٢}\,٢س) \times ٢$

$= ١ - ٢\,\text{قتا}^{٢}\,٢س$

⑩ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢}\,س^{\frac{-١}{٢}} + \text{قا}\,٥س\;\text{ظا}\,٥س \times ٥$

$= \frac{١}{٢\sqrt{س}} + ٥\,\text{قا}\,٥س\;\text{ظا}\,٥س$

⑪ $\frac{ءص}{ءس} = -\text{قتا}^{٢}\,(\frac{١}{٢}س^{٤}) \times ٢س^{٣}$

$= -٢س^{٣}\,\text{قتا}^{٢}\,(\frac{١}{٢}س^{٤})$

⑫ $\frac{ءص}{ءس} = -\text{قتا}\,\sqrt{س}\;\text{ظتا}\,\sqrt{س} \times \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

$= \frac{-١}{٢\sqrt{س}}\,\text{قتا}\,\sqrt{س}\;\text{ظتا}\,\sqrt{س}$

⑬ $\frac{ءص}{ءس} = \text{قا}\,(٣س^{٤} + ٢س^{٢} - ١)$

$\text{ظا}\,(٣س^{٤} + ٢س^{٢} - ١)$

$\times\,(١٢س^{٣} + ٤س)$

$= ٤س\,(٣س^{٢} + ١)\,\text{قا}\,(٣س^{٤} + ٢س^{٢} - ١)$

$\text{ظا}\,(٣س^{٤} + ٢س^{٢} - ١)$

⑭ $\frac{ءص}{ءس} = -\text{قتا}^{٢}\,(\pi - \frac{١}{س}) \times \frac{١}{س^{٢}}$

$= \frac{-١}{س^{٢}}\,\text{قتا}^{٢}\,(\pi - \frac{١}{س})$

⑮ $\frac{ءص}{ءس} = ١٥س^{٤} + ٤\,(-\text{قتا}^{٢}\,س)$

$= ١٥س^{٤} - ٤\,\text{قتا}^{٢}\,س$

⑯ $\frac{ءص}{ءس} = -\text{حا}\,٢س \times ٢ - ٥\,(-\text{قتا}^{٢}\,(٣س) \times ٣)$

$= -٢\,\text{حا}\,٢س + ١٥\,\text{قتا}^{٢}\,٣س$

⑰ $\frac{ءص}{ءس} = ٣\,\text{قا}\,٢س\;\text{ظا}\,٢س \times ٢$

$+\,٢\,(-\text{قتا}\,٣س \times \text{ظتا}\,٣س) \times ٣$

$= ٦\,\text{قا}\,٢س\;\text{ظا}\,٢س - ٦\,\text{قتا}\,٣س\;\text{ظتا}\,٣س$

⑱ $\frac{ءص}{ءس} = -\text{حا}\,س + ٤\,\text{قا}\,س\;\text{ظا}\,س$

⑲ $\frac{ءص}{ءس} = \text{قا}\,\frac{س}{٤}\;\text{ظا}\,\frac{س}{٤} \times \frac{١}{٤} + \text{صفر}$

$= \frac{١}{٤}\,\text{قا}\,\frac{س}{٤}\;\text{ظا}\,\frac{س}{٤}$

⑳ $\frac{ءص}{ءس} = ٣\,(-\text{قتا}\,\sqrt{١ + س^{٢}}\;\text{ظتا}\,\sqrt{١ + س^{٢}})$

$\times\,\frac{٢س}{٢\sqrt{١ + س^{٢}}}$

$= \frac{-٣س}{\sqrt{١ + س^{٢}}}\,\text{قتا}\,\sqrt{١ + س^{٢}}\;\text{ظتا}\,\sqrt{١ + س^{٢}}$

٢

① $\frac{ءص}{ءس} = \text{قا}\,٣س + س\,\text{قا}\,٣س\;\text{ظا}\,٣س \times ٣$

$= \text{قا}\,٣س + ٣س\,\text{قا}\,٣س\;\text{ظا}\,٣س$

② $\frac{ءص}{ءس} = ٢س\,\text{ظتا}\,٣س + س^{٢}\,(-\text{قتا}^{٢}\,٣س) \times ٣$

$= ٢س\,\text{ظتا}\,٣س - ٣س^{٢}\,\text{قتا}^{٢}\,٣س$

③ $\frac{ءص}{ءس} = ٣س^{٢}\,\text{قتا}\,س + س^{٣}\,(-\text{قتا}\,س\;\text{ظتا}\,س)$

$= ٣س^{٢}\,\text{قتا}\,س - س^{٣}\,\text{قتا}\,س\;\text{ظتا}\,س$

④ $\frac{ءص}{ءس} = \text{قا}\,س\;\text{ظا}\,س\;\text{ظا}\,٢س$

$+\,\text{قا}\,س\;\text{قا}^{٢}\,٢س \times ٢$

$= \text{قا}\,س\;\text{ظا}\,س\;\text{ظا}\,٢س + ٢\,\text{قا}\,س\;\text{قا}^{٢}\,٢س$

⑤ $\frac{ءص}{ءس} = -\text{قتا}\,س\;\text{ظتا}\,س\;\text{ظتا}\,س + \text{قتا}\,س\,(-\text{قتا}^{٢}\,س)$

$= -\text{قتا}\,س\;\text{ظتا}^{٢}\,س - \text{قتا}^{٣}\,س$

⑥ $\frac{ءص}{ءس} = -\text{قتا}\,٢س\;\text{ظتا}\,٢س \times ٢ \times \text{قا}\,٣س$

$+\,\text{قتا}\,٢س\;\text{قا}\,٣س\;\text{ظا}\,٣س \times ٣$

$= -٢\,\text{قتا}\,٢س\;\text{ظتا}\,٢س\;\text{قا}\,٣س$

$+\,٣\,\text{قتا}\,٢س\;\text{قا}\,٣س\;\text{ظا}\,٣س$

⑦ $\frac{ءص}{ءس} = (٢س + ٥)\,\text{قا}\,س$

$+\,(س^{٢} + ٥س + ٦)\,\text{قا}\,س\;\text{ظا}\,س$

⑧ $\frac{ءص}{ءس} = \text{قا}\,س^{٢}\;\text{ظا}\,س^{٢} \times (٢س)\,\text{ظا}\,س^{٢}$

$+\,\text{قا}\,س^{٢}\;\text{قا}^{٢}\,س^{٢} \times ٢س$

$= ٢س\,\text{قا}\,س^{٢}\;\text{ظا}^{٢}\,س^{٢} + ٢س\,\text{قا}^{٣}\,س^{٢}$

⑨ $\frac{ءص}{ءس} = ٢س\,\text{قا}\,\frac{١}{س} + س^{٢}\,\text{قا}\,\frac{١}{س}\;\text{ظا}\,\frac{١}{س} \times \frac{-١}{س^{٢}}$

$= ٢س\,\text{قا}\,\frac{١}{س} - \text{قا}\,\frac{١}{س}\;\text{ظا}\,\frac{١}{س}$

⑩ $\frac{ءص}{ءس} = ٣\,(٥س + \text{قتا}\,س)$

$+\,(٣س + ٤)\,(٥ - \text{قتا}\,س\;\text{ظتا}\,س)$

⑪ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢\sqrt{س}}\,\text{قا}\,\sqrt{س}$

$+\,\sqrt{س}\,\text{قا}\,\sqrt{س}\;\text{ظا}\,\sqrt{س} \times \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

$= \frac{\text{قا}\,\sqrt{س}}{٢\sqrt{س}} + \frac{١}{٢}\,\text{قا}\,\sqrt{س}\;\text{ظا}\,\sqrt{س}$

⑫ $\frac{ءص}{ءس} = ٢س\,\text{حتا}\,س\;\text{ظتا}\,س$

$+\,س^{٢}\,(-\text{حا}\,س)\,\text{ظتا}\,س$

$+\,س^{٢}\,\text{حتا}\,س\,(-\text{قتا}^{٢}\,س)$

$= ٢س\,\text{حتا}\,س\;\text{ظتا}\,س$

$-\,س^{٢}\,\text{حا}\,س\;\text{ظتا}\,س - س^{٢}\,\text{حتا}\,س\;\text{قتا}^{٢}\,س$

٣

① $\frac{ءص}{ءس} = \frac{س\,(-\text{قتا}^{٢}\,س) - \text{ظتا}\,س \times ١}{س^{٢}}$

$= \frac{-س\,\text{قتا}^{٢}\,س - \text{ظتا}\,س}{س^{٢}}$

② $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-س\,\text{قتا}\,س\;\text{ظتا}\,س - \text{قتا}\,س}{س^{٢}}$

③ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{\text{قا}\,س\,(-١) - (٦ - س)\,\text{قا}\,س\;\text{ظا}\,س}{\text{قا}^{٢}\,س}$

$= \frac{-\text{قا}\,س - ٦\,\text{قا}\,س\;\text{ظا}\,س + س\,\text{قا}\,س\;\text{ظا}\,س}{\text{قا}^{٢}\,س}$

④ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{(٢س + ٣)\,(-\text{قتا}^{٢}\,٣س) \times ٣ - \text{ظتا}\,٣س \times ٢}{(٢س + ٣)^{٢}}$

$= \frac{-٦س\,\text{قتا}^{٢}\,٣س - ٩\,\text{قتا}^{٢}\,٣س - ٢\,\text{ظتا}\,٣س}{(٢س + ٣)^{٢}}$

⑤ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{س^{٢}\,(-\text{قتا}\,٢س\;\text{ظتا}\,٢س) \times ٢ - \text{قتا}\,٢س \times ٢س}{س^{٤}}$

$= \frac{-٢س^{٢}\,\text{قتا}\,٢س\;\text{ظتا}\,٢س - ٢س\,\text{قتا}\,٢س}{س^{٤}}$

⑥ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{(١ + \text{قا}\,س)(-\text{قا}\,س\;\text{ظا}\,س) - (١ - \text{قا}\,س)(\text{قا}\,س\;\text{ظا}\,س)}{(١ + \text{قا}\,س)^{٢}}$

$= \frac{-\text{قا}\,س\;\text{ظا}\,س - \text{قا}^{٢}\,س\;\text{ظا}\,س - \text{قا}\,س\;\text{ظا}\,س + \text{قا}^{٢}\,س\;\text{ظا}\,س}{(١ + \text{قا}\,س)^{٢}}$

$= \frac{-٢\,\text{قا}\,س\;\text{ظا}\,س}{(١ + \text{قا}\,س)^{٢}}$

⑦ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{(١ + \text{قا}\,س)\,\text{قا}\,س\;\text{ظا}\,س - \text{قا}\,س\,(٠ + \text{قا}\,س\;\text{ظا}\,س)}{(١ + \text{قا}\,س)^{٢}}$

$= \frac{\text{قا}\,س\;\text{ظا}\,س + \text{قا}^{٢}\,س\;\text{ظا}\,س - \text{قا}^{٢}\,س\;\text{ظا}\,س}{(١ + \text{قا}\,س)^{٢}}$

$= \frac{\text{قا}\,س\;\text{ظا}\,س}{(١ + \text{قا}\,س)^{٢}}$

⑧ $\frac{ءص}{ءس}$

$= \frac{\text{ظا}(٤س - ١)(-\text{قتا}(٣س + ١)\,\text{ظتا}(٣س + ١) \times ٣) - \text{قتا}(٣س + ١)\,\text{قا}^{٢}(٤س - ١) \times ٤}{\text{ظا}^{٢}\,(٤س - ١)}$

$= \frac{-٣\,\text{ظا}(٤س - ١)\,\text{قتا}(٣س + ١)\,\text{ظتا}(٣س + ١) - ٤\,\text{قتا}(٣س + ١)\,\text{قا}^{٢}(٤س - ١)}{\text{ظا}^{٢}\,(٤س - ١)}$

٤

① $\frac{ءص}{ءس} = ٤ \text{ قتا}^{٣} س \times (- \text{قتا } س \text{ ظتا } س)$

$= -٤ \text{ قتا}^{٤} س \text{ ظتا } س$

② $\frac{ءص}{ءس} = ٧ \text{ ظتا}^{٦} س \times (- \text{قتا}^{٢} س)$

$= -٧ \text{ قتا}^{٢} س \text{ ظتا}^{٦} س$

③ $\frac{ءص}{ءس} = ٣ \times ٢ \text{ قا } (٢ س + \pi) \text{ قا } (٢ س + \pi)$

$\text{ظا } (٢ س + \pi) \times ٢$

$= ١٢ \text{ قا}^{٢} (٢ س + \pi) \text{ ظا } (٢ س + \pi)$

④ $\frac{ءص}{ءس} = ٢ \text{ قتا } (١ + ٣ س^{٢}) \times (- \text{قتا } (١ + ٣ س^{٢})$

$\text{ظتا } (١ + ٣ س^{٢}) \times ٦ س)$

$= -١٢ س \text{ قتا}^{٢} (١ + ٣ س^{٢}) \text{ ظتا } (١ + ٣ س^{٢})$

⑤ $\frac{ءص}{ءس} = ٣ \text{ ظتا}^{٢} \sqrt{س} (- \text{قتا}^{٢} \sqrt{س}) \times \frac{١}{٢ \sqrt{س}}$

$= \frac{-٣}{٢ \sqrt{س}} \text{ ظتا}^{٢} \sqrt{س} \text{ قتا}^{٢} \sqrt{س}$

⑥ $\frac{ءص}{ءس} = ٢ \text{ جا } ٣ س \times \text{جتا } ٣ س \times ٣$

$+ ٢ \text{ قا } س \text{ قا } س \text{ ظا } س$

$= ٦ \text{ جا } ٣ س \text{ جتا } ٣ س + ٢ \text{ قا}^{٢} س \text{ ظا } س$

⑦ $\frac{ءص}{ءس} = \text{ظتا}^{٢} س + س \times ٢ \text{ ظتا } س (- \text{قتا}^{٢} س)$

$= \text{ظتا}^{٢} س - ٢ س \text{ ظتا } س \text{ قتا}^{٢} س$

⑧ $\frac{ءص}{ءس} = ٣ س^{٢} \text{ قا}^{٢} ٣ س + س^{٣} \times ٢ \text{ قا } ٣ س$

$\times \text{قا } ٣ س \text{ ظا } ٣ س \times ٣$

$= ٣ س^{٢} \text{ قا}^{٢} ٣ س + ٦ س^{٣} \text{ قا}^{٢} ٣ س \text{ ظا } ٣ س$

⑨ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{س (٢ \text{ قا } س \text{ قا } س \text{ ظا } س) - \text{قا}^{٢} س}{س^{٢}}$

$= \frac{٢ س \text{ قا}^{٢} س \text{ ظا } س - \text{قا}^{٢} س}{س^{٢}}$

⑩ $\frac{ءص}{ءس}$

$= \frac{\text{قتا}^{٢} ٢ س \times ١ - س (٢ \text{ قتا } ٢ س) \times (- \text{قتا } ٢ س \text{ ظتا } ٢ س) \times ٢}{\text{قتا}^{٤} ٢ س}$

$= \frac{\text{قتا}^{٢} ٢ س + ٤ س \text{ قتا}^{٢} ٢ س \text{ ظتا } ٢ س}{\text{قتا}^{٤} ٢ س}$

$= \frac{١ + ٤ س \text{ ظتا } ٢ س}{\text{قتا}^{٢} ٢ س}$

⑪ $\frac{ءص}{ءس} = - \text{قتا}^{٢} ٧ س^{٢} \times ١٤ س$

$+ ٢ \text{ ظتا } ٧ س \times (- \text{قتا}^{٢} ٧ س) \times ٧$

$= -١٤ س \text{ قتا}^{٢} ٧ س^{٢}$

$- ١٤ \text{ ظتا } ٧ س \text{ قتا}^{٢} ٧ س$

⑫ $\frac{ءص}{ءس} = ٣ \text{ قا}^{٢} ٢ س \times \text{قا } ٢ س \text{ ظا } ٢ س$

$\times ٢ \times \text{ظا}^{٣} ٢ س + \text{قا}^{٣} ٢ س$

$\times ٣ \text{ ظا}^{٢} ٢ س \times \text{قا}^{٢} ٢ س \times ٢$

$= ٦ \text{ قا}^{٣} ٢ س \text{ ظا}^{٤} ٢ س$

$+ ٦ \text{ قا}^{٥} ٢ س \text{ ظا}^{٢} ٢ س$

⑬ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{- \text{قتا}^{٢} س}{٢ \sqrt{١ + \text{ظتا } س}}$

⑭ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{- \text{قتا } س \text{ ظتا } س}{٢ \sqrt{١ + \text{قتا } س}}$

⑮ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٣} (س + \text{ظتا } س)^{\frac{-٢}{٣}} (١ - \text{قتا}^{٢} س)$

$= \frac{١ - \text{قتا}^{٢} س}{٣ \sqrt[٣]{(س + \text{ظتا } س)^{٢}}}$

⑯ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٣ س^{٢} + ٢ \text{ ظتا } ٤ س \times (- \text{قتا}^{٢} ٤ س) \times ٤}{٢ \sqrt{س^{٣} + \text{ظتا}^{٢} ٤ س}}$

$= \frac{٣ س^{٢} - ٨ \text{ ظتا } ٤ س \text{ قتا}^{٢} ٤ س}{٢ \sqrt{س^{٣} + \text{ظتا}^{٢} ٤ س}}$

٥

① $\frac{ءص}{ءس} = ٢ (١ + \text{ظتا } س) (- \text{قتا}^{٢} س)$

$= -٢ \text{ قتا}^{٢} س (١ + \text{ظتا } س)$

② $\frac{ءص}{ءس} = ٢ (٣ - ٢ \text{ ظتا } س) (-٢ (- \text{قتا}^{٢} س))$

$= ٤ \text{ قتا}^{٢} س (٣ - ٢ \text{ ظتا } س)$

③ $\frac{ءص}{ءس} = - (\text{قتا } س + \text{ظتا } س)^{-٢}$

$(- \text{قتا } س \text{ ظتا } س + (- \text{قتا}^{٢} س))$

$= \frac{\text{قتا } س \text{ ظتا } س + \text{قتا}^{٢} س}{(\text{قتا } س + \text{ظتا } س)^{٢}}$

$= \frac{\text{قتا } س (\text{ظتا } س + \text{قتا } س)}{(\text{قتا } س + \text{ظتا } س)^{٢}}$

$= \frac{\text{قتا } س}{\text{قتا } س + \text{ظتا } س}$

④ $\frac{ءص}{ءس} = -٣ (س + \text{قتا } س)^{-٤} (١ - \text{قتا } س \text{ ظتا } س)$

$= \frac{-٣ (١ - \text{قتا } س \text{ ظتا } س)}{(س + \text{قتا } س)^{٤}}$

⑤ $\frac{ءص}{ءس} = \text{قا}^{٢} (\text{ظتا } س) \times (- \text{قتا}^{٢} س)$

$= - \text{قتا}^{٢} س \text{ قا}^{٢} (\text{ظتا } س)$

⑥ $\frac{ءص}{ءس} = - \text{قتا}^{٢} (\text{جتا } ٣ س) \times (- \text{جا } ٣ س \times ٣)$

$= ٣ \text{ جا } ٣ س \text{ قتا}^{٢} (\text{جتا } ٣ س)$

⑦ $\frac{ءص}{ءس} = \text{قا } (\text{ظا}^{٢} س) \times \text{ظا } (\text{ظا}^{٢} س) \times ٢ \text{ ظا } س \times \text{قا}^{٢} س$

$= ٢ \text{ ظا } س \text{ قا}^{٢} س \text{ قا } (\text{ظا}^{٢} س) \text{ ظا } (\text{ظا}^{٢} س)$

⑧ $\frac{ءص}{ءس} = ٢ \text{ قا } (\text{ظا } س) \text{ قا } (\text{ظا } س) \text{ ظا } (\text{ظا } س) \times \text{قا}^{٢} س$

$= ٢ \text{ قا}^{٢} س \text{ قا}^{٢} (\text{ظا } س) \text{ ظا } (\text{ظا } س)$

⑨ $\frac{ءص}{ءس} = \text{جتا } (\text{قتا } ٣ س^{٢}) \times (- \text{قتا } ٣ س^{٢} \text{ ظتا } ٣ س^{٢} \times ٦ س)$

$= -٦ س \text{ جتا } (\text{قتا } ٣ س^{٢}) \times \text{قتا } ٣ س^{٢} \text{ ظتا } ٣ س^{٢}$

⑩ $\frac{ءص}{ءس} = \text{قا}^{٢} (\text{قا } س^{٢}) \times \text{قا } س^{٢} \text{ ظا } س^{٢} \times ٢ س$

$= ٢ س \text{ قا } س^{٢} \text{ ظا } س^{٢} \text{ قا}^{٢} (\text{قا } س^{٢})$

٦

① $\frac{ءص}{ءس} = - \text{قتا } \frac{س}{٢} \text{ ظتا } \frac{س}{٢} \times \frac{١}{٢}$

$= -\frac{١}{٢} \text{ قتا } \frac{س}{٢} \text{ ظتا } \frac{س}{٢}$

الميل $= \left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{س = \frac{\pi}{٢}} = \frac{-١}{\sqrt{٢}}$

② $\frac{ءص}{ءس} = -٢ \text{ قتا}^{٢} س + \sqrt{٢} \text{ قا } س \text{ ظا } س$

الميل $= \left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{س = \frac{\pi}{٤}} = -٢$

③ $\frac{ءص}{ءس} = ٣ \text{ قا}^{٢} س - ٢ \text{ قتا } س (- \text{قتا } س \text{ ظتا } س)$

$= ٣ \text{ قا}^{٢} س + ٢ \text{ قتا}^{٢} س \text{ ظتا } س$

الميل $= \left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{س = \frac{٣\pi}{٤}} = ٢$

④ $\frac{ءص}{ءس} = ١٥ \text{ ظتا}^{٤} س \times (- \text{قتا}^{٢} س)$

$= -١٥ \text{ ظتا}^{٤} س \text{ قتا}^{٢} س$

الميل $= \left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{س = \frac{\pi}{٤}} = -٣٠$

٧

① (د)	② (ب)	③ (ب)	④ (د)
⑤ (جـ)	⑥ (ب)	⑦ (جـ)	⑧ (د)
⑨ (جـ)	⑩ (جـ)	⑪ (ب)	⑫ (د)
⑬ (ب)	⑭ (د)	⑮ (أ)	⑯ (ب)
⑰ (أ)	⑱ (أ)	⑲ (أ)	⑳ (جـ)
㉑ (أ)	㉒ (ب)		

٨

$\frac{ءص}{ءع} = - \text{قتا}^{٢} (\frac{\pi}{٦} ع) \times \frac{\pi}{٦} = -\frac{\pi}{٦} \text{ قتا}^{٢} \frac{\pi}{٦} ع$

$\frac{ءع}{ءس} = ٣ \times \frac{١}{٢ \sqrt{س}} = \frac{٣}{٢ \sqrt{س}}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس} = -\frac{\pi}{٦} \text{ قتا}^{٢} \frac{\pi}{٦} ع \times \frac{٣}{٢ \sqrt{س}}$

عند $س = ١$ فإن : $ع = ٣$

فإن : $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{\substack{س = ١ \\ ع = ٣}} = -\frac{\pi}{٦} \text{ قتا}^{٢} (\frac{\pi}{٦} \times ٣) \times \frac{٣}{٢ \sqrt{١}}$

$= -\frac{\pi}{٦} \times ١ \times \frac{٣}{٢} = -\frac{\pi}{٤}$

٩

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = جتا س + قا س ظا س $\frac{\text{ءس}}{\text{ءع}} = ٢\pi$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءع}}$ = ٢π (جتا س + قا س ظا س)

عند ع = ١   فإن: س = ٢π

$\left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}\right]_{\text{س} = ٢\pi}$ = ٢π (جتا ٢π + قا ٢π ظا ٢π)

= ٢π (-١ + -١ × ٠) = -٢π

١٠

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{-٢}{٢\sqrt{٥ - ٢\text{ع}}} = \frac{-١}{\sqrt{٥ - ٢\text{ع}}}$

$\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ = ٢ قا ٢س ظا ٢س

عند س = $\frac{\pi}{٦}$ ع = ٢

∵ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

= $\frac{-١}{\sqrt{٥ - ٢\text{ع}}}$ × ٢ قا ٢س ظا ٢س

$\left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{\text{س} = \frac{\pi}{٦},\ \text{ع} = ٢} = \frac{-١}{\sqrt{٥ - ٢ \times ٢}}$ × ٢ × قا $\frac{\pi}{٣}$ × ظا $\frac{\pi}{٣}$

= -١ × ٢ × ٢ × $\sqrt{٣}$ = -٤$\sqrt{٣}$

الطرف الأيمن = $\sqrt{٣}$ × -٤$\sqrt{٣}$ + ١٢ = صفر = الأيسر

١١

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = ٥\,(٥\text{ع} + ١)^{٤} \times ٥ = ٢٥\,(٥\text{ع} + ١)^{٤}$

$\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٥}$ (- قتا² ٢س) × ٢ = $\frac{-٢}{٥}$ قتا² ٢س

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢٥\,(٥\text{ع} + ١)^{٤} \times \frac{-٢}{٥}$ قتا² ٢س

= -١٠ قتا² ٢س $(٥\text{ع} + ١)^{٤}$

عند س = $\frac{\pi}{٨}$ فإن: ع = $\frac{١}{٥}$

∴ $\left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{\text{س} = \frac{\pi}{٨},\ \text{ع} = \frac{١}{٥}} = -١٠ \times ٢ \times (٢)^{٤} = -٣٢٠$

١٢

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = - قتا س ظتا س - قتا² س

= - قتا س (ظتا س + قتا س) = - قتا س × ص

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ص قتا س = ٠

١٣

∵ ص = $\frac{١}{٤}$ قا⁴ س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٤}$ × ٤ قا³ س قا س ظا س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قا⁴ س ظا س   ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٤ ص ظا س

١٤

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ن (قا س + ظا س)$^{\text{ن} - ١}$ (قا س ظا س + قا² س)

= ن (قا س + ظا س)$^{\text{ن} - ١}$ × قا س (ظا س + قا س)

= ن قا س (قا س + ظا س)$^{\text{ن}}$ = ن ص قا س

١٥

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ن (قا س)$^{\text{ن} - ١}$. قا س ظا س

= ن (قا س)$^{\text{ن}}$. ظا س = ن ص ظا س

١٦

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قا س (جتا س - جا س)

+ (جا س + جتا س) قا س ظا س

= ١ - ظا س + ظا² س + ظا س = ١ + ظا² س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ - ظا² س = ١

١٧

ص = (ع² - ١)² = (قتا² ٤س - ١)² = (ظتا² ٤س)²

ص = ظتا⁴ ٤س

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٤ ظتا³ ٤س (- قتا² ٤س) × ٤

= -١٦ ظتا³ ٤س قتا² ٤س

= $\frac{-١٦ \text{ ص قتا}^{٢} \text{ ٤س}}{\text{ظتا ٤س}}$

= -١٦ ص قتا ٤س قا ٤س

= $\frac{-١٦ \text{ ص}}{\text{جا ٤س جتا ٤س}} = \frac{-١٦ \text{ ص}}{\frac{١}{٢} \text{ جا ٨س}}$

= -٣٢ ص قتا ٨س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ٣٢ ص قتا ٨س = ٠

١٨

① $\overline{\text{أب}}$ مماس ، $\overline{\text{مب}}$ نصف قطر

∴ $\overline{\text{أب}} \perp \overline{\text{مب}}$ ∴ قتا θ = $\frac{\text{نق} + \text{س}}{\text{نق}}$

∴ قتا θ = ١ + $\frac{\text{س}}{\text{نق}}$

∴ س = نق (قتا θ - ١)   (١)

② بالاشتقاق بالنسبة إلى θ

$\frac{\text{ءس}}{\text{ء}\theta}$ = نق (- قتا θ ظتا θ)

عند θ = $\frac{\pi}{٦}$ ∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ء}\theta}$ = -٢$\sqrt{٣}$ نق

١٩

① (جـ)   ② (جـ)   ③ (أ)   ④ (جـ)

⑤ (جـ)   ⑥ (د)   ⑦ (جـ)

إرشادات لحل رقم **١٩**

① ∵ ص = ظتا س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = - قتا² س معرفة لجميع قيم

س ∈ ح - {ن π حيث ن ∈ ص}

② ∵ د (ظا س) = جا س

باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

∴ دَ (ظا س) × قا² س = جتا س

∴ دَ (ظا س) = $\frac{\text{جتا س}}{\text{قا}^{٢} \text{ س}}$ = جتا³ س

وبوضع س = $\frac{\pi}{٤}$ فإن: ظا س = ١

∴ دَ (١) = جتا³ $\frac{\pi}{٤}$ = $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٣} = \frac{\sqrt{٢}}{٤}$

③ ∵ هـ (س) = (د ∘ ر) (س)

= د (ر (س)) = د (ظتا س)

= ظتا² س

∴ هـَ (س) = ٢ ظتا س × - قتا² س

= -٢ ظتا س قتا² س

∴ هـَ $\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ = -٢ ظتا $\frac{\pi}{٤}$ قتا² $\frac{\pi}{٤}$ = -٤

④ ∵ $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{د (س)} - \text{د (٠)}}{\text{س} - ٠}$ = دَ (٠)

∴ $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{د (س)}}{\text{س}}$ = دَ (٠) = جتا² (٠) = ١

⑤ بوضع ع = |س| ∴ ع² = س²

∴ ٢ ع $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ = ٢ س

$\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{\text{س}}{\text{ع}} = \frac{\text{س}}{|\text{س}|}$

، ∵ ص = قا ع

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قا ع ظا ع × $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

= قا |س| ظا |س| × $\frac{\text{س}}{|\text{س}|}$

= $\frac{\text{س}}{|\text{س}|}$ قا |س| ظا |س|

⑥ ∵ د (جا س) = أ جتا س

باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

∴ دَ (جا س) × جتا س = أ × - جا س

∴ دَ (جا س) = $\frac{- \text{أ جا س}}{\text{جتا س}}$ = - أ ظا س

وبوضع جا س = $\frac{٣}{٥}$

∴ دَ $\left(\frac{٣}{٥}\right)$ = - أ × $\frac{٣}{٤}$

∴ - $\frac{٣}{٤}$ أ = -٦

∴ أ = ٨

⑦ نفرض أن (س) هو قياس الزاوية بالتقدير الستينى ،

(هـ) هو قياس نفس الزاوية بالتقدير الدائرى

، ∵ ص = ظتا س

∴ ص = ظتا هـ   ،   هـ = س × $\frac{\pi}{١٨٠}$

∴ $\frac{\text{ءهـ}}{\text{ءس}} = \frac{\pi}{١٨٠}$

، ∵ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءهـ}} \times \frac{\text{ءهـ}}{\text{ءس}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = - قتا² هـ × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = - قتا² س × $\frac{\pi}{١٨٠}$

= - $\frac{\pi}{١٨٠}$ قتا² س

إجابات تمارين 2

أولاً مسائل على الاشتقاق الضمني

١

① $س^٢ - ٤ص^٢ + ٧ = ٠$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٢س - ٨ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{س}{٤ص}$

② $س^٤ + ٣ص^٤ - ٢ = ٠$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$٤س^٣ + ١٢ص^٣ \frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-س^٣}{٣ص^٣}$

③ $(س - ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ٢٥$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$٢(س - ٣) + ٢(ص + ٢)\frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{-(س - ٣)}{(ص + ٢)} = \frac{٣ - س}{ص + ٢}$

④ $س^٣ + ص^٢ - ٧س + ٥ص = ٨$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$٣س^٢ + ٢ص \frac{ءص}{ءس} - ٧ + ٥\frac{ءص}{ءس} = ٠$

$(٢ص + ٥)\frac{ءص}{ءس} + (٣س^٢ - ٧) = ٠$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٧ - ٣س^٢}{٢ص + ٥}$

⑤ $س^٣ + ص^٣ - ٢س + ٣ص^٢ = ٨$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٣س^٢ + ٣ص^٢ \frac{ءص}{ءس} - ٢ + ٦ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\therefore \frac{ءص}{ءس}(٣ص^٢ + ٦ص) = ٢ - ٣س^٢$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٢ - ٣س^٢}{٣ص^٢ + ٦ص}$

⑥ $س^٢ + ٩ص^٢ - ٦س ص = ٤$

$\therefore (س - ٣ص)^٢ = ٤$

$\therefore س - ٣ص = \pm ٢$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ١ - ٣\frac{ءص}{ءس} = ٠ \qquad \therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٣}$

⑦ $س^٣ - ٥س ص + ص^٣ = ٤س$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٣س^٢ - ٥ص - ٥س \frac{ءص}{ءس}$

$+ ٣ص^٢ \frac{ءص}{ءس} = ٤$

$\therefore (٣ص^٢ - ٥س)\frac{ءص}{ءس} = ٤ - ٣س^٢ + ٥ص$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٤ - ٣س^٢ + ٥ص}{٣ص^٢ - ٥س}$

⑧ $س ص = ١٠٠(س + ص)$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ص + س\frac{ءص}{ءس} = ١٠٠ + ١٠٠\frac{ءص}{ءس}$

$\therefore (س - ١٠٠)\frac{ءص}{ءس} = ١٠٠ - ص$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{١٠٠ - ص}{س - ١٠٠}$

⑨ $س^٢ ص^٢ = ١٠$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore س^٢ \times ٢ص \frac{ءص}{ءس} + ص^٢ \times ٢س = ٠$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-٢ص^٢ س}{٢س^٢ ص} = \frac{-ص}{س}$

⑩ $س^٢ ص + ص^٢ س = ٢٥$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٢س ص + س^٢ \frac{ءص}{ءس} + ص^٢$

$+ ٢س ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\therefore (س^٢ + ٢س ص)\frac{ءص}{ءس} = -٢س ص - ص^٢$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-ص(٢س + ص)}{س(س + ٢ص)}$

⑪ $س^ن ص^ن = أ^ن$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore س^ن \times ن ص^{ن-١}\frac{ءص}{ءس} + ص^ن$

$\times ن س^{ن-١} = صفر$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-ص^ن \times ن س^{ن-١}}{س^ن \times ن ص^{ن-١}}$

$= -\left(\frac{ص}{س}\right)^ن \times \left(\frac{س}{ص}\right)^{ن-١} = \frac{-ص}{س}$

⑫ $س^ن + ص^ن = أ^ن$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ن س^{ن-١} + ن ص^{ن-١}\frac{ءص}{ءس} = صفر$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-ن س^{ن-١}}{ن ص^{ن-١}} = -\left(\frac{س}{ص}\right)^{ن-١}$

٢

① $\frac{٢}{س} + \frac{٣}{ص} = ٥$

$\therefore ٢س^{-١} + ٣ص^{-١} = ٥$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore -٢س^{-٢} - ٣ص^{-٢}\frac{ءص}{ءس} = صفر$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-٢س^{-٢}}{٣ص^{-٢}} = \frac{-٢ص^٢}{٣س^٢} = \frac{-٢}{٣}\left(\frac{ص}{س}\right)^٢$

② $س^٣ + ص^٣ = ٧س^٣ - ٧ص^٣$

$\therefore ٦س^٣ - ٨ص^٣ = صفر$

$\therefore ٣س^٣ - ٤ص^٣ = صفر$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٩س^٢ - ١٢ص^٢\frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٩س^٢}{١٢ص^٢} = \frac{٣}{٤}\left(\frac{س}{ص}\right)^٢$

③ $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٤$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore \frac{١}{٢}س^{-\frac{١}{٢}} + \frac{١}{٢}ص^{-\frac{١}{٢}}\frac{ءص}{ءس} = صفر$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-س^{-\frac{١}{٢}}}{ص^{-\frac{١}{٢}}} = \frac{-\sqrt{ص}}{\sqrt{س}}$

④ $ص + \sqrt{س ص} = ٢س^٢$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore \frac{ءص}{ءس} + \frac{١}{٢\sqrt{س ص}} \times \left[س\frac{ءص}{ءس} + ص\right] = ٤س$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} + \frac{س}{٢\sqrt{س ص}}\frac{ءص}{ءس} + \frac{ص}{٢\sqrt{س ص}} = ٤س$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٤س - \frac{ص}{٢\sqrt{س ص}}}{١ + \frac{س}{٢\sqrt{س ص}}}$

$= \frac{٨س\sqrt{س ص} - ص}{٢\sqrt{س ص} + س}$

⑤ $جا٢س = ظا٢ص$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٢ جتا٢س = ٢ قا^٢ ٢ص \frac{ءص}{ءس}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٢ جتا٢س}{٢ قا^٢ ٢ص}$

⑥ $س جاص = ص$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore س جتاص \frac{ءص}{ءس} + جاص = \frac{ءص}{ءس}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس}(س جتاص - ١) = - جاص$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{- جاص}{س جتاص - ١}$

⑦ $جا٢ص = ص جتا٢س$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٢ جتا٢ص \frac{ءص}{ءس}$

$= \frac{ءص}{ءس} جتا٢س + ص(-٢ جا٢س)$

$\therefore \frac{ءص}{ءس}(٢ جتا٢ص - جتا٢س)$

$= -٢ص جا٢س$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-٢ص جا٢س}{٢ جتا٢ص - جتا٢س}$

⑧ $س ص + جاص = ٥$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ص + س\frac{ءص}{ءس} + جتاص \frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\therefore \frac{ءص}{ءس}(س + جتاص) = - ص$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-ص}{س + جتاص}$

⑨ $٥ص + جتاص = س^٢$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٥\frac{ءص}{ءس} - جاص \frac{ءص}{ءس} = ٢س$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٢س}{[illegible]}$

(١٠) حا س حتا ص = $\frac{١}{٢}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ حتا س حتا ص + حا س (− حا ص) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{حتا س حتا ص}}{\text{حا س حا ص}}$ = ظتا س ظتا ص

(١١) ٢ ص = حا ٢ س حتا ص

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = حا ٢ س × − حا ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

+ حتا ص × ٢ حتا ٢ س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ (٢ + حا ص حا ٢ س) = ٢ حتا ص حتا ٢ س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{٢ حتا ص حتا ٢ س}}{\text{٢ + حا ص حا ٢ س}}$

(١٢) س حتا ص + ص حتا س = ١

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ حتا ص + س (− حا ص) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ حتا س

+ ص (− حا س) = ٠

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ (− س حا ص + حتا س)

= − حتا ص + ص حا س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ص حا س − حتا ص}}{\text{حتا س − س حا ص}}$

(١٣) س^{٢} حا ص − ص^{٢} حا س = ٩

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ س حا ص + س^{٢} حتا ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

− ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$. حا س − ص^{٢} حتا س = ٠

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ (س^{٢} حتا ص − ٢ ص حا س)

= ص^{٢} حتا س − ٢ س حا ص

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ص}^{٢}\text{ حتا س − ٢ س حا ص}}{\text{س}^{٢}\text{ حتا ص − ٢ ص حا س}}$

(١٤) س قتا ص = ص ظتا س (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ قتا ص + س (− قتا ص ظتا ص) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

= $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ظتا س + ص (− قتا^{٢} س)

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ (− س قتا ص ظتا ص − ظتا س)

= − قتا ص − ص قتا^{٢} س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{قتا ص + ص قتا}^{٢}\text{ س}}{\text{س قتا ص ظتا ص + ظتا س}}$

(١٥) ظا ٢ س + ظتا ص = س ص

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ قا^{٢} ٢ س + (− قتا^{٢} ص) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ص + س $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ (س + قتا^{٢} ص) = ٢ قا^{٢} (٢ س) − ص

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{٢ قا}^{٢}\text{ (٢ س) − ص}}{\text{س + قتا}^{٢}\text{ ص}}$

(١٦) حا^{٢} س + ٢ حتا ص + س ص = ٠

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ حا س حتا س + ٢ (− حا ص) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

+ ص + س $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ (س − ٢ حا ص) = − ص − ٢ حا س حتا س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{− ص − ٢ حا س حتا س}}{\text{س − ٢ حا ص}}$

(١٧) ص قا س + ظا س + س^{٢} ص = ٠

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ قا س + ص قا س ظا س + قا^{٢} س

+ ٢ س ص + س^{٢} $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ (قا س + س^{٢})

= − ص قا س ظا س − قا^{٢} س − ٢ س ص

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{− ص قا س ظا س − قا}^{٢}\text{ س − ٢ س ص}}{\text{قا س + س}^{٢}}$

(١٨) أ حتا ب س + ب حا أ ص = حـ

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ − أ ب حا ب س + أ ب حتا أ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = صفر

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{حا ب س}}{\text{حتا أ ص}}$

٣

(١) ٢ س^{٢} + ٣ ص^{٢} = ٥ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٤ س + ٦ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = صفر

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{−٢ س}}{\text{٣ ص}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(-١ ، -١)}$ = $\frac{-٢}{٣}$

(٢) س^{٢} − ٣ س ص + ص^{٢} = ١١

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ س − ٣ س $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ − ٣ ص + ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = صفر

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ (٢ ص − ٣ س) = ٣ ص − ٢ س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{٣ ص − ٢ س}}{\text{٢ ص − ٣ س}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(٢ ، -١)}$ = $\frac{٧}{٨}$

(٣) س ص^{٣} = ٢ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ص^{٣} + س (٣ ص^{٢} $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$) = ٠

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{− ص}^{٣}}{\text{٣ س ص}^{٢}}$ = $\frac{\text{− ص}}{\text{٣ س}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(٢ ، ١)}$ = $\frac{-١}{٩}$

(٤) س^{٤} − ٢ س^{٢} ص^{٢} + س ص^{٣} = ١

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٤ س^{٣} − ٦ س^{٢} ص^{٢} − ٢ س^{٣} (٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$)

+ س (٣ ص^{٢} $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$) + ص^{٣} = صفر

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ (−٤ س^{٣} ص + ٣ س ص^{٢})

= − ص^{٣} + ٦ س^{٢} ص^{٢} − ٤ س^{٣}

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{− ص}^{٣}\text{ + ٦ س}^{٢}\text{ ص}^{٢}\text{ − ٤ س}^{٣}}{\text{−٤ س}^{٣}\text{ ص + ٣ س ص}^{٢}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(١ ، ٢)}$ = ٣

(٥) س^{٢} − س ص + ص^{٢} = ٢٧

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ س − س $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ − ص + ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ (− س + ٢ ص) = ص − ٢ س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ص − ٢ س}}{\text{− س + ٢ ص}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(٦ ، ٣)}$ غير معرف

(٦) س $\sqrt{\text{ص}}$ + ص $\sqrt{\text{س}}$ = ٦

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ س ($\frac{١}{٢}$ ص$^{-\frac{١}{٢}}$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$) + ص$^{\frac{١}{٢}}$ + ص ($\frac{١}{٢}$ س$^{-\frac{١}{٢}}$)

+ س$^{\frac{١}{٢}}$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ($\frac{\text{س}}{٢\sqrt{\text{ص}}}$ + $\sqrt{\text{س}}$) = $\frac{\text{− ص}}{٢\sqrt{\text{س}}}$ − $\sqrt{\text{ص}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\dfrac{\frac{\text{− ص}}{٢\sqrt{\text{س}}} - \sqrt{\text{ص}}}{\frac{\text{س}}{٢\sqrt{\text{ص}}} + \sqrt{\text{س}}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(١ ، ٤)}$ = $\frac{-١٦}{٥}$

(٧) حتا $\sqrt{\pi \text{ ص}}$ = ٢ س + ١ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ − حا $\sqrt{\pi \text{ ص}}$ × $\frac{\pi}{٢\sqrt{\pi \text{ ص}}}$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{-٦\sqrt{\pi \text{ ص}}}{\pi \text{ حا } \sqrt{\pi \text{ ص}}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(\frac{١}{٢} ، \frac{\pi}{٤})}$ = $\dfrac{\frac{-٦\pi}{٢}}{\pi \text{ حا } \frac{\pi}{٢}}$ = −٣

(٨) $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{أ}^{٢}}$ + $\frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ب}^{٢}}$ = ١ بالضرب × أ^{٢} ب^{٢}

∴ ب^{٢} س^{٢} + أ^{٢} ص^{٢} = أ^{٢} ب^{٢}

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ ب^{٢} س + ٢ أ^{٢} ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-ب^{٢} س}{أ^{٢} ص}$

$\therefore \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(أ جتاهـ ، ب جاهـ)} = \frac{-ب^{٢} أ جتاهـ}{أ^{٢} ب جاهـ}$

$= \frac{-ب}{أ} ظاهـ$

٤

① $س^{٢} - ٣ س ص + ص^{٢} = ٥$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٢ س - ٣ س \frac{ءص}{ءس} - ٣ ص + ٢ ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} (-٣ س + ٢ ص) = ٣ ص - ٢ س$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٣ ص - ٢ س}{-٣ س + ٢ ص}$

$\therefore \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(١ ، -١)} = ١$

$\therefore$ ظاهـ $= ١$ $\qquad \therefore ق(\angle هـ) = ٤٥^{\circ}$

② $س^{٣} - س^{٢} ص - س - ٣ ص = ٠$

$\therefore ٣ س^{٢} - س^{٢} \frac{ءص}{ءس} - ٢ س ص - ١ - ٣ \frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} (-٣ - س^{٢}) = ٢ س ص + ١ - ٣ س^{٢}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٢ س ص + ١ - ٣ س^{٢}}{-٣ - س^{٢}}$

$\therefore \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(١ ، ٠)} = \frac{١}{٢}$

$\therefore$ ظاهـ $= \frac{١}{٢}$ $\qquad \therefore ق(\angle هـ) \simeq ٢٦^{\circ} ٣٤'$

③ $\frac{س}{ص} - \frac{٤ ص}{س} = ٢$ بالضرب × (س ص)

$\therefore س^{٢} - ٤ ص^{٢} = ٢ س ص$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٢ س - ٨ ص \frac{ءص}{ءس} = ٢ س \frac{ءص}{ءس} + ٢ ص$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} (٢ س + ٨ ص) = ٢ س - ٢ ص$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٢ س - ٢ ص}{٢ س + ٨ ص}$

$\therefore \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(١ ، -١)} = -١$

$\therefore$ ظاهـ $= -١$ $\qquad \therefore ق(\angle هـ) = ١٣٥^{\circ}$

④ جا ٢ س = ظا ص (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٢$ جتا $٢ س =$ قا^{٢} ص $\frac{ءص}{ءس}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٢ \text{ جتا } ٢ س}{\text{قا}^{٢} ص}$

$\therefore \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{\left(\frac{٣\pi}{٤} ، \frac{٣\pi}{٤}\right)} =$ صفر

$\therefore$ ظاهـ = صفر $\qquad \therefore ق(\angle هـ) =$ صفر$^{\circ}$

ثانيًا مسائل على الاشتقاق البارامترى

٥

① $س = ٥ ن + ٣$ $\qquad \therefore \frac{ءس}{ءن} = ٥$

، $ص = ١٦ ن^{٢} + ٩$ $\qquad \therefore \frac{ءص}{ءن} = ٣٢ ن$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن} = \frac{٣٢ ن}{٥}$

$\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{ن = ٥} = \frac{٣٢ \times ٥}{٥} = ٣٢$

② $س = أ ن^{٢}$ $\qquad \therefore \frac{ءس}{ءن} = ٢ أ ن$

، $ص = ٢ أ ن^{٦}$ $\qquad \therefore \frac{ءص}{ءن} = ١٢ أ ن^{٥}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن} = \frac{١٢ أ ن^{٥}}{٢ أ ن} = ٦ ن^{٤}$

$\therefore \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{ن = ١} = ٦$

③ $س = ٤ ن$ $\qquad \therefore \frac{ءس}{ءن} = ٤$

، $ص = \frac{٤}{ن}$ $\qquad \therefore \frac{ءص}{ءن} = \frac{-٤}{ن^{٢}}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن} = \frac{-٤}{ن^{٢}} \div ٤ = \frac{-١}{ن^{٢}}$

$\therefore \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{ن = ٣} = \frac{-١}{٩}$

④ $س = (ن + ٧)(ن - ٢)$ منها $س = ن^{٢} + ٥ ن - ١٤$

$\therefore \frac{ءس}{ءن} = ٢ ن + ٥$

$ص = (ن^{٢} + ١)(ن - ٢)$

منها $ص = ن^{٣} - ٢ ن^{٢} + ن - ٢$

$\therefore \frac{ءص}{ءن} = ٣ ن^{٢} - ٤ ن + ١$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن} = \frac{٣ ن^{٢} - ٤ ن + ١}{٢ ن + ٥}$

$\therefore \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{ن = ١} = \frac{٣ - ٤ + ١}{٢ + ٥} =$ صفر

⑤ $س = \sqrt{٣ ن - ٢}$ $\qquad \therefore \frac{ءس}{ءن} = \frac{٣}{٢ \sqrt{٣ ن - ٢}}$

، $ص = \sqrt{٤ ن + ١}$

$\therefore \frac{ءص}{ءن} = \frac{٤}{٢ \sqrt{٤ ن + ١}} = \frac{٢}{\sqrt{٤ ن + ١}}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن}$

$= \frac{٢}{\sqrt{٤ ن + ١}} \div \frac{٣}{٢ \sqrt{٣ ن - ٢}}$

$= \frac{٤ \sqrt{٣ ن - ٢}}{٣ \sqrt{٤ ن + ١}}$

$\therefore \left(\frac{ءص}{ءن}\right)_{ن = ٢} = \frac{٤ \sqrt{٣ \times ٢ - ٢}}{٣ \sqrt{٤ \times ٢ + ١}} = \frac{٨}{٩}$

٦

① $س = ٣$ جتا ٢θ $\qquad \therefore \frac{ءس}{ء\theta} = -٦$ جا ٢θ

، $ص = ٤$ جا ٣θ $\qquad \therefore \frac{ءص}{ء\theta} = ١٢$ جتا ٣θ

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ء\theta} \div \frac{ءس}{ء\theta} = \frac{١٢ \text{ جتا } ٣\theta}{-٦ \text{ جا } ٢\theta} = \frac{-٢ \text{ جتا } ٣\theta}{\text{جا } ٢\theta}$

$\therefore \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{\theta = \frac{\pi}{٤}} = \frac{-٢ \text{ جتا } \frac{٣\pi}{٤}}{\text{جا } \frac{٢\pi}{٤}} = \sqrt{٢}$

② $س =$ جا $٢\pi\theta$

$\therefore \frac{ءس}{ء\theta} = ٢\pi$ جتا $٢\pi\theta$ ، $ص =$ جتا $٢\pi\theta$

$\therefore \frac{ءص}{ء\theta} = -٢\pi$ جا $٢\pi\theta$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ء\theta} \div \frac{ءس}{ء\theta} = \frac{-٢\pi \text{ جا } ٢\pi\theta}{٢\pi \text{ جتا } ٢\pi\theta}$

$= -$ ظا $٢\pi\theta$

$\therefore \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{\theta = \frac{١}{٦}} = -\sqrt{٣}$

③ $س = ٥$ جتا$^{٢} \theta$

$\therefore \frac{ءس}{ء\theta} = ١٠$ جتا $\theta \times -$ جا $\theta = -١٠$ جا θ جتا θ

، $ص = ٤$ جا$^{٢} \theta$ $\qquad \therefore \frac{ءص}{ء\theta} = ٨$ جا $\theta \times$ جتا θ

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ء\theta} \div \frac{ءس}{ء\theta} = \frac{٨ \text{ جا } \theta \text{ جتا } \theta}{-١٠ \text{ جا } \theta \text{ جتا } \theta} = \frac{-٤}{٥}$

④ $س = أ$ جتا$^{٣} \theta$

$\therefore \frac{ءس}{ء\theta} = ٣ أ$ جتا$^{٢} \theta \times -$ جا θ

$= -٣ أ$ جتا$^{٢} \theta$ جا θ

، $ص = أ$ جا$^{٣} \theta$ $\qquad \therefore \frac{ءص}{ء\theta} = ٣ أ$ جا$^{٢} \theta \times$ جتا θ

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ء\theta} \div \frac{ءس}{ء\theta} = \frac{٣ أ \text{ جا}^{٢} \theta \text{ جتا } \theta}{-٣ أ \text{ جتا}^{٢} \theta \text{ جا } \theta} = -$ ظا θ

$\therefore \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{\theta = \frac{\pi}{٤}} = -١$

⑤ $س = ٥ +$ قا$^{٢} ٣\theta$

$\therefore \frac{ءس}{ء\theta} = ٢$ قا ٣θ . قا ٣θ ظا $٣\theta \times ٣$

$= ٦$ قا$^{٢} ٣\theta$ ظا ٣θ

، $ص = ١ -$ ظا ٣θ $\qquad \therefore \frac{ءص}{ء\theta} = -٣$ قا$^{٢} ٣\theta$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-٣ \text{ قا}^{٢} ٣\theta}{٦ \text{ قا}^{٢} ٣\theta \text{ ظا } ٣\theta} = \frac{-١}{٢ \text{ ظا } ٣\theta}$

$\therefore \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{\theta = \frac{\pi}{٤}} = \frac{-١}{٢ \text{ ظا } \frac{٣\pi}{٤}} = \frac{١}{٢}$

⑥ $س =$ قا$^{٢} \theta - ١$

$\therefore \frac{ءس}{ء\theta} = ٢$ قا θ قا θ ظا $\theta = ٢$ قا$^{٢} \theta$ ظا θ

، $ص =$ ظا θ $\qquad \therefore \frac{ءص}{ءس} =$ قا$^{٢} \theta$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ء\theta} \div \frac{ءس}{ء\theta} = \frac{\text{قا}^{٢} \theta}{٢ \text{ قا}^{٢} \theta \text{ ظا } \theta} = \frac{١}{٢ \text{ ظا } \theta}$

$\therefore \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{\theta = \frac{\pi}{٤}} = \frac{١}{٢}$

⑦ $س = أ$ قا θ $\qquad \therefore \frac{ءس}{ء\theta} = أ$ قا θ ظا θ

، $ص = ب$ ظا θ $\qquad \therefore \frac{ءص}{ء\theta} = ب$ قا$^{٢} \theta$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ب قا}^2\theta}{\text{أ قا}\theta\ \text{ظا}\theta} = \frac{\text{ب قتا}\theta}{\text{أ}}$

$\therefore \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\theta=\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}\ \text{ب}}{\text{أ}}$

⑧ $\text{س} = \text{جتا}\,\theta + \text{جتا}\,2\theta$

$\therefore \frac{\text{ءس}}{\text{ء}\theta} = -\text{حا}\,\theta - 2\,\text{حا}\,2\theta$

، $\text{ص} = \text{حا}\,\theta + \text{حا}\,2\theta$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جتا}\,\theta + 2\,\text{جتا}\,2\theta$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ء}\theta} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ء}\theta} = \frac{\text{جتا}\,\theta + 2\,\text{جتا}\,2\theta}{-\text{حا}\,\theta - 2\,\text{حا}\,2\theta}$

$\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\theta=\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2} + 2\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

⑨ $\text{س} = 3\,\text{جتا}\,\theta - 2\,\text{جتا}^3\theta$

$\therefore \frac{\text{ءس}}{\text{ء}\theta} = -3\,\text{حا}\,\theta + 6\,\text{جتا}^2\theta\ \text{حا}\,\theta$

، $\text{ص} = 3\,\text{حا}\,\theta - 2\,\text{حا}^3\theta$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ء}\theta} = 3\,\text{جتا}\,\theta - 6\,\text{حا}^2\theta\ \text{جتا}\,\theta$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{3\,\text{جتا}\,\theta - 6\,\text{حا}^2\theta\ \text{جتا}\,\theta}{-3\,\text{حا}\,\theta + 6\,\text{جتا}^2\theta\ \text{حا}\,\theta}$

$\therefore \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\text{صفر} - \text{صفر}}{-3 + 6 \times \text{صفر} \times 1} = \text{صفر}$

⑩ $\text{س} = \text{أ}\,(\text{جتا}\,\theta + \theta\ \text{حا}\,\theta)$

$\therefore \frac{\text{ءس}}{\text{ء}\theta} = \text{أ}\,(-\text{حا}\,\theta + \text{حا}\,\theta + \theta\ \text{جتا}\,\theta)$

$= \text{أ}\,\theta\ \text{جتا}\,\theta$

، $\text{ص} = \text{أ}\,(\text{حا}\,\theta - \theta\ \text{جتا}\,\theta)$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ء}\theta} = \text{أ}\,(\text{جتا}\,\theta - \text{جتا}\,\theta + \theta\ \text{حا}\,\theta)$

$= \text{أ}\,\theta\ \text{حا}\,\theta$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{أ}\,\theta\ \text{حا}\,\theta}{\text{أ}\,\theta\ \text{جتا}\,\theta} = \text{ظا}\,\theta$

$\therefore \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

٧

① بوضع : $\text{ص} = 4\text{س}^3 - 9\text{س}^2 + 5$

، $\text{ع} = 3\text{س}^2 + 7$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 12\text{س}^2 - 18\text{س}$

، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = 6\text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \div \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{12\text{س}^2 - 18\text{س}}{6\text{س}}$

$= 2\text{س} - 3$

② بوضع : $\text{ص} = (\text{س} + 3)(\text{س} - 2)$

$= \text{س}^2 + \text{س} - 6$

، $\text{ع} = \frac{\text{س} - 3}{\text{س} + 2}$ $\qquad \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2\text{س} + 1$

، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{س} + 2) \times 1 - (\text{س} - 3) \times 1}{(\text{س} + 2)^2}$

$= \frac{5}{(\text{س} + 2)^2}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \div \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = (2\text{س} + 1) \div \frac{5}{(\text{س} + 2)^2}$

$= \frac{1}{5}(2\text{س} + 1)(\text{س} + 2)^2$

③ بوضع : $\text{ص} = \frac{\text{س} + 1}{\text{س} - 1}$ ، $\text{ع} = \sqrt{2\text{س} + 1}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{س} - 1)(1) - (\text{س} + 1)(1)}{(\text{س} - 1)^2} = \frac{-2}{(\text{س} - 1)^2}$

، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{2}{2\sqrt{2\text{س} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2\text{س} + 1}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \div \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{-2}{(\text{س} - 1)^2} \div \frac{1}{\sqrt{2\text{س} + 1}}$

$= \frac{-2\sqrt{2\text{س} + 1}}{(\text{س} - 1)^2}$

$\therefore \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}\right)_{\text{س}=4} = \frac{-2\sqrt{2(4) + 1}}{(4 - 1)^2} = \frac{-2}{3}$

④ بوضع : $\text{ص} = \text{س} - \text{حا}\,\text{س}$ ، $\text{ع} = 1 - \text{جتا}\,\text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 1 - \text{جتا}\,\text{س}$ ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \text{حا}\,\text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \div \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{1 - \text{جتا}\,\text{س}}{\text{حا}\,\text{س}}$

$\therefore \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}\right)_{\text{س}=\frac{\pi}{3}} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

ثالثًا مسائل متنوعة

٨

① -1 ② 18 ③ $\frac{3}{8}$ ④ 10 ⑤ 6 ⑥ $\frac{-10}{27}$

٩

① (د) ② (د) ③ (د) ④ (ب) ⑤ (د)
⑥ (أ) ⑦ (أ) ⑧ (ب) ⑨ (ب) ⑩ (ب)
⑪ (جـ) ⑫ (جـ) ⑬ (أ) ⑭ (ب) ⑮ (د)
⑯ (جـ) ⑰ (د) ⑱ (جـ) ⑲ (أ) ⑳ (ب)
㉑ (د) ㉒ (د)

١٠

$\text{ص} = (\text{س}^3 + 2)^7$ بالاشتقاق بالنسبة إلى ص

$\therefore 1 = 7(\text{س}^3 + 2)^6 \times 3\text{س}^2 \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءص}}$

$\therefore \frac{\text{ءس}}{\text{ءص}} = \frac{1}{21\text{س}^2(\text{س}^3 + 2)^6} \times \frac{(\text{س}^3 + 2)}{(\text{س}^3 + 2)}$

$= \frac{(\text{س}^3 + 2)}{21\text{س}^2(\text{س}^3 + 2)^7} = \frac{\text{س}^3 + 2}{21\text{س}^2\ \text{ص}}$

١١

$\text{س} = (\text{ص}^2 - 1)^5$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$1 = 5(\text{ص}^2 - 1)^4 \times 3\text{ص}^2 \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{15\text{ص}^2(\text{ص}^2 - 1)^4} \times \frac{(\text{ص}^2 - 1)}{(\text{ص}^2 - 1)}$

$= \frac{\text{ص}^2 - 1}{15\text{ص}^2(\text{ص}^2 - 1)^5} = \frac{\text{ص}^2 - 1}{15\,\text{س}\,\text{ص}^2}$

١٢

$\frac{2}{\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}}} = \frac{5}{1}$

$\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}} = \frac{2}{5}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\frac{1}{2}\text{س}^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\text{ص}^{-\frac{1}{2}}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{صفر}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-\text{س}^{-\frac{1}{2}}}{\text{ص}^{-\frac{1}{2}}} = \frac{-\sqrt{\text{ص}}}{\sqrt{\text{س}}}$ $\qquad \therefore \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^2 = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$

١٣

$(\text{ص} - \text{أ})^{\text{ن}} - (\text{س} - \text{أ})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{ن}}$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\text{ن}(\text{ص} - \text{أ})^{\text{ن}-1} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - \text{ن}(\text{س} - \text{أ})^{\text{ن}-1} = \text{صفر}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{س} - \text{أ})^{\text{ن}-1}}{(\text{ص} - \text{أ})^{\text{ن}-1}} = \left(\frac{\text{س} - \text{أ}}{\text{ص} - \text{أ}}\right)^{\text{ن}-1}$

١٤

$\text{ص}^2 + 2\text{أ}\text{س} - \text{أ}^2 = 0$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$2\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + 2\text{أ} = \text{صفر}$ $\qquad \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-\text{أ}}{\text{ص}}$

$\therefore$ الطرف الأيمن $= \left(\frac{-\text{أ}}{\text{ص}}\right)^2 + \frac{2\text{س}}{\text{ص}}\left(\frac{-\text{أ}}{\text{ص}}\right)$

$= \frac{\text{أ}^2 - 2\text{أ}\text{س}}{\text{ص}^2} = \frac{\text{ص}^2}{\text{ص}^2} = 1$

١٥

$\text{ص}^2 = \text{س} + \sqrt{1 + \text{س}^2}$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$2\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 1 + \frac{\text{س}}{\sqrt{1 + \text{س}^2}}$

بالضرب × $\left(\sqrt{1 + \text{س}^2}\right)$

$2\text{ص}\sqrt{1 + \text{س}^2}\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \sqrt{1 + \text{س}^2} + \text{س}$

$2\text{ص}\sqrt{1 + \text{س}^2}\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ص}^2$

$\therefore 2\sqrt{1 + \text{س}^2}\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ص}$

16

$\text{ص} = \left(\frac{\text{س}^2 - 2}{\text{س}^2 + 2}\right)^{\text{ن}}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ن}\left(\frac{\text{س}^2 - 2}{\text{س}^2 + 2}\right)^{\text{ن}-1}$

$\times \left[\frac{(\text{س}^2 + 2)(2\text{س}) - (\text{س}^2 - 2)(2\text{س})}{(\text{س}^2 + 2)^2}\right]$

$= \text{ن}\left(\frac{\text{س}^2 - 2}{\text{س}^2 + 2}\right)^{\text{ن}-1}\left[\frac{8\text{س}}{(\text{س}^2 + 2)^2}\right]$

$= \text{ن}\left(\frac{\text{س}^2 - 2}{\text{س}^2 + 2}\right)^{\text{ن}}\left(\frac{\text{س}^2 + 2}{\text{س}^2 - 2}\right)\left(\frac{8\text{س}}{(\text{س}^2 + 2)^2}\right)$

$= \text{ن ص} \times \frac{8\text{س}}{\text{س}^4 - 4} = \frac{8\,\text{ن س ص}}{\text{س}^4 - 4}$

$\therefore \frac{\text{ءس}}{\text{ءص}} = \frac{\text{س}^4 - 4}{8\,\text{ن س ص}}$

17

$\text{ص} = \text{ما}^3\theta \text{ ، } \text{ع} = \text{منا}^3\theta$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى θ)

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ء}\theta} = 3\,\text{ما}^2\theta\,\text{منا}\,\theta \text{ ، } \frac{\text{ءع}}{\text{ء}\theta} = -3\,\text{منا}^2\theta\,\text{ما}\,\theta$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ء}\theta} \div \frac{\text{ءع}}{\text{ء}\theta} = \frac{3\,\text{ما}^2\theta\,\text{منا}\,\theta}{-3\,\text{منا}^2\theta\,\text{ما}\,\theta} = -\text{ظا}\,\theta$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} + \text{ظا}\,\theta = \text{صفر}$

18

$\text{س} = \text{أ}\left(\text{ن} + \frac{1}{\text{ن}}\right) \quad \therefore \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \text{أ}\left(1 + \frac{-1}{\text{ن}^2}\right)$

$\text{، ص} = \text{أ}\left(\text{ن} - \frac{1}{\text{ن}}\right) \quad \therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \text{أ}\left(1 - \frac{-1}{\text{ن}^2}\right)$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

$= \left[\text{أ}\left(1 + \frac{1}{\text{ن}^2}\right)\right] \div \left[\text{أ}\left(1 - \frac{1}{\text{ن}^2}\right)\right]$

$= \frac{1 + \frac{1}{\text{ن}^2}}{1 - \frac{1}{\text{ن}^2}} \times \frac{\text{ن}^2}{\text{ن}^2} = \frac{\text{ن}^2 + 1}{\text{ن}^2 - 1}$

$\therefore \text{ ، } \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{أ}\left(\text{ن} + \frac{1}{\text{ن}}\right)}{\text{أ}\left(\text{ن} - \frac{1}{\text{ن}}\right)} \times \frac{\text{ن}}{\text{ن}} = \frac{\text{ن}^2 + 1}{\text{ن}^2 - 1}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$

19

$\text{س} = 2\text{ع}^3 - 5\text{ع}^2 - 4\text{ع} + 12$

$\therefore \frac{\text{ءس}}{\text{ءع}} = 6\text{ع}^2 - 10\text{ع} - 4$

$\text{، ص} = 2\text{ع}^2 + \text{ع} - 4 \quad \therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = 4\text{ع} + 1$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ءع}} = \frac{4\text{ع} + 1}{6\text{ع}^2 - 10\text{ع} - 4}$

في حالة المماس أفقي :

$\therefore \text{ميله} = 0 \quad \therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0$

$\therefore \frac{4\text{ع} + 1}{6\text{ع}^2 - 10\text{ع} - 4} = 0 \quad \therefore \text{ع} = \frac{-1}{4}$

في حالة المماس رأسي :

ميله غير معرف

$\therefore 6\text{ع}^2 - 10\text{ع} - 4 = 0$

$\therefore 3\text{ع}^2 - 5\text{ع} - 2 = 0$

$\therefore (3\text{ع} + 1)(\text{ع} - 2) = 0$

$\therefore \text{ع} = \frac{-1}{3} \text{ أ، } \text{ع} = 2$

20

$\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = 3\text{ن}^2 - 14\text{ن} + 16 \text{ ، } \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = 6\text{ن}^2 - 6\text{ن}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{6\text{ن}^2 - 6\text{ن}}{3\text{ن}^2 - 14\text{ن} + 16}$

في حالة المماس رأسي :

$\therefore$ الميل غير معرف $\quad \therefore 3\text{ن}^2 - 14\text{ن} + 16 = 0$

$\therefore (3\text{ن} - 8)(\text{ن} - 2) = 0$

$\therefore \text{ن} = \frac{8}{3} \text{ أ، } \text{ن} = 2$

في حالة المماس أفقي :

$\therefore \text{الميل} = 0 \quad \therefore 6\text{ن}^2 - 6\text{ن} = 0$

$\therefore 6\text{ن}(\text{ن} - 1) = 0 \quad \therefore \text{ن} = 0 \text{ أ، } \text{ن} = 1$

21

$\text{س} = (1 - \text{ص})(1 + \text{ص} + \text{ص}^2)$

$\therefore \text{س} = 1 - \text{ص}^3$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$1 = -3\text{ص}^2 \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \quad \therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-1}{3\text{ص}^2}$

22

$\text{ما س منا ص} - \text{ما ص منا س} = 1$

$\text{ما}(\text{س} - \text{ص}) = 1 \quad \therefore \text{س} - \text{ص} = \frac{\pi}{2}$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore 1 - \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0 \quad \therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 1$

23

$\text{ما}^2\text{س} + \text{منا}^2\text{ص} = \frac{1}{4}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى ص)

$2\,\text{ما س منا س}\,\frac{\text{ءس}}{\text{ءص}} - 2\,\text{منا ص ما ص} = \text{صفر}$

$\therefore \frac{\text{ءس}}{\text{ءص}} = \frac{2\,\text{منا ص ما ص}}{2\,\text{ما س منا س}} = \frac{\text{ما }2\text{ص}}{\text{ما }2\text{س}}$

$= \text{ما }2\text{ص قتا }2\text{س}$

24

$\text{س} = \text{منا}(\text{س ص})$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$1 = -\text{ما}(\text{س ص}) \times \left(\text{ص} + \text{س}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)$

$1 = -\text{ص ما}(\text{س ص}) - \text{س ما}(\text{س ص}) \cdot \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1 + \text{ص ما}(\text{س ص})}{-\text{س ما}(\text{س ص})}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \frac{1 + \text{ص ما}(\text{س ص})}{\text{س ما}(\text{س ص})} = 0$

25

① نفرض $\text{ص} = \text{د}(\text{س})$ دالة زوجية

$\therefore \text{د}(-\text{س}) = \text{د}(\text{س})$

باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س

$\therefore \text{د}'(-\text{س}) \times -1 = \text{د}'(\text{س})$

$\therefore \text{د}'(-\text{س}) = -\text{د}'(\text{س})$

$\therefore \text{د}'(\text{س})$ تمثل دالة فردية

② نفرض $\text{ص} = \text{د}(\text{س})$ دالة فردية

$\therefore \text{د}(-\text{س}) = -\text{د}(\text{س})$

باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س

$\therefore \text{د}'(-\text{س}) \times -1 = -\text{د}'(\text{س})$

$\therefore \text{د}'(-\text{س}) = \text{د}'(\text{س})$

$\therefore \text{د}'(\text{س})$ تمثل دالة زوجية

26

① (د) ② (أ) ③ (أ)

④ (د) ⑤ (أ) ⑥ (جـ)

إرشادات لحل رقم 26

① $\because \text{د}(\text{س}) = \text{ر}(\text{س}^2)$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \text{ر}'(\text{س}^2) \times 2\text{س}$

$\text{، عند س} = 2 \quad \therefore \text{د}'(2) = \text{ر}'(4) \times 4$

$\therefore \frac{\text{د}'(2)}{\text{ر}'(4)} = 4$

② $\because$ الدالة ر هي الدالة العكسية للدالة د

$\therefore \text{ر}\left[\text{د}(\text{س})\right] = \text{س}$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س

$\therefore \text{ر}'\left[\text{د}(\text{س})\right] \times \text{د}'(\text{س}) = 1$

وعند س = أ

$\therefore \text{ر}'\left[\text{د}(\text{أ})\right] \times \text{د}'(\text{أ}) = 1$

$\therefore \text{ر}'(\text{ب}) \times 2 = 1 \quad \therefore \text{ر}'(\text{ب}) = \frac{1}{2}$

③ $\because \text{ص} = \text{د}(\text{ظا س})$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^2\text{س} \times \text{د}'(\text{ظا س})$

$\text{عند س} = \frac{\pi}{4}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2 \times \text{د}'(1) = 2 \times 2 = 4$

$\text{، } \because \text{ع} = \text{ر}(\text{قا س})$

$\therefore \frac{\text{ءع}}{\text{ءر}} = \text{قا}\,\text{س}\ \text{طا}\,\text{س} \times \text{ر}'(\text{قا}\,\text{س})$

، عند $\text{س} = \frac{\pi}{٤}$

$\therefore \frac{\text{ءع}}{\text{ءر}} = \sqrt{٢} \times \text{ر}'(\sqrt{٢}) = \sqrt{٢} \times ٤ = ٤\sqrt{٢}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءع}}$ ، عند $\text{س} = \frac{\pi}{٤}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = ٤ \times \frac{١}{٤\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

④ $\text{ص} = \sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س} + \dots}}}$ بالتربيع

$\therefore \text{ص}^٢ = \text{س} + \sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س} + \dots}}}$

$\therefore \text{ص}^٢ = \text{س} + \text{ص}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$٢\,\text{ص}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١ + \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

منها $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}(٢\,\text{ص} - ١) = ١$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢\,\text{ص} - ١}$

⑤ $\text{س} = \sqrt{\text{طا}\,\text{ص} + \sqrt{\text{طا}\,\text{ص} + \sqrt{\text{طا}\,\text{ص} + \dots}}}$ بالتربيع

$\therefore \text{س}^٢ = \text{طا}\,\text{ص} + \sqrt{\text{طا}\,\text{ص} + \sqrt{\text{طا}\,\text{ص} + \sqrt{\dots}}}$

$\therefore \text{س}^٢ = \text{طا}\,\text{ص} + \text{س}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٢\,\text{س} = \text{قا}^٢\,\text{ص}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ١$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢\,\text{س} - ١}{\text{قا}^٢\,\text{ص}} = (٢\,\text{س} - ١)\,\text{جتا}^٢\,\text{ص}$

⑥ $\because (\text{د} \circ \text{د}')(\text{س}) = \text{د}[\text{د}'(\text{س})] = \text{د}(٢\,\text{س})$

$= ٤\,\text{س}^٢$

$\therefore (\text{د} \circ \text{د}')'(\text{س}) = ٨\,\text{س}$

$\therefore (\text{د} \circ \text{د}')'(١) = ٨$

٢٧

$\text{س} = \text{جا}\,\text{ص}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$١ = \text{جتا}\,\text{ص}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{\text{جتا}\,\text{ص}}$ $\left(\because \text{جتا}\,\text{ص} = \sqrt{١ - \text{جا}^٢\,\text{ص}}\right)$

$= \frac{١}{\sqrt{١ - \text{جا}^٢\,\text{ص}}} = \frac{١}{\sqrt{١ - \text{س}^٢}}$

٢٨

$\text{ص} = \text{د}(\text{ر}(\text{س}))$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{د}'(\text{ر}(\text{س})) \times \text{ر}'(\text{س})$ (١)

، $\because \text{د}'(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^٢ + ١}}$ ، $\text{ر}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}}$

$\therefore \text{د}'(\text{ر}(\text{س})) = \frac{\text{ر}(\text{س})}{\sqrt{(\text{ر}(\text{س}))^٢ + ١}} = \frac{\frac{١}{\text{س}}}{\sqrt{\frac{١}{\text{س}^٢} + ١}}$

$= \frac{\frac{١}{\text{س}}}{\sqrt{\frac{\text{س}^٢ + ١}{\text{س}^٢}}} = \frac{\frac{١}{\text{س}}}{\left|\frac{١}{\text{س}}\right|\sqrt{\text{س}^٢ + ١}}$

ومن (١): $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\frac{١}{\text{س}}}{\left|\frac{١}{\text{س}}\right|\sqrt{\text{س}^٢ + ١}} \times -\text{س}^{-٢}$

$= \begin{cases} \frac{-١}{\text{س}^٢\sqrt{\text{س}^٢ + ١}} ، & \text{س} > ٠ \\ \frac{١}{\text{س}^٢\sqrt{\text{س}^٢ + ١}} ، & \text{س} < ٠ \end{cases}$

٢٩

$\because \begin{vmatrix} \text{س} & ٢\,\text{س} & ١ \\ \text{ل} & ٠ & ١ \\ ٠ & \text{ك} & ١ \end{vmatrix} = \text{س}(٠ - \text{ك}) - ٢\,\text{س}(\text{ل} - ٠) + ١(\text{ل}\,\text{ك} - ٠)$

$= -\text{ك}\,\text{س} - ٢\,\text{ل}\,\text{س} + \text{ك}\,\text{ل}$

$= -(٢\,\text{ل} + \text{ك})\,\text{س} + \text{ك}\,\text{ل}$

$\therefore$ مساحة $\triangle$ أ ب جـ $= \frac{١}{٢}\left|-(٢\,\text{ل} + \text{ك})\,\text{س} + \text{ك}\,\text{ل}\right|$

$= \left|-(\text{ل} + \frac{\text{ك}}{٢})\,\text{س} + \frac{١}{٢}\,\text{ك}\,\text{ل}\right|$

$\therefore$ المساحة م

$= \begin{cases} -(\text{ل} + \frac{\text{ك}}{٢})\,\text{س} + \frac{١}{٢}\,\text{ك}\,\text{ل} ، & \text{س} < \frac{\text{ك}\,\text{ل}}{\text{ك} + ٢\,\text{ل}} \\ (\text{ل} + \frac{\text{ك}}{٢})\,\text{س} - \frac{١}{٢}\,\text{ك}\,\text{ل} ، & \text{س} > \frac{\text{ك}\,\text{ل}}{\text{ك} + ٢\,\text{ل}} \end{cases}$

$\therefore \frac{\text{ءم}}{\text{ءس}} = \begin{cases} -\text{ل} - \frac{\text{ك}}{٢} ، & \text{س} < \frac{\text{ك}\,\text{ل}}{\text{ك} + ٢\,\text{ل}} \\ \text{ل} + \frac{\text{ك}}{٢} ، & \text{س} > \frac{\text{ك}\,\text{ل}}{\text{ك} + ٢\,\text{ل}} \end{cases}$

إجابات تمارين 3

١

① $\text{ص} = \text{س}^٣ - ٥\,\text{س}^٢ + ٦\,\text{س} - ٤$

$\therefore \text{ص}' = ٣\,\text{س}^٢ - ١٠\,\text{س} + ٦$

$\therefore \text{ص}'' = ٦\,\text{س} - ١٠$

② $\text{ص} = (٣\,\text{س}^٢ - ٤)(\text{س} + ٣)$

$\therefore \text{ص}' = ٦\,\text{س}(\text{س} + ٣) + ٣\,\text{س}^٢ - ٤$

$= ٦\,\text{س}^٢ + ١٨\,\text{س} + ٣\,\text{س}^٢ - ٤$

$= ٩\,\text{س}^٢ + ١٨\,\text{س} - ٤$

$\therefore \text{ص}'' = ١٨\,\text{س} + ١٨$

③ $\text{ص} = \text{س}^٢(\text{س} + ٢)^٢$

$\therefore \text{ص} = (\text{س}^٢ + ٢\,\text{س})^٢$

$\therefore \text{ص}' = ٢(\text{س}^٢ + ٢\,\text{س})(٢\,\text{س} + ٢)$

$\therefore \text{ص}'' = ٢[(٢\,\text{س} + ٢)(٢\,\text{س} + ٢)$

$+ ٢(\text{س}^٢ + ٢\,\text{س})]$

$= ٢[(٢\,\text{س} + ٢)^٢ + ٢(\text{س}^٢ + ٢\,\text{س})]$

$= ٢(٢\,\text{س} + ٢)^٢ + ٤(\text{س}^٢ + ٢\,\text{س})$

$= ١٢\,\text{س}^٢ + ٢٤\,\text{س} + ٨$

④ $\text{ص} = \frac{\text{س} + ٢}{\text{س} - ٢}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{(\text{س} - ٢)(١) - (\text{س} + ٢)(١)}{(\text{س} - ٢)^٢}$

$= \frac{-٤}{(\text{س} - ٢)^٢} = -٤(\text{س} - ٢)^{-٢}$

$\therefore \text{ص}'' = ٨(\text{س} - ٢)^{-٣}$

⑤ $\text{ص} = \text{س} + \sqrt{\text{س} + ٥}$

$\therefore \text{ص}' = ١ + \frac{١}{٢\sqrt{\text{س} + ٥}} = ١ + \frac{١}{٢}(\text{س} + ٥)^{-\frac{١}{٢}}$

$\therefore \text{ص}'' = \frac{-١}{٤}(\text{س} + ٥)^{-\frac{٣}{٢}}$

⑥ $\text{ص} = (\text{س} - ٢)^{\frac{٢}{٣}}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{٢}{٣}(\text{س} - ٢)^{-\frac{١}{٣}}$

$\therefore \text{ص}'' = \frac{-٢}{٩}(\text{س} - ٢)^{-\frac{٤}{٣}}$

⑦ $\text{ص} = \text{جا}(٥\,\text{س} + ١)$

$\therefore \text{ص}' = ٥\,\text{جتا}(٥\,\text{س} + ١)$

$\therefore \text{ص}'' = -٢٥\,\text{جا}(٥\,\text{س} + ١)$

⑧ $\text{ص} = ٢\,\text{س}^٢ + \text{جتا}\,٣\,\text{س}$

$\therefore \text{ص}' = ٤\,\text{س} - ٣\,\text{جا}\,٣\,\text{س}$

$\therefore \text{ص}'' = ٤ - ٩\,\text{جتا}\,٣\,\text{س}$

⑨ $\text{ص} = \text{س}\,\text{جتا}\,٢\,\text{س}$

$\therefore \text{ص}' = -\text{س}(٢\,\text{جا}\,٢\,\text{س}) + \text{جتا}\,٢\,\text{س}$

$= -٢\,\text{س}\,\text{جا}\,٢\,\text{س} + \text{جتا}\,٢\,\text{س}$

$\therefore \text{ص}'' = -٢\,\text{جا}\,٢\,\text{س} - ٤\,\text{س}\,\text{جتا}\,٢\,\text{س} - ٢\,\text{جا}\,٢\,\text{س}$

$= -٤\,\text{جا}\,٢\,\text{س} - ٤\,\text{س}\,\text{جتا}\,٢\,\text{س}$

⑩ $\text{ص} = ٩\,\text{طا}\,\frac{\text{س}}{٣}$

$\therefore \text{ص}' = ٣\,\text{قا}^٢\,\frac{\text{س}}{٣}$

$\therefore \text{ص}'' = ٦\,\text{قا}\,\frac{\text{س}}{٣} \times \left(\text{قا}\,\frac{\text{س}}{٣}\,\text{طا}\,\frac{\text{س}}{٣}\right) \times \frac{١}{٣}$

$= ٢\,\text{قا}^٢\,\frac{\text{س}}{٣}\,\text{طا}\,\frac{\text{س}}{٣}$

⑪ $\text{ص} = ٢\,\text{جا}^٢\,\text{س} - ٥\,\text{جتا}^٢\,\text{س}$

$\therefore \text{ص}' = ٤\,\text{جا}\,\text{س}\,\text{جتا}\,\text{س} + ١٠\,\text{جتا}\,\text{س}\,\text{جا}\,\text{س}$

$= ١٤\,\text{جا}\,\text{س}\,\text{جتا}\,\text{س} = ٧\,\text{جا}\,٢\,\text{س}$

$\therefore \text{ص}'' = ٧(\text{جتا}\,٢\,\text{س}) \times ٢ = ١٤\,\text{جتا}\,٢\,\text{س}$

⑫ $\text{ص} = \text{س}\,\text{جا}^٢\,\text{س}$

$\therefore \text{ص}' = \text{س}(٢\,\text{جا}\,\text{س}\,\text{جتا}\,\text{س}) + \text{جا}^٢\,\text{س}$

$= \text{س}\,\text{جا}\,٢\,\text{س} + \text{جا}^٢\,\text{س}$

$\therefore \text{ص}'' = ٢\,\text{س}\,\text{جتا}\,٢\,\text{س} + \text{جا}\,٢\,\text{س} + ٢\,\text{جا}\,\text{س}\,\text{جتا}\,\text{س}$

$= ٢\,\text{س}\,\text{جتا}\,٢\,\text{س} + ٢\,\text{جا}\,٢\,\text{س}$

٢

① $\text{ص} = 2\,\text{جا}\,2\text{س}$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 4\,\text{جتا}\,2\text{س}$

∴ $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = -8\,\text{جا}\,2\text{س}$

∴ $\left(\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}\right)_{\text{س}=\frac{\pi}{4}} = -8$

② $\text{ص} = \text{جا س} - \text{جتا س}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جتا س} + \text{جا س}$

∴ $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = -\text{جا س} + \text{جتا س}$

∴ $\left(\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}\right)_{\text{س}=\frac{\pi}{4}} = \text{صفر}$

③ $\text{ص} = 2\text{س}\,\text{جا س}\,\text{جتا س}$

∴ $\text{ص} = \text{س}\,\text{جا}\,2\text{س}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س} \times 2\,\text{جتا}\,2\text{س} + \text{جا}\,2\text{س}$

$= 2\text{س}\,\text{جتا}\,2\text{س} + \text{جا}\,2\text{س}$

∴ $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = -4\text{س}\,\text{جا}\,2\text{س} + 2\,\text{جتا}\,2\text{س} + 2\,\text{جتا}\,2\text{س}$

$= -4\text{س}\,\text{جا}\,2\text{س} + 4\,\text{جتا}\,2\text{س}$

∴ $\left(\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}\right)_{\text{س}=\pi} = 4$

④ $\text{ص} = \text{س}\,\text{جتا س} - \text{جا س}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{س}\,\text{جا س} + \text{جتا س} - \text{جتا س}$

$= -\text{س}\,\text{جا س}$

∴ $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = -\text{س}\,\text{جتا س} - \text{جا س}$

∴ $\left(\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}\right)_{\text{س}=\frac{\pi}{2}} = -1$

⑤ $\text{ص} = \frac{2\text{س} - 1}{\text{س} + 3}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{2(\text{س}+3) - (2\text{س}-1)}{(\text{س}+3)^2}$

$= \frac{7}{(\text{س}+3)^2} = 7(\text{س}+3)^{-2}$

∴ $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = -14(\text{س}+3)^{-3}$

∴ $\left(\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}\right)_{\text{س}=-2} = -14$

٣

① $\text{ص} = \text{س}^5 - 4\text{س}^3 + 3$

∴ $\text{ص}^{\prime} = 5\text{س}^4 - 12\text{س}^2$

∴ $\text{ص}^{\prime\prime} = 20\text{س}^3 - 24\text{س}$

∴ $\text{ص}^{\prime\prime\prime} = 60\text{س}^2 - 24$

② $\text{ص} = \text{جا س}$ ∴ $\text{ص}^{\prime} = \text{جتا س}$

∴ $\text{ص}^{\prime\prime} = -\text{جا س}$ ∴ $\text{ص}^{\prime\prime\prime} = -\text{جتا س}$

③ $\text{ص} = \text{جتا}(\pi - 3\text{س})$

∴ $\text{ص}^{\prime} = -\text{جا}(\pi - 3\text{س}) \times -3 = 3\,\text{جا}(\pi - 3\text{س})$

∴ $\text{ص}^{\prime\prime} = 3\,\text{جتا}(\pi - 3\text{س}) \times -3$

$= -9\,\text{جتا}(\pi - 3\text{س})$

∴ $\text{ص}^{\prime\prime\prime} = -9\left(-\text{جا}(\pi - 3\text{س})\right) \times -3$

$= -27\,\text{جا}(\pi - 3\text{س}) = -27\,\text{جا}\,3\text{س}$

④ $\text{ص} = (2\text{س} + 7)^4 + \text{جا}\,2\text{س}$

∴ $\text{ص}^{\prime} = 4(2\text{س}+7)^3(2) + 2\,\text{جتا}\,2\text{س}$

$= 8(2\text{س}+7)^3 + 2\,\text{جتا}\,2\text{س}$

∴ $\text{ص}^{\prime\prime} = 24(2\text{س}+7)^2(2) - 4\,\text{جا}\,2\text{س}$

$= 48(2\text{س}+7)^2 - 4\,\text{جا}\,2\text{س}$

∴ $\text{ص}^{\prime\prime\prime} = 96(2\text{س}+7)(2) - 8\,\text{جتا}\,2\text{س}$

$= 192(2\text{س}+7) - 8\,\text{جتا}\,2\text{س}$

⑤ $\text{د}(\text{س}) = \frac{2\text{س}}{\text{س}+1}$

∴ $\text{د}^{\prime}(\text{س}) = \frac{2(\text{س}+1) - 2\text{س}}{(\text{س}+1)^2} = \frac{2}{(\text{س}+1)^2}$

$= 2(\text{س}+1)^{-2}$

∴ $\text{د}^{\prime\prime}(\text{س}) = -4(\text{س}+1)^{-3}$

∴ $\text{د}^{\prime\prime\prime}(\text{س}) = 12(\text{س}+1)^{-4}$

⑥ $\text{ص} = \frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}$

∴ $\text{ص}^{\prime} = \frac{(\text{س}-1)(1) - (\text{س}+1)(1)}{(\text{س}-1)^2}$

$= \frac{-2}{(\text{س}-1)^2} = -2(\text{س}-1)^{-2}$

∴ $\text{ص}^{\prime\prime} = 4(\text{س}-1)^{-3}$

∴ $\text{ص}^{\prime\prime\prime} = -12(\text{س}-1)^{-4}$

⑦ $\text{ص} = 2\text{س} + 3\text{س}^{-1}$ ∴ $\text{ص}^{\prime} = 2 - 3\text{س}^{-2}$

∴ $\text{ص}^{\prime\prime} = 6\text{س}^{-3}$ ∴ $\text{ص}^{\prime\prime\prime} = -18\text{س}^{-4}$

⑧ $\text{ص} = (2\text{س} - 5)^{\frac{1}{2}}$

∴ $\text{ص}^{\prime} = \frac{1}{2}(2\text{س}-5)^{-\frac{1}{2}} \times 2 = (2\text{س}-5)^{-\frac{1}{2}}$

∴ $\text{ص}^{\prime\prime} = -\frac{1}{2}(2\text{س}-5)^{-\frac{3}{2}} \times 2 = -(2\text{س}-5)^{-\frac{3}{2}}$

∴ $\text{ص}^{\prime\prime\prime} = \frac{3}{2}(2\text{س}-5)^{-\frac{5}{2}} \times 2 = 3(2\text{س}-5)^{-\frac{5}{2}}$

⑨ $\text{ص} = \text{جا س}\,\text{جتا س} = \frac{1}{2}\,\text{جا}\,2\text{س}$

∴ $\text{ص}^{\prime} = \frac{1}{2}\,\text{جتا}\,2\text{س} \times 2 = \text{جتا}\,2\text{س}$

∴ $\text{ص}^{\prime\prime} = -\text{جا}\,2\text{س} \times 2 = -2\,\text{جا}\,2\text{س}$

∴ $\text{ص}^{\prime\prime\prime} = -2\,\text{جتا}\,2\text{س} \times 2 = -4\,\text{جتا}\,2\text{س}$

⑩ $\text{ص} = 2\text{س}^3 + \text{س}\,\text{جتا}\,2\text{س}$

∴ $\text{ص}^{\prime} = 6\text{س}^2 + \text{س}(-2\,\text{جا}\,2\text{س}) + \text{جتا}\,2\text{س}$

$= 6\text{س}^2 - 2\text{س}\,\text{جا}\,2\text{س} + \text{جتا}\,2\text{س}$

∴ $\text{ص}^{\prime\prime} = 12\text{س} - 4\text{س}\,\text{جتا}\,2\text{س} - 2\,\text{جا}\,2\text{س} - 2\,\text{جا}\,2\text{س}$

$= 12\text{س} - 4\text{س}\,\text{جتا}\,2\text{س} - 4\,\text{جا}\,2\text{س}$

∴ $\text{ص}^{\prime\prime\prime} = 12 - 4\text{س}(-2\,\text{جا}\,2\text{س}) - 4\,\text{جتا}\,2\text{س} - 8\,\text{جتا}\,2\text{س}$

$= 12 + 8\text{س}\,\text{جا}\,2\text{س} - 12\,\text{جتا}\,2\text{س}$

٤

$\text{ص} = \text{س}^5 - 10\text{س}^4 + 60\text{س}^2 + 120$ (بالاشتقاق بالنسبة لـ س)

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 5\text{س}^4 - 40\text{س}^3 + 120\text{س}$

∴ $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = 20\text{س}^3 - 120\text{س}^2 + 120$ (1)

∴ $\frac{\text{ء}^3\text{ص}}{\text{ءس}^3} = 60\text{س}^2 - 240\text{س}$

∴ $\frac{\text{ء}^4\text{ص}}{\text{ءس}^4} = 120\text{س} - 240$ ، عندما $\frac{\text{ء}^4\text{ص}}{\text{ءس}^4} = 0$

∴ $120\text{س} - 240 = 0$ ∴ $\text{س} = 2$

بالتعويض في (1): $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = -200$

٥

① (ب) ② (جـ) ③ (أ) ④ (أ) ⑤ (جـ)

⑥ (أ) ⑦ (د) ⑧ (أ) ⑨ (جـ) ⑩ (ب)

⑪ (ب) ⑫ (د) ⑬ (أ) ⑭ (د)

٦

$\text{ص} = \text{أ}\text{س}^3 + \text{ب}\text{س}^2 + \text{جـ}\text{س} + \text{ء}$

$\text{ص}^{\prime} = 3\text{أ}\text{س}^2 + 2\text{ب}\text{س} + \text{جـ}$

$\text{ص}^{\prime\prime} = 6\text{أ}\text{س} + 2\text{ب}$

$\text{ص}^{\prime\prime} = 28$ عند $\text{س} = 1$

$28 = 6\text{أ} + 2\text{ب}$ ومنها $3\text{أ} + \text{ب} = 14$ (1)

، $\text{ص}^{\prime\prime} = 34$ عند $\text{س} = 2$

$34 = 12\text{أ} + 2\text{ب}$ ومنها $6\text{أ} + \text{ب} = 17$ (2)

بحل المعادلتين (1) ، (2) ينتج أن: $\text{أ} = 1$ ، $\text{ب} = 11$

$\text{ص}^{\prime} = 75$ عند $\text{س} = 2$

$75 = 3 \times 1 \times 4 + 2 \times 11 \times 2 + \text{جـ}$

∴ $\text{جـ} = 19$

، $\text{ص} = 8$ عند $\text{س} = 1$

$8 = 1 \times 1^3 + 11 \times 1^2 + 19 \times 1 + \text{ء}$

∴ $\text{ء} = -23$

س	ص	ص'	ص''
١	٨	٤٤	٢٨
٢	٦٧	٧٥	٣٤

٧

$\because س^٢ + ص^٢ = ١٦$ (وبالاشتقاق بالنسبة لـ س)

$\therefore ٢س + ٢ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$

(وبالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة لـ س)

$\therefore ٢ + ٢ص \times \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + \frac{ءص}{ءس} \times ٢ \times \frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\therefore ٢ + ٢ص \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + ٢\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢ = ٠$

بالقسمة على ٢ : $\therefore ص \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢ + ١ = ٠$

٨

$\because ص^٢ + أس^٣ - ب س = جـ$

(وبالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٢ص \frac{ءص}{ءس} + ٣أس^٢ - ب = صفر$

(وبالاشتقاق بالنسبة إلى س مرة أخرى)

$\therefore ٢ص \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + ٢\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢ + ٦أس = ٠$

بالقسمة على ٢

$\therefore ص \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢ + ٣أس = ٠$

٩

$ص^٢ = س^٢ - س^٣$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٢ص \frac{ءص}{ءس} = ٢س - ٣س^٢$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س مرة أخرى)

$٢ص \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + ٢ \frac{ءص}{ءس} \times \frac{ءص}{ءس} = ٢ - ٦س$

بالقسمة على ٢

$\therefore ص \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢ = ١ - ٣س$

$\therefore ص \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢ + ٣س = ١$

١٠

$٤ص^٣ = ٣س^٢$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ١٢ص^٢ \frac{ءص}{ءس} = ٦س \quad \therefore ٢ص^٢ \frac{ءص}{ءس} = س$

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$\therefore ٤ص \frac{ءص}{ءس} \times \frac{ءص}{ءس} + ٢ص^٢ \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ١$

$\therefore ٤ص \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢ + ٢ص^٢ \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ١$

١١

$\because س^٣ + ص^٣ = ١$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٣س^٢ + ٣ص^٢ ص' = ٠$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س مرة أخرى)

$\therefore ٦س + ٣(٢ص ص' \times ص' + ص^٢ ص'') = ٠$

بالقسمة على ٣

$\therefore ص^٢ ص'' + ٢ص {ص'}^٢ + ٢س = ٠$

١٢

$\because س^٣ ص^٣ = ١ \qquad \therefore س ص = ١$

$\therefore س \frac{ءص}{ءس} + ص = ٠ \qquad \therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-ص}{س}$

$\therefore س \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + \frac{ءص}{ءس} + \frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\therefore س \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + ٢ \frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\therefore س \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٢ \times \frac{ص}{س} \qquad \therefore س^٢ \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٢ص$

حل آخر :

$\because س ص = ١ \qquad \therefore ص = س^{-١}$

$\therefore ص' = -س^{-٢} \qquad \therefore ص'' = ٢س^{-٣}$

$\therefore س^٢ \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = س^٢ \times ٢س^{-٣} = \frac{٢}{س} = ٢ص$

١٣

$\because س^٢ ص = ٢س + ٥$ (بالاشتقاق بالنسبة الى س)

$\therefore س^٢ \frac{ءص}{ءس} + ٢س ص = ٢$

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$\therefore س^٢ \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + ٢س \frac{ءص}{ءس} + ٢س \frac{ءص}{ءس} + ٢ص = ٠$

$\therefore س^٢ \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + ٤س \frac{ءص}{ءس} + ٢ص = ٠$

١٤

$\because ص^٢ = س \qquad \therefore ٢ص \frac{ءص}{ءس} = ١$

$\therefore ص \frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢}$

(وبالاشتقاق بالنسبة إلى س مرة أخرى)

$\therefore ص \times \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + \frac{ءص}{ءس} \times \frac{ءص}{ءس} = ٠$

وبالضرب × ص

$\therefore ص^٢ \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + ص \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢ = ٠$

$\therefore س \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + ص \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢ = ٠$

١٥

$\because ٢س ص + ٣ = ٥س^٢$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٢\left(س \frac{ءص}{ءس} + ص\right) = ١٠س$

(وبالاشتقاق بالنسبة إلى س مرة أخرى)

$\therefore ٢\left[س \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + \frac{ءص}{ءس} + \frac{ءص}{ءس}\right] = ١٠$

$\therefore س \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + ٢ \frac{ءص}{ءس} = ٥$

١٦

$\because ص^٢ = ١ - س^{-٢}$ (وبالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٢ص \frac{ءص}{ءس} = ٢س^{-٣} \quad \therefore ص \frac{ءص}{ءس} = س^{-٣}$

(وبالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$\therefore ص \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + \frac{ءص}{ءس} \times \frac{ءص}{ءس} = -٣س^{-٤}$

$\therefore ص \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢ + \frac{٣}{س^٤} = صفر$

١٧

$٣ص^٤ = ٤س^٣$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ١٢ص^٣ \frac{ءص}{ءس} = ١٢س^٢$

(بالقسمة على ١٢) $\therefore ص^٣ \frac{ءص}{ءس} = س^٢$

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$\therefore ٣ص^٢ \frac{ءص}{ءس} \times \frac{ءص}{ءس} + ص^٣ \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٢س$

$\therefore ص^٣ \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + ٣ص^٢ \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢ = ٢س$

(بالقسمة ÷ $ص^٢$)

$\therefore ص \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + ٣\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢ = \frac{٢س}{ص^٢}$

١٨

$ص = س^{-١}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = -س^{-٢}$ (بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$\therefore \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٢س^{-٣}$

$\therefore س^٢ \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + ٣س \frac{ءص}{ءس} + ص$

$= س^٢ (٢س^{-٣}) + ٣س(-س^{-٢}) + س^{-١}$

$= ٢س^{-١} - ٣س^{-١} + س^{-١} = صفر$

١٩

$(١ + س) ص = س^{٢}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore (١ + س) \frac{ءص}{ءس} + ص = ٢ س$

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$\therefore (١ + س) \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} + \frac{ءص}{ءس} + \frac{ءص}{ءس} = ٢$

$\therefore (١ + س) \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} + ٢ \frac{ءص}{ءس} = ٢$

٢٠

$ص^{٢} + س^{٢} ص^{٢} = ٨$

$\therefore ص^{٢} (١ + س^{٢}) = ٨$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٢ ص \frac{ءص}{ءس} \times (١ + س^{٢}) + ص^{٢} (٢ س) = صفر$

(بالقسمة على ٢ ص)

$\therefore (١ + س^{٢}) \frac{ءص}{ءس} + س ص = صفر$

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$(١ + س^{٢}) \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} + \frac{ءص}{ءس} (٢ س) + س \frac{ءص}{ءس} + ص = ٠$

$(س^{٢} + ١) \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} + ٣ س \frac{ءص}{ءس} + ص = ٠$

٢١

$\because ٤ س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٨ س + ٢ ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$ (بالقسمة على ٢)

$\therefore ٤ س + ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$ (١)

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-٤ س}{ص}$ (٢)

وبالاشتقاق للعلاقة (١) مرة أخرى بالنسبة إلى س

$\therefore ٤ + \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٢} + ص \times \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ٠$ (٣)

ثم نعوض من (٢) فى (٣)

$\therefore ٤ + \frac{١٦ س^{٢}}{ص^{٢}} + ص \times \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ٠$

(بالضرب × $ص^{٢}$)

$\therefore ٤ ص^{٢} + ١٦ س^{٢} + ص^{٣} \times \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ٠$

$\therefore ٤ (ص^{٢} + ٤ س^{٢}) + ص^{٣} \times \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ٠$

$\therefore ٤ \times ٢٥ + ص^{٣} \times \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ٠$

$\therefore ص^{٣} \times \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} + ١٠٠ = ٠$

٢٢

$س + ص = س ص \qquad \therefore س = س ص - ص$

$\therefore س = ص (س - ١)$ (١)

$\therefore ص = \frac{س}{س - ١}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{(س - ١) - س}{(س - ١)^{٢}} = \frac{-١}{(س - ١)^{٢}}$

$= -(س - ١)^{-٢}$

$\therefore \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ٢ (س - ١)^{-٣}$

، $\because$ من (١) $س - ١ = \frac{س}{ص}$

$\therefore \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ٢ \left(\frac{س}{ص}\right)^{-٣} = ٢ \left(\frac{ص}{س}\right)^{٣}$

٢٣

$ص = \sqrt{٢ س + ٥}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢}{٢ \sqrt{٢ س + ٥}} = (٢ س + ٥)^{-\frac{١}{٢}}$

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = -\frac{١}{٢} (٢ س + ٥)^{-\frac{٣}{٢}} \times ٢$

$= -(٢ س + ٥)^{-\frac{٣}{٢}}$

$\frac{ء^{٣}ص}{ءس^{٣}} = \frac{٣}{٢} (٢ س + ٥)^{-\frac{٥}{٢}} \times ٢$

$= ٣ (٢ س + ٥)^{-\frac{٥}{٢}}$

الطرف الأيمن $= (٢ س + ٥) \frac{ء^{٣}ص}{ءس^{٣}} + ٣ \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$

$= (٢ س + ٥) \times ٣ (٢ س + ٥)^{-\frac{٥}{٢}}$

$+ ٣ \times - (٢ س + ٥)^{-\frac{٣}{٢}}$

$= ٣ (٢ س + ٥)^{-\frac{٣}{٢}} - ٣ (٢ س + ٥)^{-\frac{٣}{٢}}$

$=$ صفر

حل آخر :

$\because ص = \sqrt{٢ س + ٥} \qquad \therefore ص^{٢} = ٢ س + ٥$

$\therefore ٢ ص ص' = ٢ \qquad \therefore ص ص' = ١$

$\therefore ص ص'' + ص'^{٢} = ٠$

$\therefore ص ص''' + ص' ص'' + ٢ ص' ص'' = ٠$

$\therefore ص ص''' + ٣ ص' ص'' = ٠$ (بالضرب × ص)

$\therefore ص^{٢} ص''' + ٣ ص ص' ص'' = ٠$

، $\because ص ص' = ١ \quad \therefore (٢ س + ٥) ص''' + ٣ ص'' = ٠$

$\therefore (٢ س + ٥) \frac{ء^{٣}ص}{ءس^{٣}} + ٣ \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ٠$

٢٤

$ص = \frac{س}{\sqrt{س^{٢} + ١}}$

$\therefore ص \sqrt{س^{٢} + ١} = س$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$ص \times \frac{س}{\sqrt{س^{٢} + ١}} + \sqrt{س^{٢} + ١} \times \frac{ءص}{ءس} = ١$

بالضرب × $\sqrt{س^{٢} + ١}$

$س ص + (س^{٢} + ١) \frac{ءص}{ءس} = \sqrt{س^{٢} + ١}$

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$س \frac{ءص}{ءس} + ص + (س^{٢} + ١) \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} + \frac{ءص}{ءس} (٢ س)$

$= \frac{س}{\sqrt{س^{٢} + ١}}$

$(س^{٢} + ١) \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} + ٣ س \left(\frac{ءص}{ءس}\right)$

$= \frac{س}{\sqrt{س^{٢} + ١}} - ص$

$\therefore (س^{٢} + ١) ص'' + ٣ س ص' = صفر$

٢٥

$ص \sqrt{١ + س^{٢}} = ١$ (بتربيع الطرفين)

$(١ + س^{٢}) ص^{٢} = ١$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$(١ + س^{٢}) \times ٢ ص \frac{ءص}{ءس} + ص^{٢} (٢ س) = ٠$

(بالقسمة ÷ (٢ ص))

$(١ + س^{٢}) \frac{ءص}{ءس} + س ص = ٠$

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$(١ + س^{٢}) \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} + \frac{ءص}{ءس} (٢ س) + س \frac{ءص}{ءس} + ص = ٠$

$\therefore (١ + س^{٢}) \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} + ٣ س \frac{ءص}{ءس} + ص = ٠$

٢٦

$ص^{٢} = \sqrt{٤ س + ١}$ (بتربيع الطرفين)

$ص^{٤} = ٤ س + ١$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$٤ ص^{٣} \frac{ءص}{ءس} = ٤ \qquad ص^{٣} \frac{ءص}{ءس} = ١$

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$٣ ص^{٢} \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٢} + ص^{٣} \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = صفر$

(بالقسمة على $ص^{٢}$)

$٣ \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٢} + ص \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = صفر$

٢٧

$ص^{٣} = ٣ س^{٤} - ٣ س^{٢} + ٥$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٣ ص^{٢} \frac{ءص}{ءس} = ١٢ س^{٣} - ٦ س$ (بالقسمة على ٣)

$\therefore ص^{٢} \frac{ءص}{ءس} = ٤ س^{٣} - ٢ س$

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$ص^{٢} \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} + ٢ ص \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٢} = ١٢ س^{٢} - ٢$

$ص^{٢} \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} + ٢ ص \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٢} + ٢ = ١٢ س^{٢}$

٢٨

∵ $\frac{ءص}{ءس}$ = − جا س ، $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = − جتا س

∴ الطرف الأيمن

= (− جا س)^٢ − جتا س (− جتا س)

= جا^٢ س + جتا^٢ س = ١ = الطرف الأيسر

٢٩

∵ ص = ٢ جتا (٣ س + ١)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = −٦ جا (٣ س + ١)

∴ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = −١٨ جتا (٣ س + ١)

= −٩ × ٢ جتا (٣ س + ١) = −٩ ص

∴ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + ٩ ص = ٠

٣٠

ص = ظا س

$\frac{ءص}{ءس}$ = قا^٢ س

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = ٢ قا س . قا س ظا س = ٢ قا^٢ س ظا س (١)

∵ ٢ ص (١ + ص^٢) = ٢ ظا س × (١ + ظا^٢ س)

= ٢ ظا س × قا^٢ س (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

∴ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = ٢ ص (١ + ص^٢)

٣١

ص س = ١٠ − جتا س (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ص + س $\frac{ءص}{ءس}$ = جا س

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ + س $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + $\frac{ءص}{ءس}$ = جتا س

∴ س $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + ٢ $\frac{ءص}{ءس}$ = جتا س

٣٢

∵ ص = قا س ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = قا س ظا س

∴ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = قا س قا^٢ س + قا س ظا س ظا س

= قا^٣ س + قا س ظا^٢ س

= قا س (قا^٢ س + ظا^٢ س)

∴ ص $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢$

= قا س . قا س (قا^٢ س + ظا^٢ س) + قا^٢ س ظا^٢ س

= قا^٢ س (قا^٢ س + ٢ ظا^٢ س)

= قا^٢ س (٣ قا^٢ س − ٢) = ص^٢ (٣ ص^٢ − ٢)

٣٣

ص = جا ٢ س ∵ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ جتا ٢ س

، $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = −٤ جا ٢ س ، $\frac{ء^٣ص}{ءس^٣}$ = −٨ جتا ٢ س

① ٤ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢$ + $\left(\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}\right)^٢$

= ٤ (٢ جتا ٢ س)^٢ + (−٤ جا ٢ س)^٢

= ١٦ جتا^٢ ٢ س + ١٦ جا^٢ ٢ س = ١٦ × ١ = ١٦

② $\frac{ء^٣ص}{ءس^٣}$ + ٤ $\frac{ءص}{ءس}$

= −٨ جتا ٢ س + ٤ (٢ جتا ٢ س)

= −٨ جتا ٢ س + ٨ جتا ٢ س = صفر

٣٤

ص = جا ٣ س + جتا ٣ س

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ جتا ٣ س − ٣ جا ٣ س

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = −٩ جا ٣ س − ٩ جتا ٣ س

$\frac{ء^٣ص}{ءس^٣}$ = −٢٧ جتا ٣ س + ٢٧ جا ٣ س

$\frac{ء^٤ص}{ءس^٤}$ = ٨١ جا ٣ س + ٨١ جتا ٣ س

① $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + ٩ ص

= −٩ جا ٣ س − ٩ جتا ٣ س

+ ٩ (جا ٣ س + جتا ٣ س) = صفر

② $\frac{ء^٤ص}{ءس^٤}$ = ٨١ جا ٣ س + ٨١ جتا ٣ س

= ٨١ (جا ٣ س + جتا ٣ س) = ٨١ ص

٣٥

ص = س جا س

$\frac{ءص}{ءس}$ = س جتا س + جا س

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = − س جا س + جتا س + جتا س

= − س جا س + ٢ جتا س

$\frac{ء^٣ص}{ءس^٣}$ = − س جتا س − جا س − ٢ جا س

= − س جتا س − ٣ جا س

① $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + ص

= − س جا س + ٢ جتا س + س جا س = ٢ جتا س

② س $\frac{ء^٣ص}{ءس^٣}$ + س $\frac{ءص}{ءس}$ + ٢ ص

= س (− س جتا س − ٣ جا س)

+ س (س جتا س + جا س) + ٢ (س جا س)

= − س^٢ جتا س − ٣ س جا س + س^٢ جتا س

+ س جا س + ٢ س جا س = صفر

③ دً (− س) = ٢ جتا (− س) − (− س) جا (− س)

= ٢ جتا س − س جا س = دً (س)

∴ دً (س) دالة زوجية.

٣٦

ص = $\frac{ع - ١}{ع}$ ، ع = س^٢ − ١

∴ ص = $\frac{س^٢ - ٢}{س^٢ - ١}$

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{(س^٢ - ١)(٢ س) - (س^٢ - ٢)(٢ س)}{(س^٢ - ١)^٢}$

= $\frac{٢ س}{(س^٢ - ١)^٢}$

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = $\frac{٢ (س^٢ - ١)^٢ - ٢ س × [٢ (س^٢ - ١) (٢ س)]}{(س^٢ - ١)^٤}$

= $\frac{(س^٢ - ١)(٢ س^٢ - ٢ - ٨ س^٢)}{(س^٢ - ١)^٤}$

= $\frac{-٢ - ٦ س^٢}{(س^٢ - ١)^٣}$

$\left(\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}\right)_{س = ٠}$ = ٢

٣٧

ص = $\sqrt{ع + ١}$ ، ع = س^٢ − ١٠

$\frac{ءص}{ءع}$ = $\frac{١}{٢ \sqrt{ع + ١}}$ ، $\frac{ءع}{ءس}$ = ٢ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ءص}{ءع}$ × $\frac{ءع}{ءس}$ = $\frac{س}{\sqrt{ع + ١}}$ = $\frac{س}{\sqrt{س^٢ - ٩}}$

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = $\frac{\sqrt{س^٢ - ٩} - س × \frac{س}{\sqrt{س^٢ - ٩}}}{س^٢ - ٩}$

$\left(\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}\right)_{س = ٥}$ = $\frac{٤ - ٥ × \frac{٥}{٤}}{١٦}$ = $\frac{-٩}{٦٤}$

٣٨

ص = ظا ع ، ع = ١٠ س + ٥

$\frac{ءص}{ءع}$ = قا^٢ ع ، $\frac{ءع}{ءس}$ = ١٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ءص}{ءع}$ × $\frac{ءع}{ءس}$

= ١٠ قا^٢ ع = ١٠ قا^٢ (١٠ س + ٥)

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = ٢٠ قا (١٠ س + ٥)

× قا (١٠ س + ٥) ظا (١٠ س + ٥) × ١٠

= ٢٠٠ قا^٢ (١٠ س + ٥) ظا (١٠ س + ٥)

٣٩

$ص = س^{٣} + ٢ \quad ، \quad ع = س^{٢} + ٣$

$\therefore \frac{دص}{دس} = ٣س^{٢} \quad ، \quad \frac{دع}{دس} = ٢س$

$\frac{دع}{دص} = \frac{دع}{دس} \div \frac{دص}{دس} = \frac{٢س}{٣س^{٢}} = \frac{٢}{٣} س^{-١}$

$\frac{د^{٢}ع}{دص^{٢}} = -\frac{٢}{٣} س^{-٢} \times \frac{دس}{دص}$

$= -\frac{٢}{٣} س^{-٢} \times \frac{١}{٣س^{٢}} = -\frac{٢}{٩} س^{-١}$

$\left(\frac{د^{٢}ع}{دص^{٢}}\right)_{س = \frac{١}{٢}} = -\frac{٢}{٩} \left(\frac{١}{٢}\right)^{-١} = -١٨$

٤٠

$س = ٣ن^{٢} - ١ \quad ، \quad \frac{دس}{دن} = ٦ن$

$، ص = ن^{٣} + ٢ \quad ، \quad \frac{دص}{دن} = ٣ن^{٢}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \div \frac{دس}{دن} = \frac{٣ن^{٢}}{٦ن} = \frac{١}{٢} ن$

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = \frac{١}{٢} \times \frac{دن}{دس} = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٦ن} = \frac{١}{١٢ن}$

$\left(\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}\right)_{ن = ٤} = \frac{١}{٤٨}$

٤١

$س = ٢ن^{٣} + ٣ \quad ، \quad \frac{دس}{دن} = ٦ن^{٢}$

$ص = ن^{٤} \quad ، \quad \frac{دص}{دن} = ٤ن^{٣}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \div \frac{دس}{دن} = \frac{٤ن^{٣}}{٦ن^{٢}} = \frac{٢}{٣} ن$

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = \frac{٢}{٣} \times \frac{دن}{دس} = \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٦ن^{٢}} = \frac{١}{٩ن^{٢}}$

$\left(\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}\right)_{ن = ١} = \frac{١}{٩}$

٤٢

$س = ع^{٢} - ٢ع \quad \therefore \frac{دس}{دع} = ٢ع - ٢$

$، ص = ع^{٢} \quad \therefore \frac{دص}{دع} = ٢ع$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \div \frac{دس}{دع} = \frac{٢ع}{٢ع - ٢} = \frac{ع}{ع - ١}$

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = \frac{(ع - ١)(١) - ع(١)}{(ع - ١)^{٢}} \times \frac{دع}{دس}$

$= \frac{-١}{(ع - ١)^{٢}} \times \frac{١}{٢ع - ٢} = \frac{-١}{٢(ع - ١)^{٣}}$

$= -\frac{١}{٢}(ع - ١)^{-٣}$

$\left(\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}\right)_{ع = ٢} = -\frac{١}{٢}$

$\frac{د^{٣}ص}{دس^{٣}} = \frac{٣}{٢}(ع - ١)^{-٤} \times \frac{دع}{دس}$

$= \frac{٣}{٢}(ع - ١)^{-٤} \times \frac{١}{٢ع - ٢} = \frac{٣}{٤}(ع - ١)^{-٥}$

$\left(\frac{د^{٣}ص}{دس^{٣}}\right)_{ع = ٢} = \frac{٣}{٤}$

٤٣

$\frac{دع}{دس} = ١ + ٢س \quad ، \quad \frac{دص}{دس} = س^{٢} + ٣$

$\frac{دع}{دص} = \frac{دع}{دس} \div \frac{دص}{دس} = \frac{١ + ٢س}{س^{٢} + ٣}$

$\frac{د^{٢}ع}{دص^{٢}} = \frac{٢(س^{٢} + ٣) - (١ + ٢س)(٢س)}{(س^{٢} + ٣)^{٢}} \times \frac{دس}{دص}$

$= \frac{-٢س^{٢} - ٢س + ٦}{(س^{٢} + ٣)^{٢}} \times \frac{١}{س^{٢} + ٣}$

$= \frac{-٢س^{٢} - ٢س + ٦}{(س^{٢} + ٣)^{٣}}$

$\therefore \left(\frac{د^{٢}ع}{دص^{٢}}\right)_{س = ١} = \frac{١}{٣٢}$

٤٤

$ص = \frac{٢س}{\sqrt{١ + س^{٢}}} \quad ، \quad ع = \frac{\sqrt{١ + س^{٢}}}{س}$

$\therefore ص \times ع = ٢$

$\therefore ص = ٢ع^{-١}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\frac{دص}{دس} = -٢ع^{-٢} \cdot \frac{دع}{دس} = \frac{-٢}{ع^{٢}} \cdot \frac{دع}{دس}$

٤٥

$ص = \sqrt{ع} \quad ، \quad ع = ٣ - ٢ل^{٢} \quad ، \quad ل = ٤س$

$\frac{دص}{دع} = \frac{١}{٢\sqrt{ع}} \quad ، \quad \frac{دع}{دل} = -٤ل \quad ، \quad \frac{دل}{دس} = ٤$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \cdot \frac{دع}{دل} \cdot \frac{دل}{دس}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢\sqrt{ع}} \times -٤ل \times ٤ = \frac{-٨ل}{\sqrt{ع}}$

$\therefore \sqrt{ع} \, \frac{دص}{دس} = -٨ل$

$\therefore ص \times \frac{دص}{دس} = -٨ل$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ص \frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} + \frac{دص}{دس} \times \frac{دص}{دس} = -٨ \frac{دل}{دس}$

$\therefore ص \frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} + \left(\frac{دص}{دس}\right)^{٢} = -٨ \times ٤$

$ص \frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} + \left(\frac{دص}{دس}\right)^{٢} + ٣٢ = ٠$

حل آخر :

$\because ع = ٣ - ٢(٤س)^{٢} = ٣ - ٣٢س^{٢}$

$\therefore ص^{٢} = ٣ - ٣٢س^{٢}$ (بالاشتقاق بالنسبة لـ س)

$\therefore ٢ص \frac{دص}{دس} = -٦٤س$

$\therefore ص \frac{دص}{دس} + ٣٢س = ٠$

(بالاشتقاق مرة ثانية بالنسبة لـ س)

$\therefore ص \frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} + \left(\frac{دص}{دس}\right)^{٢} + ٣٢ = ٠$

٤٦

$س = قاع \quad \therefore \frac{دس}{دع} = قاع \, ظاع$

$، \sqrt{ص} = ظاع \quad \therefore ص = ظا^{٢}ع$

$\therefore \frac{دص}{دع} = ٢ ظاع \, قا^{٢}ع$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \div \frac{دس}{دع} = \frac{٢ ظاع \, قا^{٢}ع}{قاع \, ظاع} = ٢ قاع$

$\therefore \frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ٢ قاع \, ظاع \times \frac{دع}{دس}$

$= ٢ قاع \, ظاع \times \frac{١}{قاع \, ظاع} = ٢$

= الطرف الأيسر

حل آخر :

$\because س = قاع \quad \therefore س^{٢} = قا^{٢}ع$

$، \because \sqrt{ص} = ظاع \quad \therefore ص = ظا^{٢}ع$

$\because قا^{٢}ع = ١ + ظا^{٢}ع \quad \therefore س^{٢} = ١ + ص$

$\therefore \frac{دص}{دس} = ٢س \quad \therefore \frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ٢$

٤٧

(١) (ج)	(٢) (ج)	(٣) (ج)	(٤) (د)
(٥) (ج)	(٦) (ج)	(٧) (أ)	(٨) (ج)
(٩) (د)	(١٠) (ب)	(١١) (ج)	(١٢) (ب)
(١٣) (ب)	(١٤) (د)	(١٥) (ب)	(١٦) (د)
(١٧) (ج)	(١٨) (ب)	(١٩) (ب)	(٢٠) (ب)
(٢١) (أ)	(٢٢) (ج)	(٢٣) (ب)	(٢٤) (د)
(٢٥) (ج)	(٢٦) (ب)	(٢٧) (ب)	(٢٨) (أ)
(٢٩) (أ)			

٤٨

$\because س \, ص = جاس \, جتاس$

$\therefore س \, ص = \frac{١}{٢} جا٢س$

وباشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

$\therefore ١ \times ص + \frac{دص}{دس} \times س = جتا٢س$

وبالاشتقاق مرة ثانية بالنسبة إلى س

$\therefore \frac{دص}{دس} + \frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} \times س + ١ \times \frac{دص}{دس} = -٢ جا٢س$

$\therefore س \frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} + ٢ \frac{دص}{دس} + ٢ جا٢س = ٠$

$\because ٢ جا٢س = ٤ س \, ص$

$\therefore س \frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} + ٢ \frac{دص}{دس} + ٤ س \, ص = ٠$

٤٩

∵ جاس = س ص (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ جتاس = س صَ + ص (١)

∴ $\text{صَ} = \frac{\text{جتاس} - \text{ص}}{\text{س}}$

وبالاشتقاق للعلاقة (١) مرة أخرى بالنسبة إلى س

∴ − جاس = س صً + صَ + صَ

∴ − جاس = س صً + ٢ صَ

∴ − س ص = س صً + ٢ × $\left(\frac{\text{جتاس} - \text{ص}}{\text{س}}\right)$

∴ − س^2 ص = س^2 صً + ٢ جتاس − ٢ ص

∴ س^2 (ص + صً) + ٢ جتاس = ٢ ص

٥٠

ص = س ظاس (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = س قا^2س + ظاس

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ = س × ٢ قاس . قاس ظاس + قا^2س + قا^2س

= ٢ س قا^2س ظاس + ٢ قا^2س

= ٢ قا^2س (١ + س ظاس)

= ٢ (١ + ص) قا^2س

٥١

س ص = جا أ س (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

س $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ص = أ جتا أ س

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س مرة أخرى)

س $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ + $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = − أ^2 جا أ س

س $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ + ٢ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)$ = − أ^2 × س ص

∴ س $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ + ٢ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)$ + أ^2 س ص = ٠

٥٢

ص = أ جتاس^2 + ب جاس^2 (١)

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = −٢ أ س جاس^2 + ٢ ب س جتاس^2

= ٢ س (− أ جاس^2 + ب جتاس^2) (٢)

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ = ٢ (− أ جاس^2 + ب جتاس^2)

+ ٢ س (− ٢ أ س جتاس^2 − ٢ ب س جاس^2)

= ٢ (− أ جاس^2 + ب جتاس^2)

− ٤ س^2 (أ جتاس^2 + ب جاس^2)

بالتعويض فى (١) ، (٢) ينتج أن :

$\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ = $\frac{1}{\text{س}}$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ − ٤ س^2 ص (بالضرب × س)

س $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ − $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ٤ س^3 ص = ٠ .

٥٣

∵ س ص = أ ∴ ص = أ س^{-1}

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = − أ س^{-2} ، $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ = ٢ أ س^{-3}

، س = أ ص^{-1}

∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءص}}$ = − أ ص^{-2} ، $\frac{\text{ء}^2\text{س}}{\text{ءص}^2}$ = ٢ أ ص^{-3}

∴ $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ × $\frac{\text{ء}^2\text{س}}{\text{ءص}^2}$ = ٢ أ س^{-3} × ٢ أ ص^{-3}

= ٤ أ^2 س^{-3} ص^{-3}

= ٤ أ^2 (أ^{-3}) = $\frac{4}{\text{أ}}$

، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ × $\frac{\text{ءس}}{\text{ءص}}$ = ١

، ∵ $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ × $\frac{\text{ء}^2\text{س}}{\text{ءص}^2}$ > $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ × $\frac{\text{ءس}}{\text{ءص}}$

∴ $\frac{4}{\text{أ}}$ > ١ ∴ ٤ > أ

∴ أ ∈]٠ ، ٤[

٥٤

ص = أ س^3 + ب س^2

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣ أ س^2 + ٢ ب س

$\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ = ٦ أ س + ٢ ب $\frac{\text{ء}^3\text{ص}}{\text{ءس}^3}$ = ٦ أ

∴ ٦ أ = ١٢   ∴ أ = ٢

، $(\text{٦ أ س + ٢ ب})_{\text{س} = 1}$ = ٦

∴ ٦ أ + ٢ ب = ٦   ∴ ب = −٣

٥٥

بفرض أن : د (س) = س^3 + أ س^2 + ب س + جـ

∴ دَ (س) = ٣ س^2 + ٢ أ س + ب

∴ دً (س) = ٦ س + ٢ أ

∴ س^3 + (أ + ٣) س^2 + (٢ أ + ب + ٦) س

+ ٢ أ + ب + جـ

= س^3 + ٧ س^2 + ٩ س − ٢

∴ أ + ٣ = ٧   ∴ أ = ٤

٢ أ + ب + ٦ = ٩   ∴ ب = −٥

٢ أ + ب + جـ = −٢   ∴ جـ = −٥

∴ د (س) = س^3 + ٤ س^2 −٥ س − ٥

٥٦

ص = أ $\text{س}^{\text{ن}}$ + ب $\text{س}^{-\text{ن}+1}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ن أ $\text{س}^{\text{ن}-1}$ + ب (− ن + ١) $\text{س}^{-\text{ن}}$

$\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ = ن (ن − ١) أ $\text{س}^{\text{ن}-2}$

+ ب (− ن + ١) (− ن) $\text{س}^{-\text{ن}-1}$

(بالضرب × س^2)

س^2 $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ = ن (ن − ١) أ $\text{س}^{\text{ن}}$

+ ب (ن − ١)(ن) $\text{س}^{-\text{ن}+1}$

= ن (ن − ١) [أ $\text{س}^{\text{ن}}$ + ب $\text{س}^{-\text{ن}+1}$]

= ن (ن − ١) ص

٥٧

ص = أ جاس + ب جتاس

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = أ جتاس − ب جاس

$\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ = − أ جاس − ب جتاس

$\frac{\text{ء}^3\text{ص}}{\text{ءس}^3}$ = − أ جتاس + ب جاس

$\frac{\text{ء}^4\text{ص}}{\text{ءس}^4}$ = أ جاس + ب جتاس

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + $\frac{\text{ء}^3\text{ص}}{\text{ءس}^3}$

= (أ جتاس − ب جاس) + (− أ جتاس + ب جاس)

= صفر (١)

$\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ + $\frac{\text{ء}^4\text{ص}}{\text{ءس}^4}$

= (− أ جاس − ب جتاس) + (أ جاس + ب جتاس)

= صفر (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + $\frac{\text{ء}^3\text{ص}}{\text{ءس}^3}$ = $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ + $\frac{\text{ء}^4\text{ص}}{\text{ءس}^4}$

٥٨

ص = د (ع) ، ع = ر (س)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$ = دَ (ع) ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ = رَ (س)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$. $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = دَ (ع) . رَ (س)

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ = دَ (ع) . رً (س) + رَ (س) دً (ع) × $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

= دَ (ع) . رً (س) + رَ (س) دً (ع) × رَ (س)

= دً (ع) [رَ (س)]^2 + رً (س) . دَ (ع)

٥٩

$ص = \frac{س - ١}{س + ١}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{(س + ١) - (س - ١)}{(س + ١)^{٢}} = \frac{٢}{(س + ١)^{٢}} = ٢ (س + ١)^{-٢}$

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = -٢ × ٢ (س + ١)^{-٣} = \frac{-٢ \,|\underline{٢}}{(س + ١)^{٣}}$

$\frac{ء^{٣}ص}{ءس^{٣}} = ٢ × ٢ × ٣ (س + ١)^{-٤} = \frac{٢ \,|\underline{٣}}{(س + ١)^{٤}}$

$\frac{ء^{٤}ص}{ءس^{٤}} = -٢ × ٢ × ٣ × ٤ (س + ١)^{-٥} = \frac{-٢ \,|\underline{٤}}{(س + ١)^{٥}}$

$∴ \frac{ء^{ن}ص}{ءس^{ن}} = \frac{(-١)^{ن-١} × ٢ \,|\underline{ن}}{(س + ١)^{ن+١}}$

٦٠

$ص = جا أس$

$صَ = أ جتا أس = أ جا (أس + \frac{π}{٢})$

، $صً = -أ^{٢} جا أس = أ^{٢} جا (أس + π)$

، $ص''' = -أ^{٣} جتا أس = أ^{٣} جا (أس + \frac{٣π}{٢})$

، $ص^{(٤)} = أ^{٤} جا أس = أ^{٤} جا (أس + ٢π)$

$∴ ص^{(ن)} = أ^{ن} جا (أس + \frac{نπ}{٢})$

$∴ ص^{(١٥)} = أ^{١٥} جا (أس + \frac{١٥π}{٢})$

$= أ^{١٥} جا (أس + \frac{٣π}{٢}) = -أ^{١٥} جتا أس$

$ص^{(٢٠٢٠)} = أ^{٢٠٢٠} جا (أس + \frac{٢٠٢٠π}{٢})$

$= أ^{٢٠٢٠} جا (أس) = أ^{٢٠٢٠} ص$

٦١

$ص = جتا أس$

$صَ = -أ جا أس = أ جتا (أس + \frac{π}{٢})$

، $صً = -أ^{٢} جتا أس = أ^{٢} جتا (أس + π)$

، $ص''' = أ^{٣} جا أس = أ^{٣} جتا (أس + \frac{٣π}{٢})$

، $ص^{(٤)} = أ^{٤} جا أس = أ^{٤} جا (أس + ٢π)$

$∴ ص^{(ن)} = أ^{ن} جا (أس + \frac{نπ}{٢})$

$∴ ص^{(٢٥)} = أ^{٢٥} جا (أس + \frac{٢٥π}{٢})$

$= أ^{٢٥} جا (أس + \frac{π}{٢}) = أ^{٢٥} جتا أس$

$ص^{(٢٠١٦)} = أ^{٢٠١٦} جا (أس + \frac{٢٠١٦π}{٢})$

$= أ^{٢٠١٦} جا (أس) = أ^{٢٠١٦} ص$

٦٢

$جا ص + جتا ٢س = ٠$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$جتا ص \frac{ءص}{ءس} - ٢ جا ٢س = ٠$

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$جتا ص \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} + \frac{ءص}{ءس} × - جا ص × \frac{ءص}{ءس} - ٤ جتا ٢س = ٠$

(بالقسمة على جتا ص)

$∴ \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} - (\frac{ءص}{ءس})^{٢} ظا ص = ٤ جتا ٢س قا ص$

٦٣

$جا ٢س - جتا ٣ص = ٠$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$٢ جتا ٢س + ٣ جا ٣ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$-٤ جا ٢س + ٩ جتا ٣ص (\frac{ءص}{ءس})^{٢}$

$+ \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} (٣ جا ٣ص) = ٠$

(بالقسمة على جتا ٣ص)

$\frac{-٤ جا ٢س}{جتا ٣ص} + ٩ (\frac{ءص}{ءس})^{٢} + \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} (٣ ظا ٣ص) = ٠$

(ولكن جا ٢س = جتا ٣ص)

$∴ ٣ ظا ٣ص \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} + ٩ (\frac{ءص}{ءس})^{٢} - ٤ = ٠$

٦٤

$ص = ظا^{٢} س$

$\frac{ءص}{ءس} = ٢ ظا س قا^{٢} س$

$= ٢ ظا س (١ + ظا^{٢} س)$

$= ٢ ظا س + ٢ ظا^{٣} س$

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ٢ قا^{٢} س + ٦ ظا^{٢} س قا^{٢} س$

$= ٢ (١ + ص) + ٦ ص (١ + ص)$

$= ٢ (١ + ص) (١ + ٣ص)$

$∴ \frac{١}{٢} \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = (١ + ص) (١ + ٣ص)$

٦٥

① (أ) ② (ب) ③ (د) ④ (أ)

⑤ (جـ) ⑥ (د) ⑦ (جـ)

إرشادات لحل رقم ٦٥

① $∵ ص = ١ + \frac{س}{|\underline{١}} + \frac{س^{٢}}{|\underline{٢}} + \frac{س^{٣}}{|\underline{٣}} + ...$ إلى ∞

$∴ صَ =$ صفر $+ \frac{١}{|\underline{١}} + \frac{٢س}{|\underline{٢}} + \frac{٣س^{٢}}{|\underline{٣}} + ...$ إلى ∞

$= ١ + \frac{س}{|\underline{١}} + \frac{س^{٢}}{|\underline{٢}} + ...$ إلى ∞

$∴ صَ = ص$ $∴ صً = صَ = ص$

$∴ ٥ صً - ٢ صَ - ٣ ص$

$= ٥ ص - ٢ ص - ٣ ص =$ صفر

② $∵ د(س + هـ) - د(س) = ٥ س^{٢} هـ + هـ^{٢}$

$= هـ (٥ س^{٢} + هـ)$

$∴ \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ} = ٥ س^{٢} + هـ$

$∴ \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \leftarrow ٠} (٥ س^{٢} + هـ)$

$∴ دَ(س) = ٥ س^{٢}$ $∴ دً(س) = ١٠ س$

$∴ د'''(س) = ١٠$ $∴ \frac{ء^{٣}ص}{ءس^{٣}} = ١٠$

③ $∵ (د \circ ر)(س) = د(ر(س)) = [ر(س)]^{٢}$

$∴ (د \circ ر)َ(س) = ٢ ر(س) × رَ(س)$

$∴ (د \circ ر)ً(س) = ٢ ر(س) × رً(س)$

$+ ٢ [رَ(س)]^{٢}$

$∴ (د \circ ر)ً(٢) = ٢ ر(٢) × رً(٢) + ٢ [رَ(٢)]^{٢}$

$= ٢ × ٣ × ٥ + ٢ × (-٢)^{٢} = ٣٨$

④ $∵ \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{دَ(١) - دَ(١ + هـ)}{٢ هـ} = ٢١$

$∴ -\frac{١}{٢} \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{دَ(١ + هـ) - دَ(١)}{هـ} = ٢١$

$∴ -\frac{١}{٢} × دً(١) = ٢١$

$∴ دً(١) = -٤٢$ ، $∵ د(س) = ٢ س^{٤} - أ س^{٣}$

$∴ دَ(س) = ٨ س^{٣} - ٣ أ س^{٢}$

، $دً(س) = ٢٤ س^{٢} - ٦ أ س$

$∴ ٢٤ × ١ - ٦ أ × ١ = -٤٢$ $∴ أ = ١١$

⑤ $∵ \sqrt{ص + س} + \sqrt{ص - س} = ك$

$∴ \frac{صَ + ١}{٢ \sqrt{ص + س}} + \frac{صَ - ١}{٢ \sqrt{ص - س}} =$ صفر

بالضرب في $(٢ \sqrt{ص + س} \sqrt{ص - س})$

$∴ (صَ + ١) \sqrt{ص - س}$

$+ (صَ - ١) \sqrt{ص + س} =$ صفر

$∴ صَ (\sqrt{ص + س} + \sqrt{ص - س})$

$= \sqrt{ص + س} - \sqrt{ص - س}$

$∴ صَ = \frac{\sqrt{ص + س} - \sqrt{ص - س}}{\sqrt{ص + س} + \sqrt{ص - س}}$

بالضرب في مرافق البسط

$∴ صَ = \frac{(\sqrt{ص + س} - \sqrt{ص - س})(\sqrt{ص + س} - \sqrt{ص - س})}{(\sqrt{ص + س} + \sqrt{ص - س})(\sqrt{ص + س} - \sqrt{ص - س})}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{(\text{ص} + \text{س}) - (\text{ص} - \text{س})}{\left(\sqrt{\text{ص} + \text{س}} + \sqrt{\text{ص} - \text{س}}\right)^{٢}}$

$= \frac{٢\,\text{س}}{\text{ع}^{٢}} = \frac{٢}{\text{ع}^{٢}}\,\text{س}$

$\therefore \text{ص}'' = \frac{٢}{\text{ع}^{٢}}$

⑥ $\because \frac{\text{ء}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{ءس}^{\text{ن}}} = ٢^{\text{ن}} \times \text{ص}$ ، $\text{ص} = \text{جا}\,٢\,\text{س}$

$\therefore$ ن تقبل القسمة على ٤

⑦ $\because \text{ص} = \text{أ}\,\text{س}^{\text{ن}} - \text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}+١} + ٥$

$\therefore \frac{\text{ء}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{ءس}^{\text{ن}}} = \text{أ}\,\underline{|\text{ن}} - \text{ب}\,\underline{|\text{ن}+١}\,\text{س}$ وهى دالة خطية ميلها سالب وتقطع جزءًا موجبًا من محور الصادات

$\therefore$ يمثلها الشكل رقم (جـ)

٦٦

$\text{ص} = \left(\text{س} + \sqrt{١ + \text{س}^{٢}}\right)^{٥}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٥\left(\text{س} + \sqrt{١ + \text{س}^{٢}}\right)^{٤}\left(١ + \frac{\text{س}}{\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}}\right)$

$= ٥\left(\text{س} + \sqrt{١ + \text{س}^{٢}}\right)^{٤}\left(\frac{\sqrt{١ + \text{س}^{٢}} + \text{س}}{\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}}\right)$

$= \frac{٥\left(\text{س} + \sqrt{١ + \text{س}^{٢}}\right)^{٥}}{\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}} = \frac{٥\,\text{ص}}{\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٥\,\text{ص}}{\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}}$ (١)

$\therefore \sqrt{١ + \text{س}^{٢}}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٥\,\text{ص}$

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$\therefore \sqrt{١ + \text{س}^{٢}}\,\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} + \frac{\text{س}}{\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٥\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

ومن (١) : $\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}\,\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} + \frac{\text{س}}{\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

$= ٥ \times \frac{٥\,\text{ص}}{\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}}$

(بالضرب × $\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}$)

$(١ + \text{س}^{٢})\,\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} + \text{س}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - ٢٥\,\text{ص} = \text{صفر}$

٦٧

$\text{س} = \text{جا}\,\text{ص}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$١ = \text{جتا}\,\text{ص}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$\text{صفر} = -\text{جا}\,\text{ص}\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^{٢} + \text{جتا}\,\text{ص}\,\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$

$\therefore \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = \text{جا}\,\text{ص}\left(\frac{١}{\text{جتا}\,\text{ص}}\right)^{٢} \times \frac{١}{\text{جتا}\,\text{ص}} = \frac{\text{جا}\,\text{ص}}{\text{جتا}^{٣}\,\text{ص}}$

(ولكن $\text{جتا}^{٢}\,\text{ص} + \text{جا}^{٢}\,\text{ص} = ١$)

$\therefore \text{جتا}^{٢}\,\text{ص} = ١ - \text{س}^{٢}$ $\quad\therefore \text{جتا}\,\text{ص} = \sqrt{١ - \text{س}^{٢}}$

$\therefore \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = \frac{\text{جا}\,\text{ص}}{\text{جتا}^{٣}\,\text{ص}} = \frac{\text{س}}{(١ - \text{س}^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}$

٦٨

$\text{ص} = \frac{\text{أ}\,\text{س} + \text{ب}}{\text{جـ}\,\text{س} + \text{ء}}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{جـ}\,\text{س} + \text{ء})(\text{أ}) - (\text{أ}\,\text{س} + \text{ب})(\text{جـ})}{(\text{جـ}\,\text{س} + \text{ء})^{٢}}$

$= \frac{\text{أء} - \text{ب}\,\text{جـ}}{(\text{جـ}\,\text{س} + \text{ء})^{٢}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (\text{أء} - \text{ب}\,\text{جـ})(\text{جـ}\,\text{س} + \text{ء})^{-٢}$

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = -٢\,\text{جـ}\,(\text{أء} - \text{ب}\,\text{جـ})(\text{جـ}\,\text{س} + \text{ء})^{-٣}$

$\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}} = ٦\,\text{جـ}^{٢}\,(\text{أء} - \text{ب}\,\text{جـ})(\text{جـ}\,\text{س} + \text{ء})^{-٤}$

الطرف الأيمن $= ٢\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)\left(\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}}\right)$

$= ٢\,(\text{أء} - \text{ب}\,\text{جـ})(\text{جـ}\,\text{س} + \text{ء})^{-٢}$

$\times\, ٦\,\text{جـ}^{٢}\,(\text{أء} - \text{ب}\,\text{جـ})(\text{جـ}\,\text{س} + \text{ء})^{-٤}$

$= ١٢\,\text{جـ}^{٢}\,(\text{أء} - \text{ب}\,\text{جـ})^{٢}(\text{جـ}\,\text{س} + \text{ء})^{-٦}$

الطرف الأيسر $= ٣\left(\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}\right)^{٢}$

$= ٣\left(-٢\,\text{جـ}\,(\text{أء} - \text{ب}\,\text{جـ})(\text{جـ}\,\text{س} + \text{ء})^{-٣}\right)^{٢}$

$= ١٢\,\text{جـ}^{٢}\,(\text{أء} - \text{ب}\,\text{جـ})^{٢}(\text{جـ}\,\text{س} + \text{ء})^{-٦}$

$\therefore$ الطرفان متساويان.

إجابات تمارين 4

١

نقطة التقاطع مع محور السينات : نضع ص = ٠

$\therefore \text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} - ٨ = ٠$

$(\text{س} - ٤)(\text{س} + ٢) = ٠$

$\therefore \text{س} = ٤$ ومنها ص = ٠ $\quad\therefore$ النقطة (٤ ، ٠)

أ، $\text{س} = -٢$ ومنها ص = ٠ $\quad\therefore$ النقطة (−٢ ، ٠)

، $\because ٢\,\text{س} + ٢\,\text{ص}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - ٢ + ٤\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-٢\,\text{س} + ٢}{٢\,\text{ص} + ٤} = \frac{-\text{س} + ١}{\text{ص} + ٢}$

$\therefore$ ميل المماس هو :

$\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(٤ ، ٠)} = \frac{-٣}{٢}$ ، $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(-٢ ، ٠)} = \frac{٣}{٢}$

٢

$\because \text{س}^{٢} + ٣\,\text{س}\,\text{ص} + \text{ص}^{٢} = ٥$

$\therefore ٢\,\text{س} + ٣\,\text{ص} + ٣\,\text{س}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ٢\,\text{ص}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-٢\,\text{س} - ٣\,\text{ص}}{٣\,\text{س} + ٢\,\text{ص}}$

$\therefore \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(١ ، ١)} = -١$ $\quad\therefore \text{طاهـ} = -١$

$\therefore \text{هـ} = ١٣٥^{\circ}$

٣

$\text{ص}^{٣} = \text{س}^{٢}$ $\quad\therefore \text{ص} = \text{س}^{\frac{٢}{٣}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢}{٣}\,\text{س}^{-\frac{١}{٣}} = \frac{٢}{٣\sqrt[٣]{\text{س}}}$

ميل المماس عند (س = ٨) = $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س} = ٨} = \frac{١}{٣}$

$\therefore \text{طا}\,\theta = \frac{١}{٣}$ $\quad\therefore \theta \simeq ١٨^{\circ}\,٢٦'$

٤

$\because ٣\,\text{ص}^{٢} - ٦\,\text{ص} + \text{س}^{٢} = ٠$

$\therefore ٦\,\text{ص}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - ٦\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ٢\,\text{س} = ٠$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-٢\,\text{س}}{٦\,\text{ص} - ٦} = \frac{-\text{س}}{٣\,\text{ص} - ٣}$

① نجعل $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{صفر}$ $\quad\therefore \frac{-\text{س}}{٣\,\text{ص} - ٣} = ٠$

$\therefore \text{س} = ٠$ بالتعويض فى معادلة المنحنى

$\therefore ٣\,\text{ص}^{٢} - ٦\,\text{ص} = ٠$

$\therefore ٣\,\text{ص}\,(\text{ص} - ٢) = ٠$ $\quad$ ص = ٠ أ، ص = ٢

$\therefore$ النقط هى : (٠ ، ٠) أ، (٠ ، ٢)

② نجعل $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ غير معرفة $\quad\therefore ٣\,\text{ص} - ٣ = ٠$

$\therefore$ ص = ١ بالتعويض فى معادلة المنحنى

$٣ - ٦ + \text{س}^{٢} = ٠$

$\text{س}^{٢} = ٣ \Leftarrow \text{س} = \pm\sqrt{٣}$

النقط : $(\sqrt{٣} ، ١)$ ، $(-\sqrt{٣} ، ١)$

③ نجعل $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{طا}\,٤٥^{\circ} = ١$ $\quad\therefore \frac{-\text{س}}{٣\,\text{ص} - ٣} = ١$

$٣\,\text{ص} - ٣ = -\text{س}$ بالتعويض من معادلة المنحنى

$٣\,\text{ص}^{٢} - ٦\,\text{ص} + (-٣\,\text{ص} + ٣)^{٢} = ٠$

$٣\,\text{ص}^{٢} - ٦\,\text{ص} + (٩\,\text{ص}^{٢} - ١٨\,\text{ص} + ٩) = ٠$

$١٢\,\text{ص}^{٢} - ٢٤\,\text{ص} + ٩ = ٠$

$٤\,\text{ص}^{٢} - ٨\,\text{ص} + ٣ = ٠$

$(٢\,\text{ص} - ١)(٢\,\text{ص} - ٣) = ٠$

$\therefore \text{ص} = \frac{١}{٢}$ ومنها $\text{س} = \frac{٣}{٢}$ النقطة $\left(\frac{٣}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$

أ، $\text{ص} = \frac{٣}{٢}$ ومنها $\text{س} = \frac{-٣}{٢}$ النقطة $\left(\frac{-٣}{٢} ، \frac{٣}{٢}\right)$

٥

$٢\,\text{س} + \text{س}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \text{ص} + ٢\,\text{ص}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-٢\,\text{س} - \text{ص}}{\text{س} + ٢\,\text{ص}}$

، $\because$ المماس // محور الصادات

$\therefore \text{س} + ٢\,\text{ص} = ٠$ $\quad\therefore \text{س} = -٢\,\text{ص}$ (١)

وبالتعويض فى معادلة المنحنى

$\therefore ٤\,\text{ص}^{٢} - ٢\,\text{ص}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٣$

$\therefore \text{ص}^{٢} = ١$ $\quad\therefore \text{ص} = \pm ١$

ومن (١) : $\therefore \text{س} = \mp ٢$

$\therefore$ النقط هى : (٢ ، −١) ، (−٢ ، ١)

(٦)

∵ $س^٢ + ص^٢ = ٨$

∴ $٢ س + ٢ ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-س}{ص}$

∵ ميل المستقيم المعطى = -١

∴ ميل العمودى عليه = ١ ∴ $\frac{-س}{ص} = ١$

∴ ص = -س

∴ $س^٢ + (-س)^٢ = ٨$ ∴ $٢ س^٢ = ٨$

∴ س = ±٢

∴ النقط هى (٢ ، -٢) ، (-٢ ، ٢)

(٧)

∵ $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٦$ (١)

∴ $\frac{١}{٢\sqrt{س}} + \frac{١}{٢\sqrt{ص}} \frac{ءص}{ءس} = ٠$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-\sqrt{ص}}{\sqrt{س}}$ ، ∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{١}{٢}$

∴ ميل العمودى عليه = -٢

∴ $\frac{-\sqrt{ص}}{\sqrt{س}} = -٢$ ∴ $\sqrt{ص} = ٢\sqrt{س}$ (٢)

بالتعويض فى (١) : ∴ $\sqrt{س} + ٢\sqrt{س} = ٦$

∴ $٣\sqrt{س} = ٦$ ∴ $\sqrt{س} = ٢$

∴ س = ٤ ∴ $\sqrt{ص} = ٤$

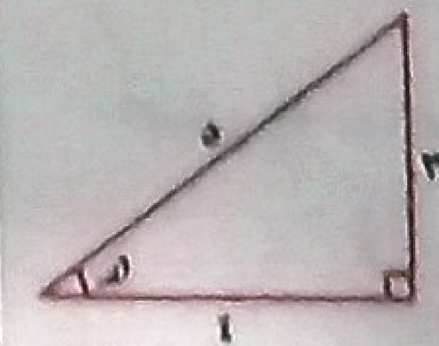
∴ ص = ١٦ ∴ النقطة (٤ ، ١٦)

(٨)

∵ $ص^٢ - س^٢ = ٧$ (١)

∴ $٢ ص \frac{ءص}{ءس} - ٢ س = ٠$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{س}{ص}$

، ∵ جتا هـ = $\frac{٤}{٥}$



∴ الميل = ظا هـ = $\frac{٣}{٤}$

∴ $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٤}$

س = $\frac{٣}{٤}$ ص (٢)

من (٢) فى (١) : $ص^٢ - (\frac{٣}{٤} ص)^٢ = ٧$

∴ $\frac{٧}{١٦} ص^٢ = ٧$ ∴ $ص^٢ = ١٦$ ∴ ص = ±٤

∴ ص = ٤ ومنها س = ٣ ∴ النقطة (٣ ، ٤)

أ، ص = -٤ ومنها س = -٣ ∴ النقطة (-٣ ، -٤)

(٩)

∵ ص = ظا س ∴ $\frac{ءص}{ءس} = قا^٢ س$

(١) ميل المستقيم = ٢ ∴ $قا^٢ س = ٢$

∴ قا س = $\pm\sqrt{٢}$ ∴ جتا س = $\pm\frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ جتا س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ومنها س = $\frac{\pi}{٤}$

∴ ص = ١ أ، جتا س = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ ومنها

س = $\frac{٣\pi}{٤}$ ∴ ص = -١

∴ النقط : $(\frac{\pi}{٤} ، ١)$ ، $(\frac{٣\pi}{٤} ، -١)$

(٢) ميل المستقيم = $\frac{٤}{١}$ ∴ $قا^٢ س = ٤$

قا س = ±٢ ∴ جتا س = $\pm\frac{١}{٢}$

∴ جتا س = $\frac{١}{٢}$ ومنها س = $\frac{\pi}{٣}$

∴ ص = $\sqrt{٣}$

أ، جتا س = $\frac{-١}{٢}$ ومنها س = $\frac{٢\pi}{٣}$

∴ ص = $-\sqrt{٣}$

النقط : $(\frac{\pi}{٣} ، \sqrt{٣})$ ، $(\frac{٢\pi}{٣} ، -\sqrt{٣})$

(١٠)

ص = -ظا س $\frac{ءص}{ءس} = قا^٢ س$

ميل المستقيم = $\frac{-(-٨)}{٢} = ٤$

بوضع $\frac{ءص}{ءس} = ٤$ ∴ $قا^٢ س = ٤$

∴ قا س = ±٢ ∴ جتا س = $\pm\frac{١}{٢}$

∴ س = $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{٥\pi}{٦}$ ، $\frac{٧\pi}{٦}$ ، $\frac{١١\pi}{٦}$

نوجد قيمة ص لكل قيمة لـ س ∴ النقط هى

$(\frac{\pi}{٦} ، -\sqrt{٣})$ ، $(\frac{٥\pi}{٦} ، \sqrt{٣})$ ، $(\frac{٧\pi}{٦} ، -\sqrt{٣})$ ،

$(\frac{١١\pi}{٦} ، \sqrt{٣})$.

(١١)

ص = جا س جتا س ∴ ص = $\frac{١}{٢}$ جا ٢ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = جتا ٢ س ، ∵ ميل المستقيم المعطى = ١

∴ ميل العمودى عليه = -١

∴ ميل المماس = -١ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = -١$

∴ جتا ٢ س = -١

∴ ٢ س = π ومنها س = $\frac{\pi}{٢}$ ∴ ص = ٠

∴ النقطة هى $(\frac{\pi}{٢} ، ٠)$

(١٢)

∵ $ص = \frac{٢ س - ١}{٣ س - ٢}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{(٣ س - ٢)(٢) - (٢ س - ١)(٣)}{(٣ س - ٢)^٢}$

$= \frac{-١}{(٣ س - ٢)^٢}$

∴ $(\frac{ءص}{ءس})_{(١ ، ١)} = -١$ ∴ ظا هـ = -١

∴ هـ = ١٣٥°

، ∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{١}{٤}$

∴ $\frac{١}{(٣ س - ٢)^٢} = \frac{١}{٤}$ ∴ $(٣ س - ٢)^٢ = ٤$

∴ ٣ س - ٢ = ±٢

∴ ٣ س - ٢ = ٢

ومنها س = $\frac{٤}{٣}$ ، ص = $\frac{٥}{٦}$

أو ٣ س - ٢ = -٢

ومنها س = ٠ ، ص = $\frac{١}{٢}$

∴ النقط $(\frac{٤}{٣} ، \frac{٥}{٦})$ ، $(٠ ، \frac{١}{٢})$

(١٣)

(١) $س^٢ - ٣ س ص - ص^٢ + ٢ = ٠$

(بالاشتقاق بالنسبة لـ س)

∴ $٢ س - ٣ ص - ٣ س \frac{ءص}{ءس} - ٢ ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢ س - ٣ ص}{٣ س + ٢ ص}$

$(\frac{ءص}{ءس})_{(-١ ، ٤)} = \frac{-١٤}{٥}$

∴ معادلة المماس هى $\frac{ص - ٤}{س + ١} = \frac{-١٤}{٥}$

أى أن : ١٤ س + ٥ ص - ٦ = ٠

(٢) ∵ $س^٣ + س ص^٢ - ٢ ص^٣ = ٠$

(بالاشتقاق بالنسبة فى س)

∴ $٣ س^٢ + س × ٢ ص \frac{ءص}{ءس} + ص^٢$

$- ٦ ص^٢ \frac{ءص}{ءس} = ٠$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-(٣ س^٢ + ص^٢)}{٢ س ص - ٦ ص^٢}$

∴ $(\frac{ءص}{ءس})_{(١ ، ١)} = ٢$

∴ معادلة المماس هى : ص - ١ = ٢ (س - ١)

أى أن : ص = ٢ س - ١

(٣) ∵ $س^٢ + ٢ س^{\frac{١}{٢}} ص^{\frac{١}{٢}} + ص^٢ - ٢١ = ٠$

(بالاشتقاق بالنسبة فى س)

∴ $٢ س + ٢ س^{\frac{١}{٢}} × \frac{١}{٢} ص^{-\frac{١}{٢}} \frac{ءص}{ءس} + ٢ ص^{\frac{١}{٢}}$

$× \frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}} + ٢ ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$

∴ $٢ س + س^{\frac{١}{٢}} ص^{-\frac{١}{٢}} \frac{ءص}{ءس} + ص^{\frac{١}{٢}} س^{-\frac{١}{٢}}$

$+ ٢ ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-٢ س - ص^{\frac{١}{٢}} س^{-\frac{١}{٢}}}{٢ ص + س^{\frac{١}{٢}} ص^{-\frac{١}{٢}}}$

∴ $(\frac{ءص}{ءس})_{(١ ، ٤)} = \frac{-٨}{١٧}$

∴ معادلة المماس هى : ص - ٤ = $\frac{-٨}{١٧}$ (س - ١)

أى أن : ٨ س + ١٧ ص - ٧٦ = ٠

(٤) ∵ ص = ظا س + جا ٢ س

(بالاشتقاق بالنسبة لـ س)

∴ $\frac{ءص}{ءس} = قا^٢ س + ٢$ جتا ٢ س

∴ $(\frac{ءص}{ءس})_{س = \frac{\pi}{٤}} = ٢$

، عند س = $\frac{\pi}{٤}$ فإن ص = ٢

∴ النقطة $(\frac{\pi}{٤} ، ٢)$

∴ معادلة المماس هي (ص − ٢) = ٢ (س − $\frac{\pi}{٤}$)

أي أن ٢ س − ص − $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ = ٠

(٥) ص = $\frac{\text{٦ ظا س}}{\text{١ − ظا}^{٢}\text{ س}}$ ∴ ص = ٣ ظا ٢ س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦ قا^{٢} ٢ س

∴ $(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}})_{\text{س} = \frac{\pi}{٦}}$ = ٢٤

، عند س = $\frac{\pi}{٦}$ فإن ص = ٣ $\sqrt{٣}$

∴ النقطة $(\frac{\pi}{٦} ، ٣\sqrt{٣})$

∴ معادلة المماس هي

(ص − ٣ $\sqrt{٣}$) = ٢٤ (س − $\frac{\pi}{٦}$)

أي أن ٢٤ س − ص − ٤ π + ٣ $\sqrt{٣}$ = ٠

(٦) جا س = جتا ٣ ص (بالاشتقاق بالنسبة في س)

∴ جتا س = −٣ جا ٣ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{− جتا س}}{\text{٣ جا ٣ ص}}$ ∴ $(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}})_{(٠ ، \frac{\pi}{٦})}$ = $\frac{-١}{٣}$

∴ معادلة المماس هي: $\frac{\text{ص} - \frac{\pi}{٦}}{\text{س} - ٠}$ = $\frac{-١}{٣}$

أي أن: س + ٣ ص − $\frac{\pi}{٢}$ = ٠

(٧) د (س) = ٢ ظا^{٣} س (بالاشتقاق بالنسبة في س)

∴ د′ (س) = ٦ ظا^{٢} س . قا^{٢} س

∴ د′ $(\frac{\pi}{٤})$ = ٦ × ١ × $(\sqrt{٢})^{٢}$ = ١٢ = ميل المماس

، ∵ د $(\frac{\pi}{٤})$ = ٢ ظا^{٣} $(\frac{\pi}{٤})$ = ٢

∴ النقطة $(\frac{\pi}{٤} ، ٢)$

∴ معادلة المماس هي: $\frac{\text{ص} - ٢}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}}$ = ١٢

أي أن ١٢ س − ص − ٣ π + ٢ = ٠

١٤

(١) ص = س^{٢} − ٢ س + ٣

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ س − ٢ ∴ $(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}})_{\text{س} = ١}$ = ٠

∴ العمودي يوازي محور الصادات وتكون معادلته

س = ١

(٢) ∵ س ص = ٦ ∴ ص = ٦ س$^{-١}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = −٦ س$^{-٢}$ = $\frac{-٦}{\text{س}^{٢}}$

∴ $(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}})_{\text{س} = ٢}$ = $\frac{-٣}{٢}$

∴ ميل العمودي = $\frac{٢}{٣}$

∴ معادلة العمودي هي: $\frac{\text{ص} - ٣}{\text{س} - ٢}$ = $\frac{٢}{٣}$

أي أن: ٢ س − ٣ ص + ٥ = ٠

(٣) ∵ س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س = ٩

∴ ٢ س + ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ٢ = ٠

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{-٢ - ٢\text{ س}}{٢\text{ ص}}$

∴ $(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}})_{(٢ ، ١)}$ = −٣

∴ ميل المماس = −٣ ، ميل العمودي = $\frac{١}{٣}$

∴ معادلة العمودي هي: ص − ١ = $\frac{١}{٣}$ (س − ٢)

أي أن: س − ٣ ص + ١ = ٠

(٤) س^{٣} + ص^{٣} = ٦ س ص

∴ ٣ س^{٢} + ٣ ص^{٢} $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦ ص + ٦ س $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{٢\text{ ص} - \text{س}^{٢}}{\text{ص}^{٢} - ٢\text{ س}}$

∴ $(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}})_{(٣ ، ٣)}$ = −١ ∴ ميل العمودي = ١

∴ معادلة العمودي هي: ص − ٣ = ١ (س − ٣)

أي أن: س − ص = ٠

(٥) ص = ٤ + ظتا س − قتا^{٢} س

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = − قتا^{٢} س − ٢ قتا س . قتا س ظتا س

= − قتا^{٢} س − ٢ قتا^{٢} س ظتا س

∴ $(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}})_{\text{س} = \frac{\pi}{٤}}$ = −٦

∴ ميل المماس = −٦ ∴ ميل العمودي = $\frac{١}{٦}$

، ∵ عند س = $\frac{\pi}{٤}$ ∴ ص = ٣

∴ النقطة $(\frac{\pi}{٤} ، ٣)$

∴ معادلة العمودي هي

(ص − ٣) = $\frac{١}{٦}$ (س − $\frac{\pi}{٤}$)

أي أن: ٤ س − ٢٤ ص − π + ٧٢ = ٠

(٦) ص = س |س| ∵ س = −٢

∴ ص = س (− س) = − س^{٢}

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = −٢ س ∴ $(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}})_{(-٢ ، -٤)}$ = ٤

∴ ميل العمودي = $\frac{-١}{٤}$

معادلة العمودي هي: $\frac{\text{ص} + ٤}{\text{س} + ٢}$ = $\frac{-١}{٤}$

أي أن: س + ٤ ص + ١٨ = ٠

١٥

∵ ص^{٢} = س − ١ ∴ ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ١

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{١}{٢\text{ ص}}$ ∴ $\frac{١}{٢\text{ ص}}$ = $\frac{-١}{٢}$

∴ ص = −١ ومنها س = ٢ ∴ النقطة (٢ ، −١)

∴ معادلة المماس هي: (ص + ١) = $\frac{-١}{٢}$ (س − ٢)

أي أن: ص = − $\frac{١}{٢}$ س

١٦

س^{٢} + ص^{٢} − ٢ ك س + ١٢ = ٠

، ∵ (٤ ، −٢) تحقق المعادلة

∴ ٤^{٢} + (−٢)^{٢} − ٢ ك (٤) + ١٢ = ٠

−٨ ك = −٣٢ ∴ ك = ٤

∴ معادلة المنحنى: س^{٢} + ص^{٢} − ٨ س + ١٢ = ٠

٢ س + ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ − ٨ = ٠

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{٤ - \text{س}}{\text{ص}}$

ميل مماس المنحنى عند النقطة (٤ ، −٢) = صفر

∴ معادلة المماس: $\frac{\text{ص} + ٢}{\text{س} - ٤}$ = صفر

ص + ٢ = ٠

١٧

ص = جا ٢ س − جتا س

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ جتا ٢ س + جا س

∵ ميل المماس = ظا $\frac{٣\pi}{٤}$ = −١

بوضع $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = −١ ∴ ٢ جتا ٢ س + جا س = −١

٢ (١ − ٢ جا^{٢} س) + جا س = −١

٤ جا^{٢} س − جا س − ٣ = ٠

∴ (جا س − ١) (٤ جا س + ٣) = ٠

∴ جا س = ١ أ، جا س = $\frac{-٣}{٤}$

(مرفوض لأن س ∈ [٠ ، π])

∴ س = $\frac{\pi}{٢}$

، ∵ عند س = $\frac{\pi}{٢}$ ∴ ص = صفر

النقطة هي: $(\frac{\pi}{٢} ، ٠)$

معادلة المماس: $\frac{\text{ص} - ٠}{\text{س} - \frac{\pi}{٢}}$ = −١

٢ س + ٢ ص − π = ٠

١٨

(١) س^{٢} + ص^{٢} = ٥٢

∴ ٢ س + ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{-\text{س}}{\text{ص}}$

∴ ميل المماس = $(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}})_{(٤ ، -٦)}$ = $\frac{٢}{٣}$

∴ معادلة المماس: $\frac{\text{ص} + ٦}{\text{س} - ٤}$ = $\frac{٢}{٣}$

أي أن: ٢ س − ٣ ص − ٢٦ = ٠

، ميل العمودى : $\frac{-٣}{٢}$

معادلة العمودى : $\frac{ص + ٦}{س - ٤} = \frac{-٣}{٢}$

أى أن : ٣ س + ٢ ص = ٠

(٢) س ص^{٢} = ١٨ ∴ ص^{٢} + ٢ س ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-ص}{٢ س}$ عند ص = ٣

∴ س = ٢

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(٢ ، ٣)} = \frac{-٣}{٤}$

∴ ميل المماس = $\frac{-٣}{٤}$

∴ معادلة المماس هى : $\frac{ص - ٣}{س - ٢} = \frac{-٣}{٤}$

أى أن : ٣ س + ٤ ص − ١٨ = ٠

، ميل العمودى = $\frac{٤}{٣}$

∴ معادلة العمودى هى : $\frac{ص - ٣}{س - ٢} = \frac{٤}{٣}$

أى أن : ٤ س − ٣ ص + ١ = ٠

(٣) ∵ س^{٢} − ٢ س ص − ص^{٢} = ١

∴ ٢ س − ٢ (س $\frac{ءص}{ءس}$ + ص) − ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{س - ص}{س + ص}$ ∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(١ ، ٠)} = ١$

∴ ميل المماس = ١ ، ميل العمودى = −١

∴ معادلة المماس هى : (ص − ٠) = ١ (س − ١)

أى أن : ص = س − ١

، معادلة العمودى هى : (ص − ٠) = −١ (س − ١)

أى أن : ص = − س + ١

(٤) س^{٢} ص^{٢} − ٢ س − ٤ ص + ١ = ٠

∴ ٢ س ص^{٢} + ٢ س^{٢} ص $\frac{ءص}{ءس}$ − ٢ − ٤ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١ - س ص^{٢}}{س^{٢} ص - ٢}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(-١ ، ١)} = -٢$

∴ ميل المماس = −٢

∴ معادلة المماس هى : $\frac{ص - ١}{س + ١} = -٢$

أى أن : ٢ س + ص + ١ = ٠

، ميل العمودى = $\frac{١}{٢}$

∴ معادلة العمودى : $\frac{ص - ١}{س + ١} = \frac{١}{٢}$

أى أن : س − ٢ ص + ٣ = ٠

(٥) ص^{٣} = س^{٢} − ٥ س − ٤

٣ ص^{٢} $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س − ٥

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢ س - ٥}{٣ ص^{٢}}$ ، عند س = ١ ∴ ص = −٢

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(١ ، -٢)} = \frac{-١}{٤}$

∴ ميل المماس = $\frac{-١}{٤}$

∴ معادلة المماس هى : $\frac{ص + ٢}{س - ١} = \frac{-١}{٤}$

أى أن : س + ٤ ص + ٧ = ٠

، ميل العمودى = ٤

∴ معادلة العمودى هى : $\frac{ص + ٢}{س - ١} = ٤$

أى أن : ٤ س − ص − ٦ = ٠

(٦) ص^{٢} = $\frac{٨}{١ + س^{٢}}$ ص^{٢} = ٨ (١ + س^{٢})$^{-١}$

٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = −٨ (١ + س^{٢})$^{-٢}$ × ٢ س

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{-٨ س}{ص (١ + س^{٢})^{٢}}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(-١ ، ٢)} = ١$

ميل المماس = ١

∴ معادلة المماس هى : $\frac{ص - ٢}{س + ١} = ١$

أى أن : س − ص + ٣ = ٠

، ميل العمودى = −١

∴ معادلة العمودى هى : $\frac{ص - ٢}{س + ١} = -١$

أى أن : س + ص − ١ = ٠

(٧) ص = ٢ س − ظتا س ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ + قتا^{٢} س

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = \frac{π}{٤}} = ٤$

∴ ميل المماس = ٤ ، ميل العمودى = $\frac{-١}{٤}$

، عند س = $\frac{π}{٤}$ فإن ص = $\frac{π}{٢}$ − ١

∴ معادلة المماس : $\frac{ص - (\frac{π}{٢} - ١)}{س - \frac{π}{٤}} = ٤$

أى أن : ٤ س − ص − $\frac{π}{٢}$ − ١ = ٠

، معادلة العمودى : $\frac{ص - (\frac{π}{٢} - ١)}{س - \frac{π}{٤}} = \frac{-١}{٤}$

أى أن : ٤ س + ١٦ ص − ٩ π + ١٦ = ٠

(٨) ص = ٢ جتا س − قا س

$\frac{ءص}{ءس}$ = − ٢ جا س − قا س ظا س

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = \frac{π}{٣}} = -٢\sqrt{٣}$

∴ ميل المماس = −٢$\sqrt{٣}$ ، ميل العمودى = $\frac{١}{٢\sqrt{٣}}$

، عند س = $\frac{π}{٣}$ فإن ص = −١

∴ النقطة هى ($\frac{π}{٣}$ ، −١)

∴ معادلة المماس : $\frac{ص + ١}{س - \frac{π}{٣}} = -٢\sqrt{٣}$

أى أن : ٢$\sqrt{٣}$ س + ص + ١ − $\frac{٢}{٣}$ π$\sqrt{٣}$ = ٠

، معادلة العمودى : $\frac{ص + ١}{س - \frac{π}{٣}} = \frac{١}{٢\sqrt{٣}}$

أى أن : س − ٢$\sqrt{٣}$ ص − $\frac{π}{٣}$ − ٢$\sqrt{٣}$ = ٠

(٩) ص = ٢ + قا س ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = قا س ظا س

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = \frac{٢π}{٣}} = ٢\sqrt{٣}$

∴ ميل المماس = ٢$\sqrt{٣}$ ، ميل العمودى = $\frac{-١}{٢\sqrt{٣}}$

، عند س = $\frac{٢π}{٣}$ ∴ ص = ١

∴ النقطة ($\frac{٢π}{٣}$ ، ١)

∴ معادلة المماس : $\frac{ص - ١}{س - \frac{٢π}{٣}} = ٢\sqrt{٣}$

أى أن : ٢$\sqrt{٣}$ س − ص − $\frac{٤}{٣}$$\sqrt{٣}$ π + ١ = ٠

، معادلة العمودى : $\frac{ص - ١}{س - \frac{٢π}{٣}} = \frac{-١}{٢\sqrt{٣}}$

أى أن : س + ٢$\sqrt{٣}$ ص − ٢$\sqrt{٣}$ − $\frac{٢}{٣}$ π = ٠

(١٠) ص = ٢ − ظا^{٢} س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ ظا س قا^{٢} س

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = \frac{π}{٤}} = ٤$ ∴ ميل المماس = ٤

، ميل العمودى = $\frac{-١}{٤}$

، عند س = $\frac{π}{٤}$ ∴ ص = ٢

∴ النقطة ($\frac{π}{٤}$ ، ٢)

∴ معادلة المماس : $\frac{ص - ٢}{س - \frac{π}{٤}} = ٤$

أى أن : ٤ س − ص − π + ٢ = ٠

، معادلة العمودى : $\frac{ص - ٢}{س - \frac{π}{٤}} = \frac{-١}{٤}$

أى أن : ٤ س + ١٦ ص − π − ٣٢ = ٠

(١١) ص = س جتا ٢ س + جا س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = جتا ٢ س − ٢ س جا ٢ س + جتا س

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(٠ ، ٠)} = ٢$ ∴ ميل المماس = ٢

∴ معادلة المماس : ص = ٢ س

، ميل العموى = $\frac{-١}{٢}$

∴ معادلة العمودى : ص = $\frac{-١}{٢}$ س

(١٢) ص = س^{٢} جا $\frac{π}{٢}$ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س جا $\frac{π}{٢}$ س + $\frac{π}{٢}$ س^{٢} جتا $\frac{π}{٢}$ س

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(٢ ، ٠)} = -٢π$

∴ ميل المماس = −٢ π

∴ معادلة المماس هى : $\frac{ص - ٠}{س - ٢} = -٢π$

أى أن : ٢ π س + ص − ٤ π = ٠

، ميل العمودي = $\frac{١}{٢\pi}$

∴ معادلة العمودي هي $\frac{ص - ٠}{س - ٢} = \frac{١}{٢\pi}$

∴ معادلة العمودي س − ٢π ص − ٢ = ٠

(١٣) ص = $\sqrt{جاس + جتاس}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{جتاس - جاس}{٢\sqrt{جاس + جتاس}}$

، عند س = $\frac{\pi}{٤}$ فإن ص = $\sqrt{٢}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(\frac{\pi}{٤} ، \sqrt{٢})} = ٠$

∴ ميل المماس = ٠ ، معادلته ص = $\sqrt{٢}$

، ميل العمودي = $\frac{١}{٠}$ (غير معرف)

∴ معادلته س = $\frac{\pi}{٤}$

(١٤) س جا ٢ص = ص جتا ٢س

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ جا ٢ص + ٢س جتا ٢ص $\frac{ءص}{ءس}$

= $\frac{ءص}{ءس}$ جتا ٢س − ٢ص جا ٢س

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{جا ٢ص + ٢ص جا ٢س}{جتا ٢س - ٢س جتا ٢ص}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(\frac{\pi}{٤} ، \frac{\pi}{٢})} = ٢$

∴ ميل المماس = ٢ ، ميل العمودي = $\frac{-١}{٢}$

∴ معادلة المماس: $\frac{ص - \frac{\pi}{٢}}{س - \frac{\pi}{٤}} = ٢$

أى أن: ٢س − ص = ٠

معادلة العمودي: $\frac{ص - \frac{\pi}{٢}}{س - \frac{\pi}{٤}} = \frac{-١}{٢}$

منها ٤س + ٨ص − ٥π = ٠

(١٥) (جاس + جتاس) ص = جتا² س

عند س = $\frac{\pi}{٢}$ ∴ ص = ٠

∴ النقطة تكون $(\frac{\pi}{٢} ، ٠)$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

(جاس + جتاس) $\frac{ءص}{ءس}$ + (جتاس − جاس) ص

= −٢ جتاس جاس

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-٢ جتاس جاس - (جتاس - جاس) ص}{جاس + جتاس}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(\frac{\pi}{٢} ، ٠)} = ٠$ ∴ ميل المماس = ٠

∴ معادلة المماس هى: ص = ٠

وميل العمودي = $\frac{١}{٠}$ (غير معرف)

∴ معادلة العمودي تكون س = $\frac{\pi}{٢}$

19

(١) س = ن² + ٤ن ∴ $\frac{ءس}{ءن}$ = ٢ن + ٤

، ص = ٢ن² ∴ $\frac{ءص}{ءن}$ = ٤ن

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن} = \frac{٤ن}{٢ن + ٤}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{ن = ١} = \frac{٢}{٣}$ ∴ ميل المماس = $\frac{٢}{٣}$

، ميل العمودي = $\frac{-٣}{٢}$

، عند ن = ١ س = ٥ ، ص = ٢

∴ النقطة هى: (٥ ، ٢)

∴ معادلة المماس $\frac{ص - ٢}{س - ٥} = \frac{٢}{٣}$

أى أن ٢س − ٣ص − ٤ = ٠

، معادلة العمودي: $\frac{ص - ٢}{س - ٥} = \frac{-٣}{٢}$

٣س + ٢ص − ١٩ = ٠

(٢) س = ن² + ٢ن + ٣ ∴ $\frac{ءس}{ءن}$ = ٢ن + ٢

، ص = ٢ن³ − ٦ن + ١ ∴ $\frac{ءص}{ءن}$ = ٦ن² − ٦

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٦ن^{٢} - ٦}{٢ن + ٢} = \frac{٦(ن - ١)(ن + ١)}{٢(ن + ١)}$

= ٣(ن − ١)

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{ن = ٠} = -٢$ ∴ ميل المماس = −٢

، ميل العمودي = $\frac{١}{٢}$

، عند ن = ٠ ∴ س = ٢ ، ص = ١

∴ النقطة هى: (٢ ، ١)

∴ معادلة المماس: $\frac{ص - ١}{س - ٢} = -٢$

أى أن: ٢س + ص − ١٠ = ٠

، معادلة العمودي $\frac{ص - ١}{س - ٢} = \frac{١}{٢}$

أى أن: س − ٢ص = ٠

(٣) س = ن² − ٦ن ∴ $\frac{ءس}{ءن}$ = ٢ن − ٦

، ص = ٨$\sqrt{ن - ٢}$ ∴ $\frac{ءص}{ءن} = \frac{٤}{\sqrt{ن - ٢}}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٤}{\sqrt{ن - ٢}} \times \frac{١}{٢ن - ٦} = \frac{٢}{(ن - ٣)\sqrt{ن - ٢}}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{ن = ٦} = \frac{٢}{٢ \times ٣} = \frac{١}{٣}$

∴ ميل المماس = $\frac{١}{٣}$ ، ميل العمودي = −٣

، عند ن = ٦ ∴ س = ٠ ، ص = ١٦

∴ النقطة هى: (٠ ، ١٦)

∴ ميل معادلة المماس: $\frac{ص - ١٦}{س - ٠} = \frac{١}{٣}$

∴ س − ٣ص + ٤٨ = ٠

، معادلة العمودي: $\frac{ص - ١٦}{س - ٠} = \frac{-٣}{١}$

∴ ٣س + ص − ١٦ = ٠

(٤) س = ن³ − ٦ ∴ $\frac{ءس}{ءن}$ = ٣ن²

، ص = $\sqrt[٣]{٣ن - ٥}$

∴ $\frac{ءص}{ءن} = \frac{١}{\sqrt[٣]{(٣ن - ٥)^{٢}}}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٣ن^{٢}\sqrt[٣]{(٣ن - ٥)^{٢}}}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{ن = ٢} = \frac{١}{١٢}$ ∴ ميل المماس = $\frac{١}{١٢}$

، ميل العمودي = −١٢

عند ن = ٢ ∴ س = ٢ ، ص = ١

∴ النقطة هى: (٢ ، ١)

∴ معادلة المماس: $\frac{ص - ١}{س - ٢} = \frac{١}{١٢}$

س − ١٢ص + ١٠ = ٠

، معادلة العمودي $\frac{ص - ١}{س - ٢} = -١٢$

١٢س + ص − ٢٥ = ٠

(٥) س = جتا θ ∴ $\frac{ءس}{ءθ}$ = −جا θ

، ص = $\sqrt{٢}$ جا θ ∴ $\frac{ءص}{ءθ}$ = جتا θ

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{جتا θ}{-جا θ}$ = −ظتا θ

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{θ = \frac{\pi}{٤}} = -١$

∴ ميل المماس = −١ ، ميل العمودي = ١

، عند θ = $\frac{\pi}{٤}$

∴ س = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، ص = $\frac{٣\sqrt{٢}}{٢}$

∴ النقطة = $\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢} ، \frac{٣\sqrt{٢}}{٢}\right)$

∴ معادلة المماس: $\frac{ص - \frac{٣\sqrt{٢}}{٢}}{س - \frac{\sqrt{٢}}{٢}} = -١$

أى أن: س + ص − ٢$\sqrt{٢}$ = ٠

، معادلة العمودي: $\frac{ص - \frac{٣\sqrt{٢}}{٢}}{س - \frac{\sqrt{٢}}{٢}} = ١$

أى أن: س − ص + $\sqrt{٢}$ = ٠

(٦) س = قا θ ∴ $\frac{ءس}{ءθ}$ = قا θ ظا θ

، ص = ظا θ ∴ $\frac{ءص}{ءθ}$ = قا² θ

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{قا^{2} θ}{قا θ \, ظا θ} = قتا θ$

$\therefore \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{θ = \frac{π}{6}} = ٢$

∴ ميل المماس = ٢ ، ميل العمودي = $\frac{-١}{٢}$

، عند θ = $\frac{π}{٦}$ فإن : س = $\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$ ، ص = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

∴ النقطة $\left(\frac{٢\sqrt{٣}}{٣} ، \frac{\sqrt{٣}}{٣}\right)$

∴ معادلة المماس : $\frac{ص - \frac{\sqrt{٣}}{٣}}{س - \frac{٢\sqrt{٣}}{٣}} = ٢$

أي أن : ٢ س − ص − $\sqrt{٣}$ = ٠

، معادلة العمودي : $\frac{ص - \frac{\sqrt{٣}}{٣}}{س - \frac{٢\sqrt{٣}}{٣}} = \frac{-١}{٢}$

أي أن : ٣ س + ٦ ص − ٤ $\sqrt{٣}$ = ٠

(٧) س = قتا θ ∴ $\frac{ءس}{ءθ}$ = − قتا θ ظتا θ

، ص = قتا θ + ظتا θ

$\therefore \frac{ءص}{ءθ} = - قتا θ \, ظتا θ - قتا^{2} θ$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{- قتا θ \, ظتا θ - قتا^{2} θ}{- قتا θ \, ظتا θ} = ١ + قا θ$

$\therefore \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{θ = \frac{π}{٣}} = ٣$

∴ ميل المماس = ٣ ، ميل العمودي = $\frac{-١}{٣}$

، عند θ = $\frac{π}{٣}$ ∴ س = $\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$ ، ص = $\sqrt{٣}$

فإن النقطة تكون $\left(\frac{٢}{٣}\sqrt{٣} ، \sqrt{٣}\right)$

∴ معادلة المماس : $\frac{ص - \sqrt{٣}}{س - \frac{٢}{٣}\sqrt{٣}} = ٣$

أي أن : ٣ س − ص − $\sqrt{٣}$ = ٠

، معادلة العمودي : $\frac{ص - \sqrt{٣}}{س - \frac{٢}{٣}\sqrt{٣}} = \frac{-١}{٣}$

أي أن : ٣ س + ٩ ص − ١١ $\sqrt{٣}$ = ٠

(٨) س = ٧ + ظتا θ ∴ $\frac{ءس}{ءθ} = - قتا^{2} θ$

، ص = $جا^{2} θ + \sqrt{٢}$ قا θ

$\therefore \frac{ءص}{ءθ} = ٢ جا θ \, جتا θ + \sqrt{٢} \, قا θ \, ظا θ$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٢ جا θ \, جتا θ + \sqrt{٢} \, قا θ \, ظا θ}{- قتا^{2} θ}$

$\therefore \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{θ = \frac{π}{٤}} = \frac{-٣}{٢}$

∴ ميل المماس = $\frac{-٣}{٢}$ ، ميل العمودي = $\frac{٢}{٣}$

عند θ = $\frac{π}{٤}$ ∴ س = ٨ ، ص = $\frac{٥}{٢}$

∴ النقطة = $\left(٨ ، \frac{٥}{٢}\right)$

∴ معادلة المماس : $\frac{ص - \frac{٥}{٢}}{س - ٨} = \frac{-٣}{٢}$

أي أن : ٣ س + ٢ ص − ٢٩ = ٠

، معادلة العمودي : $\frac{ص - \frac{٥}{٢}}{س - ٨} = \frac{٢}{٣}$

أي أن : ٤ س − ٦ ص − ١٧ = ٠

(٩) س = $قا^{2} θ$ − ١

$\therefore \frac{ءس}{ءθ} = ٢ قا θ \, قا θ \, ظا θ = ٢ قا^{2} θ \, ظا θ$

، ص = ظا θ ∴ $\frac{ءص}{ءθ} = قا^{2} θ$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{قا^{2} θ}{٢ قا^{2} θ \, ظا θ} = \frac{١}{٢ ظا θ}$

$\therefore \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{θ = \frac{-π}{٤}} = \frac{-١}{٢}$

∴ ميل المماس = $\frac{-١}{٢}$ ، ميل العمودي = ٢

عند θ = $\frac{-π}{٤}$ فإن : س = ١ ، ص = −١

∴ النقطة تكون (١ ، −١)

∴ معادلة المماس : $\frac{ص + ١}{س - ١} = \frac{-١}{٢}$

أي أن : س + ٢ ص + ١ = ٠

، معادلة العمودي : $\frac{ص + ١}{س - ١} = \frac{٢}{١}$

أي أن : ٢ س − ص − ٣ = ٠

٢٠

∵ ميل المماس = ظا ٤٥° = ١

، ∵ $س^{2} + ص^{2}$ + ٤ س + ٦ ص + ٥ = ٠

∴ ٢ س + ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ + ٤ + ٦ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{- س - ٢}{ص + ٣}$

∴ $\frac{- س - ٢}{ص + ٣}$ = ١ منها ص = − س − ٥

بالتعويض :

∴ $س^{2} + (- س - ٥)^{2}$ + ٤ س + ٦ (− س − ٥) + ٥ = ٠

∴ ٢ $س^{2}$ + ٨ س = ٠ ∴ ٢ س (س + ٤) = ٠

∴ س = ٠ (مرفوض)

أ، س = −٤ ومنها ص = −١

∴ النقطة : (−٤ ، −١)

∴ معادلة المماس هى : $\frac{ص + ١}{س + ٤} = ١$

∴ س − ص + ٣ = ٠

، ∵ ميل العمودي = −١

∴ معادلة العمودي هى : $\frac{ص + ١}{س + ٤} = -١$

∴ س + ص + ٥ = ٠

٢١

ص = $س^{2}$ + س ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س + ١

لإيجاد نقط التقاطع نحل المعادلتين ص = $س^{2}$ + س

، ص − ٢ س = ٠ معًا

∴ $س^{2}$ + س = ٢ س ∴ $س^{2}$ − س = ٠

∴ س (س − ١) = ٠

س = ٠ ومنها ص = ٠ ∴ النقطة : (٠ ، ٠)

أ، س = ١ ومنها ص = ٢ ∴ النقطة : (١ ، ٢)

عند (٠ ، ٠) ، ∵ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س + ١

$\therefore \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(٠ ، ٠)} = ١$

∴ معادلة المماس هى : $\frac{ص - ٠}{س - ٠} = ١$

∴ س − ص = ٠

∴ $\overleftarrow{ر}$ = ك (١ ، ١) ، س = ك ، ص = ك

، ∵ ميل العمودي = −١ $\frac{ص - ٠}{س - ٠} = -١$

معادلة العمودي : س + ص = ٠

∴ $\overleftarrow{ر}$ = ك (١ ، −١) ، س = ك ، ص = −ك

عند (١ ، ٢)

$\therefore \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(١ ، ٢)} = ٣$

∴ معادلة المماس هى : $\frac{ص - ٢}{س - ١} = ٣$

معادلة المماس : ٣ س − ص − ١ = ٠

، $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٢) + ك (١ ، ٣)

، س = ١ + ك ، ص = ٢ + ٣ ك

ميل العمودي = $-\frac{١}{٣}$

∴ معادلة العمودي هى : $\frac{ص - ٢}{س - ١} = \frac{-١}{٣}$

∴ س + ٣ ص − ٧ = ٠

، $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٢) + ك (٣ ، −١)

، س = ١ + ٣ ك ، ص = ٢ − ك

٢٢

نوجد نقط تقاطع المستقيم مع المنحنى بحل المعادلتين معًا

∵ ص = $\sqrt{٦ - س}$ ، ص = س

∴ س = $\sqrt{٦ - س}$ وبتربيع الطرفين

∴ $س^{2}$ = ٦ − س ∴ $س^{2}$ + س − ٦ = ٠

∴ (س + ٣) (س − ٢) = ٠

∴ س = −٣ (مرفوض) أ، س = ٢

وعند س = ٢ ∴ ص = ٢

∴ نقطة التقاطع هى (٢ ، ٢)

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{1}{2}(٦ - س)^{-\frac{1}{2}} \times -1 = \frac{-1}{2\sqrt{٦ - س}}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(٢ ، ٢)} = \frac{-1}{4}$

∴ ميل العمودى = ٤

∴ معادلة العمودى هى : ص − ٢ = ٤ (س − ٢)

أى أن : ص − ٤ س + ٦ = ٠

٢٣

$\frac{ءص}{ءس}$ = − جا (س + ص) $\left(1 + \frac{ءص}{ءس}\right)$

، ∵ $\frac{ءص}{ءس}$ = الميل = $-\frac{1}{2}$

∴ $-\frac{1}{2}$ = − جا (س + ص) × $\frac{1}{2}$

∴ جا (س + ص) = ١ (١)

∴ س + ص = $\frac{\pi}{2}$ + ٢ ن π حيث ن ∈ ص

∴ ص = جتا $\left(\frac{\pi}{2} + ٢ ن \pi\right)$ = جتا $\frac{\pi}{2}$ = صفر (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ جا س = ١

∴ س = $\frac{\pi}{2}$ لأن س ∈ [٠ ، π]

∴ نقطة التماس هى : ($\frac{\pi}{2}$ ، ٠)

∴ معادلة المماس هى : ص − ٠ = $-\frac{1}{2}$ (س − $\frac{\pi}{2}$)

∴ ٢ س + ٤ ص − π = ٠

٢٤

① ع (س) = د (س) × ر (س)

عَ (س) = دَ (س) × ر (س) + د (س) × رَ (س)

عند س = ٣

ع (٣) = د (٣) × ر (٣) = ٧

∴ النقطة (٣ ، ٧)

عَ (٣) = −١ × ٧ + ١ × ٦ = −١

∴ ميل المماس = −١

∴ معادلة المماس : $\frac{ص - ٧}{س - ٣} = -1$

∴ س + ص − ١٠ = ٠

، معادلة العمودى : $\frac{ص - ٧}{س - ٣} = 1$

∴ س − ص + ٤ = ٠

② ع (س) = د (س) ÷ ر (س)

عَ (س) = $\frac{ر (س)\, دَ (س) - د (س)\, رَ (س)}{(ر (س))^2}$

عند س = ٧

ع (٧) = $\frac{-2}{1}$ = −٢ ∴ النقطة (٧ ، −٢)

، عَ (س) = $\frac{1 \times 2 - (-2) \times 5}{(1)^2}$ = ١٢

∴ ميل المماس = ١٢

∴ معادلة المماس : $\frac{ص + ٢}{س - ٧} = 12$

∴ ١٢ س − ص − ٨٦ = ٠

، معادلة العمودى : $\frac{ص + ٢}{س - ٧} = \frac{-1}{12}$

∴ س + ١٢ ص + ١٧ = ٠

③ ع (س) = د (ر (س))

∴ عَ (س) = دَ (ر (س)) . رَ (س)

، ع (٣) = د (ر (٣)) = د (٧) = −٢

∴ النقطة (٣ ، −٢)

، عَ (٣) = دَ (ر (٣)) . رَ (٣) = دَ (٧) × ٦

= ٢ × ٦ = ١٢

∴ ميل المماس = ١٢

∴ معادلة المماس : $\frac{ص + ٢}{س - ٣} = 12$

∴ ١٢ س − ص − ٣٨ = ٠

، معادلة العمودى : $\frac{ص + ٢}{س - ٣} = \frac{-1}{12}$

∴ س + ١٢ ص + ٢١ = ٠

٢٥

① (ب) ② (ب) ③ (جـ) ④ (د)

⑤ (جـ) ⑥ (ب) ⑦ (أ) ⑧ (جـ)

⑨ (ب) ⑩ (جـ) ⑪ (د) ⑫ (ب)

⑬ (ب) ⑭ (أ) ⑮ (جـ) ⑯ (جـ)

⑰ (أ) ⑱ (د) ⑲ (د) ⑳ (د)

㉑ (جـ)

٢٦

∵ ص = $س^3$ + ٣ س − ٢

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ $س^2$ + ٣ (كمية موجبة لجميع قيم س)

∴ ميل المماس عند أى نقطة على المنحنى كمية موجبة.

∴ المماس عند أى نقطة على المنحنى يميل بزاوية حادة على الاتجاه الموجب لمحور السينات

، عند النقطة (١ ، ٢)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦ ∴ ميل العمودى = $\frac{-1}{6}$

∴ معادلة العمودى هى $\frac{ص - ٢}{س - ١} = \frac{-1}{6}$

أى أن : س + ٦ ص − ١٣ = ٠

٢٧

٢ ص = جا ٢ س ∴ ص = $\frac{1}{2}$ جا ٢ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = جتا ٢ س

① جتا ٢ س = ٠

∴ ٢ س = $\frac{\pi}{2}$ ∴ س = $\frac{\pi}{4}$

أ، ٢ س = $\frac{3\pi}{2}$ ∴ س = $\frac{3\pi}{4}$

② عند س = $\frac{\pi}{4}$ ∴ ص = $\frac{1}{2}$

∴ النقطة : ($\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{1}{2}$)

معادلة المماس : ٢ ص − ١ = ٠

، معادلة العمودى : س = $\frac{\pi}{4}$

عند س = $\frac{3\pi}{4}$ ∴ ص = $\frac{-1}{2}$

∴ النقطة : ($\frac{3\pi}{4}$ ، $\frac{-1}{2}$)

معادلة المماس : ٢ ص + ١ = ٠

معادلة العمودى : س = $\frac{3\pi}{4}$

٢٨

ص = ٤ − $س^2$ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = −٢ س

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(١ ، ٣)}$ = −٢ ∴ ميل العمودى = $\frac{1}{2}$

∴ معادلة العمودى : س − ٢ ص + ٥ = ٠

وبحل المعادلتين ص = ٤ − $س^2$

، س − ٢ ص + ٥ = ٠ معًا

∴ س − ٢ (٤ − $س^2$) + ٥ = ٠

∴ ٢ $س^2$ + س − ٣ = ٠

∴ (س − ١) (٢ س + ٣) = ٠

∴ س = ١ النقطة الأولى (١ ، ٣) أ، س = $\frac{-3}{2}$

∴ النقطة الثانية حـ ($\frac{-3}{2}$ ، $\frac{7}{4}$)

∵ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = \frac{-3}{2}}$ = ٣

∴ معادلة المماس عند حـ هى $\frac{ص - \frac{7}{4}}{س + \frac{3}{2}} = 3$

أى أن : ١٢ س − ٤ ص + ٢٥ = ٠

٢٩

∵ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٤ $س^3$ − ٤ س − ١ (١)

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(-١ ، ٠)}$ = −١

∴ معادلة المماس هى : ص − ٠ = −١ × (س + ١)

∴ ص = − س − ١

وبحل معادلة المماس والمنحنى معًا

∴ $س^4$ − ٢ $س^2$ − س = − س − ١

∴ $(س^2 - 1)^2$ = ٠ ∴ س = ±١

∴ المماس يقطع المنحنى عند نقطة ب التى إحداثيها

السينى = ١ ، د (١) = −٢

∴ ب = (١ ، −٢) ، من (١) ميل المماس = −١

∴ ميل العمودى = ١

∴ معادلة العمودى عند النقطة ب هى :

ص + ٢ = س − ١

أى أن : س − ص − ٣ = ٠

٣٠

∵ $ص^٢ (٢أ − س) = س^٣$

$٢ص \frac{ءص}{ءس} (٢أ − س) − ص^٢ = ٣س^٢$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{٣س^٢ + ص^٢}{٢ص (٢أ − س)}$ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(أ ، أ)} = ٢$

∴ متجه اتجاه المستقيم هو (١ ، ٢)

معادلة المماس : $\overleftarrow{ر}$ = (أ ، أ) + ك (١ ، ٢)

معادلة العمودى : $\overleftarrow{ر}$ = (أ ، أ) + ك (−٢ ، ١)

٣١

أى نقطة ($س_١$ ، $ص_١$) تقع على منحنى الدالة تحقق معادلته.

∴ $ص_١ = س_١^٣$

، ∵ $\frac{ءص}{ءس} = ٣س^٢$

∴ ميل المماس عند النقطة ($س_١$ ، $س_١^٣$) = $٣س_١^٢$ (١)

، ∵ المماس يمر بالنقطتين (٤ ، ٠) ، ($س_١$ ، $س_١^٣$)

∴ ميل المماس = $\frac{س_١^٣ − ٠}{س_١ − ٤}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{س_١^٣}{س_١ − ٤} = ٣س_١^٢$

∴ $س_١^٣ = ٣س_١^٣ − ١٢س_١^٢$

∴ $٢س_١^٣ − ١٢س_١^٢ = ٠$

∴ $٢س_١^٢ (س_١ − ٦) = ٠$

∴ $س_١ = ٠$ أ، $س_١ = ٦$

ومنها $ص_١$ = صفر أ، $ص_١ = ٢١٦$

∴ النقط هى : (٠ ، ٠) ، (٦ ، ٢١٦)

٣٢

∵ $ص = س^٢$ ويفرض أن نقطة التماس هى (أ ، ب)

∴ $ب = أ^٢$ (١)

، $\frac{ءص}{ءس} = ٢س$ ، عند س = أ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = ٢أ$

∴ معادلة المماس هى : $ص − ص_١ = م (س − س_١)$

∴ ص − ب = ٢أ (س − أ)

∴ $ص − أ^٢ = ٢أ (س − أ)$

، ∵ النقطة (٣ ، ٥) تقع على المماس

∴ $٥ − أ^٢ = ٢أ (٣ − أ)$

∴ $٥ − أ^٢ = ٦أ − ٢أ^٢$ ∴ $أ^٢ − ٦أ + ٥ = ٠$

∴ (أ − ١) (أ − ٥) = ٠

∴ أ = ١ أ، أ = ٥ ومنها ب = ١ أ، ب = ٢٥

∴ معادلة المماس هى : ص − ١ = ٢ (س − ١)

أى أن : ص − ٢س + ١ = ٠

أ، ص − ٢٥ = ١٠ (س − ٥)

أى أن : ص − ١٠س + ٢٥ = ٠

٣٣

∵ $س^٢ − ص^٢ = ١٦$ ويفرض أن نقطة التماس (أ ، ب)

∴ $أ^٢ − ب^٢ = ١٦$ (١)

، $٢س − ٢ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$ منها $\frac{ءص}{ءس} = \frac{س}{ص}$

$\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(أ ، ب)} = \frac{أ}{ب}$ ∵ ميل المماس = $\frac{ب + ٢}{أ − ٢}$

∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{ب + ٢}{أ − ٢}$ منها $أ^٢ − ب^٢ = ٢ (ب + أ)$ (٢)

من (١) ، (٢) : ب = ٨ − أ (٣)

من (٣) ، (١) : $أ^٢ − (٨ − أ)^٢ = ١٦$

أ = ٥ ومنها ب = ٣

∴ معادلة المماس : $\frac{ص + ٢}{س − ٢} = \frac{٥}{٣}$

أى أن : ٥س − ٣ص − ١٦ = ٠

٣٤

$ص = أس^٣ + ب س^٢$ ، ∵ (١ ، ٦) تحقق المعادلة

∴ أ + ب = ٦ (١)

، ∵ $\frac{ءص}{ءس} = ٣أس^٢ + ٢ب س$

، ∵ ميل المستقيم المعطى = ١٣

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(١ ، ٦)} = ١٣$

٣أ + ٢ب = ١٣ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) : أ = ١ ، ب = ٥

٣٥

$ص = ٣س^٢ − ٧س + ٤$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٦س − ٧$

بوضع ص = ٠ ∴ $٣س^٢ − ٧س + ٤ = ٠$

∴ (٣س − ٤) (س − ١) = ٠

∴ $س = \frac{٤}{٣}$ ∴ النقطة : $\left(\frac{٤}{٣} ، ٠\right)$

، ميل المماس = $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(\frac{٤}{٣} ، ٠)} = ١$

أ، س = ١ ∴ النقطة (١ ، ٠)

، ميل المماس $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(١ ، ٠)} = −١$

∵ حاصل ضرب الميلين = −١

∴ المماسان متعامدان.

٣٦

$ص = س^٢ + ٦س + ٥$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٢س + ٦$ ∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(−١ ، ٠)} = ٤$

∵ $ص = س^٣ − س^٢ − س + ١$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٣س^٢ − ٢س − ١$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(−١ ، ٠)} = ٤$

∵ (−١ ، ٠) تحقق كل منهما ولهما نفس الميل

∴ المنحنيان متماسان عند النقطة (−١ ، ٠)

∴ معادلة المماس المشترك $\frac{ص − ٠}{س + ١} = \frac{٤}{١}$

أى أن : ٤س − ص + ٤ = ٠

٣٧

∵ (−١ ، ٢) تحقق معادلتى المنحنيين

∴ أ + ب = −٢ (١)

، حـ + ١ = ٢ ∴ حـ = ١

، ∵ $م_١ = \frac{ءص_١}{ءس} = ٣أس^٢ + ب$

، $م_٢ = \frac{ءص_٢}{ءس} = ٢حـ س − ١$

، ∵ $م_١ = م_٢$ عند س = −١ ∴ ٣أ + ب = −٣ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) : ∴ $أ = −\frac{١}{٢}$ ، $ب = \frac{−٣}{٢}$

∴ معادلة المماس هى : ص − ٢ = −٣ (س + ١)

أى أن : ٣س + ص + ١ = ٠

٣٨

نفرض $ص = س^٢$ يقطع المستقيم الأفقى ص = أ

فى النقط $(\sqrt{أ} ، أ)$ ، $(−\sqrt{أ} ، أ)$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٢س$

∴ ميل المماس $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(\sqrt{أ} ، أ)} = ٢\sqrt{أ}$

معادلة المماس الأول $(ص − أ) = ٢\sqrt{أ} (س − \sqrt{أ})$

∴ $٢\sqrt{أ} س − ص − أ = ٠$ (١)

وميل المماس الثانى $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(−\sqrt{أ} ، أ)} = −٢\sqrt{أ}$

∴ معادلة المماس الثانى : $ص − أ = −٢\sqrt{أ} (س + \sqrt{أ})$

$٢\sqrt{أ} س + ص + أ = ٠$ (٢)

بجمع المعادلتين (١) ، (٢) : $٤\sqrt{أ} س = ٠$ ومنها س = ٠

بالتعويض : ص = −أ

أى أن : المماسان يتقاطعان دائمًا فى النقطة (٠ ، −أ) ∋ محور الصادات.

٣٩

$\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{٣}{٤}\right)$ تحقق كلًا منهما

∴ $\frac{٣}{٤}$ = أ $\left(\frac{٣}{٤}\right)$ ∴ أ = ١

، $\frac{٣}{٤}$ = ب − حـ $\left(\frac{٣}{٤}\right)$ ومنها ب = $\frac{٣}{٤}$ (حـ + ١)

حاصل ضرب الميلين = −١

$\frac{ءص}{ءس}$ للمنحنى الأول = ٢ أ س

، $\frac{ءص}{ءس}$ للمنحنى الثانى = −٢ حـ س

٢ أ $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$ × −٢ حـ $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$ = −١

٣ أ حـ = ١ ، ∵ أ = ١ ∴ حـ = $\frac{١}{٣}$ ∴ ب = ١

٤٠

دَ (س) = $\begin{cases} ٢ س & س < ٣ \\ ب & س > ٣ \end{cases}$

، ∵ الميل = ظا هـ = ٦

∴ دَ (٣$^{-}$) = دَ (٣$^{+}$) = ٦ ∴ ب = ٦

، د (س) متصلة عند س = ٣

∴ د (٣$^{-}$) = د (٣$^{+}$) = د (٣)

∴ ٩ + أ = ٦ × ٣ ∴ أ = ٩

٤١

∵ س^{٢} + ص^{٢} = ٥ (١)

∴ ٢ س + ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-س}{ص}$

∵ $\frac{-س}{ص}$ = ٢ ∴ س = −٢ ص

بالتعويض فى (١) : ٤ ص^{٢} + ص^{٢} = ٥

∴ ٥ ص^{٢} = ٥ ص = ± ١

عند ص = ١ ∴ س = −٢ ∴ النقطة (−٢ ، ١)

∴ معادلة المماس : (ص − ١) = ٢ (س + ٢)

أى أن : ٢ س − ص + ٥ = ٠

، عند ص = −١ ∴ س = ٢

∴ النقطة (٢ ، −١)

(ص + ١) = ٢ (س − ٢)

أى أن : ٢ س − ص − ٥ = ٠

٤٢

∵ س ص = ٨ (١)

∴ س $\frac{ءص}{ءس}$ + ص = ٠ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-ص}{س}$

، ∵ ميل المستقيم المعطى هو −٢

∴ $\frac{-ص}{س}$ = −٢ ∴ ص = ٢ س (٢)

وبالتعويض من (٢) فى (١) : ∴ ٢ س^{٢} = ٨

∴ س^{٢} = ٤ ∴ س = ± ٢

ومن (٢) : ∴ ص = ± ٤

∴ النقط هى : (٢ ، ٤) ، (−٢ ، −٤)

∴ معادلة المماس الأول $\frac{ص - ٤}{س - ٢}$ = −٢

أى أن : ص + ٢ س − ٨ = ٠

، معادلة المماس الثانى $\frac{ص + ٤}{س + ٢}$ = −٢

أى أن : ص + ٢ س + ٨ = ٠

٤٣

ص = ٢ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٤ س + ٥

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٦ س^{٢} + ٦ س + ٤

∴ ميل المماس عند النقطة (−١ ، ٢) = ٤

بوضع $\frac{ءص}{ءس}$ = ٤

٦ س^{٢} + ٦ س + ٤ = ٤

٦ س (س + ١) = ٠

س = ٠ ومنها ص = ٥ أ، س = −١ ومنها ص = ٢

∴ النقطة الأخرى التى يكون فيها المماس له نفس الميل هى (٠ ، ٥)

معادلة المماس الآخر : $\frac{ص - ٥}{س - ٠}$ = ٤

∴ ٤ س − ص + ٥ = ٠

٤٤

ميل المماس = $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ س^{٢} − ٣

، ∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{-١}{٩}$

∴ ميل المماس المطلوب = ٩

∴ ٣ س^{٢} − ٣ = ٩ ∴ س^{٢} = ٤

∴ س = ± ٢

∴ نقطتا التماس هما : (−٢ ، ٣) ، (٢ ، ٧)

∴ معادلتا المماسين هما :

$\frac{ص - ٧}{س - ٢}$ = ٩ أى أن : ص − ٩ س + ١١ = ٠

، $\frac{ص - ٣}{س + ٢}$ = ٩ أى أن : ص − ٩ س − ٢١ = ٠

٤٥

∵ ص = س + $\frac{١}{س}$ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ١ − $\frac{١}{س^{٢}}$

، ∵ ميل المستقيم المعطى = −٣

∴ ١ − $\frac{١}{س^{٢}}$ = −٣ منها س^{٢} = $\frac{١}{٤}$

∴ س = ± $\frac{١}{٢}$

عند س = $\frac{١}{٢}$ ومنها ص = $\frac{٥}{٢}$

∴ النقطة $\left(\frac{١}{٢} ، \frac{٥}{٢}\right)$

∴ معادلة المماس : ص − $\frac{٥}{٢}$ = −٣ $\left(س - \frac{١}{٢}\right)$

أى أن : ٣ س + ص − ٤ = ٠

، عند س = $\frac{-١}{٢}$ ومنها ص = $\frac{-٥}{٢}$

معادلة المماس : ص + $\frac{٥}{٢}$ = −٣ $\left(س + \frac{١}{٢}\right)$

أى أن : ٣ س + ص + ٤ = ٠

٤٦

بوضع ص = ٠ فى معادلة المنحنى

∴ س^{٢} − س − ٢ = ٠

∴ (س − ٢) (س + ١) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = −١

∴ نقطتا التقاطع مع محور السينات هما :

(٢ ، ٠) ، (−١ ، ٠)

، ∵ معادلة المنحنى هى :

س^{٢} + ص^{٢} − س + ٢ ص − ٢ = ٠

∴ ص^{٢} + ٢ ص = ٢ + س − س^{٢}

وبإجراء الاشتقاق للطرفين بالنسبة لـ س

∴ ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ + ٢ $\frac{ءص}{ءس}$ = ١ − ٢ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ × (٢ ص + ٢) = ١ − ٢ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١ - ٢ س}{٢ ص + ٢}$

∴ ميل المماس عند النقطة (٢ ، ٠)

= $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(٢ ، ٠)}$ = $\frac{١ - ٢ (٢)}{٢ (٠) + ٢}$ = $\frac{-٣}{٢}$

∴ ميل العمودى = $\frac{٢}{٣}$

وتكون معادلة العمودى عند هذه النقطة : $\frac{ص - ٠}{س - ٢}$ = $\frac{٢}{٣}$

∴ ٣ ص = ٢ س − ٤

، ميل المماس عند النقطة (−١ ، ٠)

= $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(-١ ، ٠)}$ = $\frac{٣}{٢}$

∴ ميل العمودى = −$\frac{٢}{٣}$

وتكون معادلة العمودى عند هذه النقطة : $\frac{ص - ٠}{س + ١}$ = −$\frac{٢}{٣}$

∴ ٣ ص = −٢ س − ٢

٤٧

∵ د (س) = س^{٢} ، ر (س) = $\frac{١}{س}$

نوجد نقط التقاطع : س^{٢} = $\frac{١}{س}$ ∴ س^{٣} = ١

∴ س = ١ ومنها ص = ١ ∴ النقطة (١ ، ١)

$د َ(س) = ٢ س$

$\therefore د َ(١) = ٢$

∴ ميل المماس = ٢

∴ معادلة المماس $\frac{ص - ١}{س - ١} = ٢$

أى أن : $٢ س - ص - ١ = ٠$

٤٨

∴ معادلة المنحنى هى : $س^{٢} + ص^{٢} = ٥٠$

أى أن : $ص^{٢} = ٥٠ - س^{٢}$

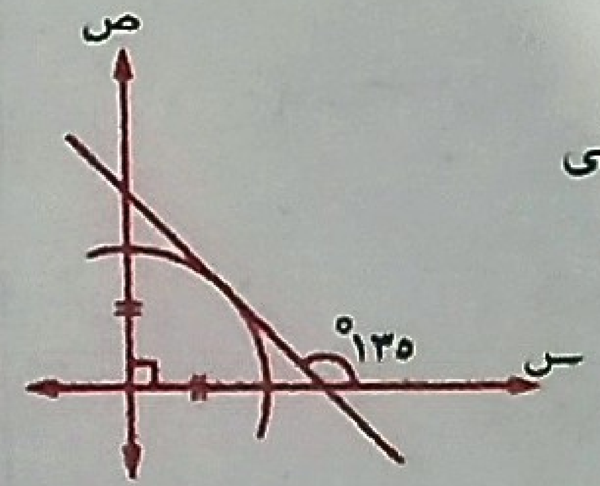
، ∵ (س ، ص) ∈ و س ∪ و ص ∪ الربع الأول

$\therefore ص = \sqrt{٥٠ - س^{٢}}$

ولإيجاد ميل المماس للمنحنى

عند أى نقطة :

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{-س}{\sqrt{٥٠ - س^{٢}}}$



، ∵ المماس للمنحنى يصنع مثلثًا متساوى الساقين

مع محورى الإحداثيات فى الربع الأول أى ميله

= طا ١٣٥° = −١

$\therefore \frac{دص}{دس} = -١$ ∴ $-١ = \frac{-س}{\sqrt{٥٠ - س^{٢}}}$

$\therefore س = \sqrt{٥٠ - س^{٢}}$

$\therefore س^{٢} = ٥٠ - س^{٢}$ ∴ $س^{٢} = ٢٥$

∴ س = ٥ أ، −٥ (مرفوض)

، عند س = ٥ فإن $ص = \sqrt{٥٠ - ٢٥} = ٥$

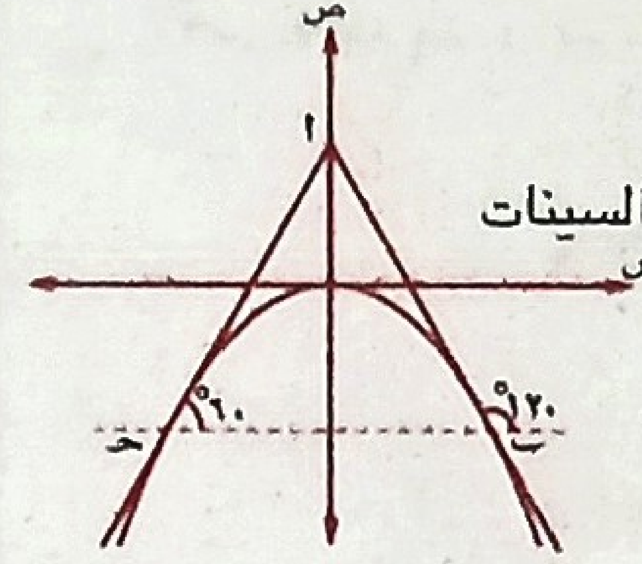
∴ المماس ميله = −١

ويمس المنحنى فى النقطة (٥ ، ٥) فتكون المعادلة :

ص − ٥ = −١ (س − ٥)

∴ ص + س − ١٠ = صفر

٤٩



من تماثل المنحنى :

∴ $\overline{ب ح}$ يوازى محور السينات

$\frac{دص}{دس} = -٢ س$

$-٢ س = طا ٦٠° = \sqrt{٣}$

$س = \frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ ومنها $ص = \frac{-٣}{٤}$

∴ النقطة ح $\left(\frac{-\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{-٣}{٤}\right)$

∴ معادلة المماس عند النقطة ح هى

$\frac{ص + \frac{٣}{٤}}{س + \frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \sqrt{٣}$ أى $٤ ص - ٤ \sqrt{٣} س - ٣ = ٠$

ولإيجاد نقطة تقاطع المماس مع محور الصادات نضع س = ٠

∴ $ص = \frac{٣}{٤}$ ∴ النقطة أ $\left(٠ ، \frac{٣}{٤}\right)$

٥٠

ص = س (س − ٥) أى أن : $ص = س^{٢} - ٥ س$

$\frac{دص}{دس} = ٢ س - ٥$

المماس والعمودى يصنعان زاويتين قياسيهما ٤٥° ، ١٣٥°

مع محور السينات

∴ الميل = ٢ س − ٥ = ١

∴ س = ٣ ومنها ص = −٦ ∴ النقطة : (٣ ، −٦)

أو الميل = ٢ س − ٥ = −١

∴ س = ٢ منها ص = −٦ ∴ النقطة : (٢ ، −٦)

٥١

$ص = \frac{١}{٣} س^{٣} - \frac{٣}{٢} س^{٢} + س + ١$

$\frac{دص}{دس} = س^{٢} - ٣ س + ١$

∴ المماس والعمودى يصنعان زوايا ٤٥° ، ١٣٥° مع

محور السينات

∴ $س^{٢} - ٣ س + ١ = ١$ ∴ $س^{٢} - ٣ س = ٠$

∴ س (س − ٣) = ٠

∴ س = ٠ ومنها ص = ١

أ، س = ٣ ومنها $ص = \frac{-١}{٢}$

∴ النقط : (٠ ، ١) ، $\left(٣ ، \frac{-١}{٢}\right)$

أو $س^{٢} - ٣ س + ١ = -١$

∴ $س^{٢} - ٣ س + ٢ = ٠$

∴ (س − ٢) (س − ١) = ٠

∴ س = ٢ ومنها $ص = \frac{-١}{٣}$

أ، س = ١ ومنها $ص = \frac{٥}{٦}$

∴ النقط : $\left(٢ ، \frac{-١}{٣}\right)$ ، $\left(١ ، \frac{٥}{٦}\right)$

٥٢

$ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} + ح س + ء$

∵ يمر بالنقطة (١ ، ٠)

∴ ٠ = أ + ب + ح + ء (١)

∵ يمر بالنقطة (٣ ، −٤)

−٤ = ٢٧ أ + ٩ ب + ٣ ح + ء (٢)

∵ يمر بالنقطة (٤ ، ٠)

٠ = ٦٤ أ + ١٦ ب + ٤ ح + ء (٣)

، ∵ $\frac{دص}{دس} = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س + ح$

، ميل المماس = ٠ عند س = ١

٠ = ٣ أ + ٢ ب + ح (٤)

بحل المعادلات ينتج أنه : بطرح (١) من (٢) والقسمة على ٢

١٣ أ + ٤ ب + ح = −٢ (٥)

بطرح (٢) من (٣) : ٣٧ أ + ٧ ب + ح = ٤ (٦)

بطرح (٤) من (٥) والقسمة على ٢ :

٥ أ + ب = −١ (٧)

بطرح (٥) من (٦) والقسمة على ٣ :

٨ أ + ب = ٢ (٨)

بحل (٧) ، (٨) : أ = ١ ، ب = −٦ ومنها

ح = ٩ ، ء = −٤

٥٣

بحل المعادلتين :

$(س - أ)^{٢} + ص^{٢} = ١٨$ ، $(س + أ)^{٢} + ص^{٢} = ١٨$

∴ $(س - أ)^{٢} = (س + أ)^{٢}$

$س^{٢} - ٢ أ س + أ^{٢} = س^{٢} + ٢ أ س + أ^{٢}$

∴ س = ٠

$ص^{٢} = ١٨ - أ^{٢}$ (١)

باشتقاق معادلة المنحنى الأول

$٢(س - أ) + ٢ص \frac{دص}{دس} = ٠$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{أ - س}{ص}$

باشتقاق معادلة المنحنى الثانى :

$٢(س + أ) + ٢ص \frac{دص}{دس} = ٠$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{-س - أ}{ص}$

∵ المنحنيين متقاطعان على التعامد

$\therefore \frac{أ - س}{ص} \times \frac{-س - أ}{ص} = -١$

$أ^{٢} - س^{٢} = ص^{٢}$ ، عند س = ٠

$ص^{٢} = أ^{٢}$ (٢)

ومن (١) ، (٢) : $١٨ - أ^{٢} = أ^{٢}$

$أ^{٢} = ٩$ أ = ± ٣

٥٤

بحل المعادلتين :

$ص = س^{٢} - ٣ س + ٥$ (١)

، $س^{٢} - ٣ س + ص^{٢} = ٢٥$ (٢)

من (١) : ∴ $س^{٢} - ٣ س = ص - ٥$ (٣)

وبالتعويض من (٢) في (٢) ∴ ص − ٥ + ص^{٢} = ٢٥

∴ ص^{٢} + ص − ٣٠ = ٠

∴ (ص + ٦) (ص − ٥) = ٠

∴ ص = −٦ أ، ص = ٥

عند ص = −٦

∴ س^{٢} − ٢ س + ٥ = −٦

∴ س^{٢} − ٢ س + ١١ = ٠ ليس لها حل في ح

وعند ص = ٥

∴ س^{٢} − ٢ س + ٥ = ٥

∴ س (س − ٢) = ٠ ∴ س = ٠ أ، س = ٢

∴ النقط (٠ ، ٥) ، (٢ ، ٥)

∴ ميل المماس $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س − ٢

$\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(٠ ، ٥)}$ = −٢

∴ معادلة العمودي $\frac{ص - ٥}{س - ٠}$ = $\frac{١}{٢}$

أي أن س − ٢ ص + ١٠ = ٠

$\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(٢ ، ٥)}$ = ٢

∴ معادلة العمودي $\frac{ص - ٥}{س - ٢}$ = $\frac{-١}{٢}$

أي أن س + ٢ ص − ١٢ = ٠

٥٥

نفرض أن المماس عند نقطة (أ ، أ^{٣}) يقطع المنحنى مرة أخرى عند نقطة (ب ، ب^{٣})

∵ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ س^{٢}

∴ ميل المماس عند (س = أ) = ٣ أ^{٢}

، معادلة المماس عند أ هي ص − أ^{٣} = ٣ أ^{٢} (س − أ)

نحل معادلة المماس مع معادلة المنحنى

وذلك بوضع ص = س^{٣} في معادلة المماس

∴ س^{٣} − أ^{٣} = ٣ أ^{٢} (س − أ)

∴ (س − أ) (س^{٢} + أ س + أ^{٢}) = ٣ أ^{٢} (س − أ)

∴ س = أ أ، س^{٢} + أ س + أ^{٢} = ٣ أ^{٢}

∴ س^{٢} + أ س − ٢ أ^{٢} = ٠

∴ (س − أ) (س + ٢ أ) = ٠

∴ س = أ أ، س = −٢ أ

∴ نقطة التقاطع الأخرى هي (−٢ أ ، −٨ أ^{٣})

∴ ميل المماس عند النقطة الأخرى

= ٣ (−٢ أ)^{٢} = ١٢ أ^{٢} = ٤ (٣ أ^{٢})

= ٤ أمثال ميله عند النقطة الأولى.

٥٦

نوجد أولاً نقطة التماس

عند س = ٢

⟸ هـ (٢) = ٤ × د (٢) = ٤ × ٣

= ١٢

نقطة التماس (٢ ، ١٢)

نوجد ميل المماس للمنحنى هـ (س)

هـ َ(س) = س^{٢} × ٤ دَ (٤ س − ٦)

+ ٢ س × د (٤ س − ٦)

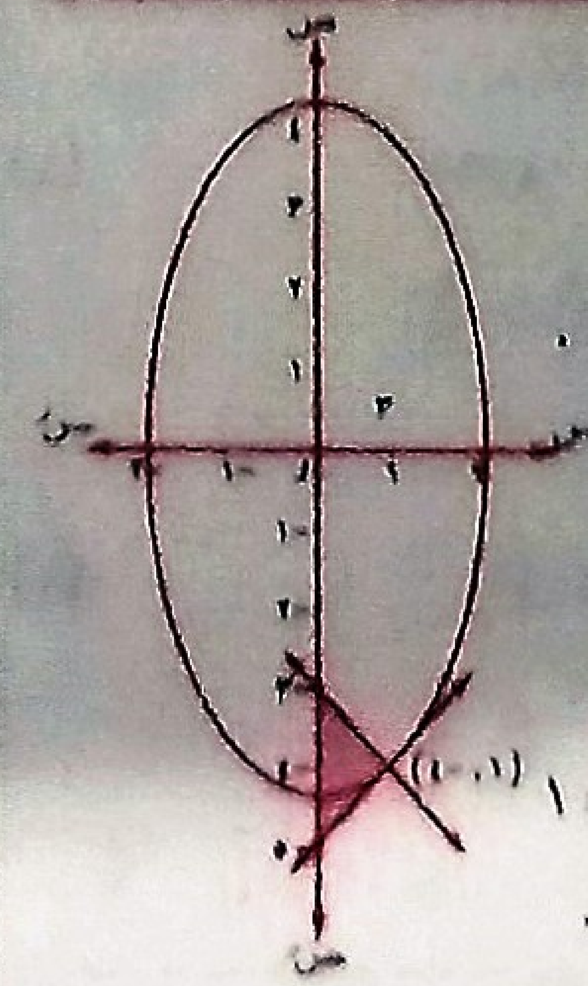
هـ َ(٢) = ٤ × ٤ × دَ (٢) + ٢ × ٢ × د (٢)

∴ هـ َ(٢) = ٤ × ٤ × $\frac{-٣}{٢}$ + ٤ × ٣ = −١٢

∴ معادلة المماس للمنحنى هـ (س) عند س = ٢

$\frac{ص - ١٢}{س - ٢}$ = −١٢ ١٢ س + ص − ٣٦ = ٠

٥٧



∵ ٤ س^{٢} + ص^{٢} = ٢٠

∴ ٨ س + ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-٤ س}{ص}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(١ ، -٤)}$ = ١

∴ معادلة المماس $\frac{ص + ٤}{س - ١}$ = ١

أي أن س − ص − ٥ = ٠

يقطع محور الصادات في (٠ ، −٥)

، ميل العمودي = −١

∴ معادلة العمودي $\frac{ص + ٤}{س - ١}$ = −١

س + ص + ٣ = ٠ يقطع محور الصادات في (٠ ، −٣)

طول القاعدة = −٣ − (−٥) = ٢ وحدة طول.

الارتفاع = ١ وحدة طول.

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ٢ × ١ = ١ وحده مربعة.

٥٨

س^{٢} + ٤ ص^{٢} = ٢٠ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

٢ س + ٨ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-س}{٤ ص}$

النقطة أ (٢ ، ٢) تحقق معادلة المنحنى

∴ ميل المماس عند هذه النقطة = $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(٢ ، ٢)}$ = $\frac{-١}{٤}$

، ميل العمودي = ٤

∴ معادلة المماس $\frac{ص - ٢}{س - ٢}$ = $\frac{-١}{٤}$

أي أن س + ٤ ص − ١٠ = ٠

وبوضع ص = ٠ ∴ س = ١٠

∴ المماس يقطع محور السينات في النقطة ب (١٠ ، ٠)

، معادلة العمودي $\frac{ص - ٢}{س - ٢}$ = ٤

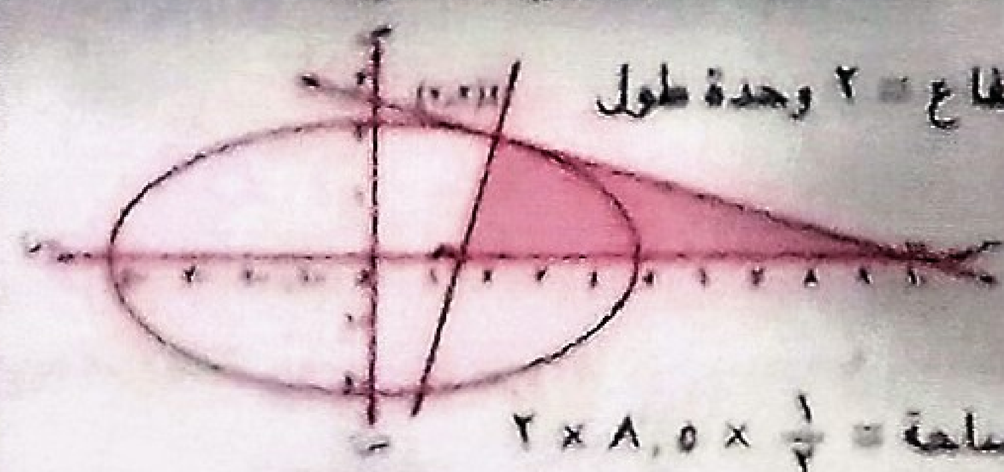
أي أن ٤ س − ص − ٦ = ٠

وبوضع ص = ٠ ∴ س = ١,٥

∴ العمودي يقطع محور السينات في النقطة حـ (١,٥ ، ٠)

ب حـ = ١٠ − ١,٥ = ٨,٥ وحدة طول

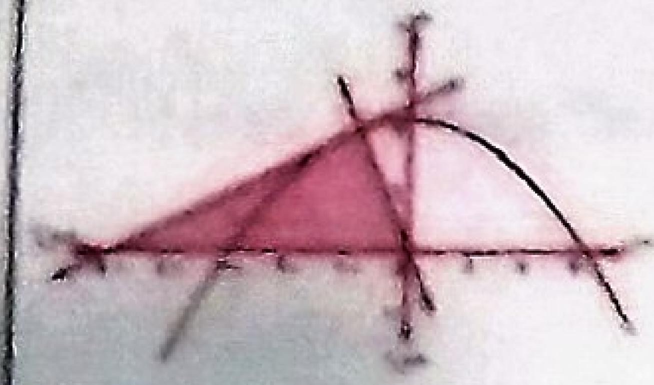
، الارتفاع = ٢ وحدة طول



∴ المساحة = $\frac{١}{٢}$ × ٨,٥ × ٢

= ٨,٥ وحدة مربعة.

٥٩



∵ ٤ ص = ٩ − س^{٢}

∴ ٤ $\frac{ءص}{ءس}$ = −٢ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-س}{٢}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(-١ ، ٢)}$ = $\frac{١}{٢}$ ∴ ميل المماس = $\frac{١}{٢}$

∴ معادلة المماس $\frac{ص - ٢}{س + ١}$ = $\frac{١}{٢}$

أي أن س − ٢ ص + ٥ = ٠

وبوضع ص = ٠ ∴ س = −٥

∴ المماس يقطع محور السينات في (−٥ ، ٠)

، ∵ ميل العمودي = −٢

معادلة العمودي $\frac{ص - ٢}{س + ١}$ = −٢

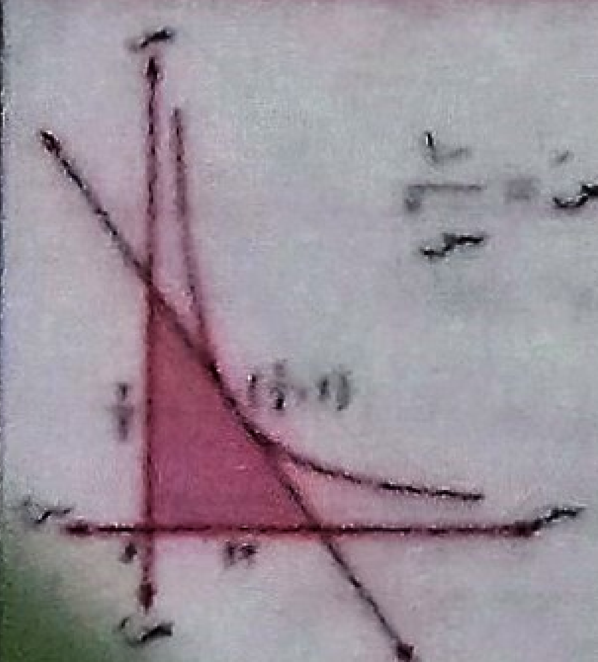
أي أن ٢ س + ص = ٠

وبوضع ص = ٠ ∴ س = ٠

∴ العمودي يقطع محور السينات في (٠ ، ٠)

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ٢ = ٥ وحدة مربعة.

٦٠



∵ ص = $\frac{١}{س}$ ∴ صَ = $\frac{-١}{س^{٢}}$

وبفرض أن نقطة التماس

هي : (أ ، $\frac{١}{أ}$)

∴ صَ = $\frac{-١}{أ^{٢}}$

∴ معادلة المماس هي ص − $\frac{١}{أ}$ = $\frac{-١}{أ^{٢}}$ (س − أ)

∴ س + أ^{٢} ص − ٢ أ = ٠

∴ المماس يقطع محور السينات عند (٢ أ ، ٠)

، يقطع محور الصادات عند (٠ ، $\frac{٢}{أ}$)

∴ مساحة المثلث المطلوب

= $\frac{١}{٢}$ × ٢ أ × $\frac{٢}{أ}$ = ٢ وحدة مربعة.

٦١

$س^٢ + ٣ س ص + ص^٢ + ١ = ٠$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$٢ س + ٣ ص + ٣ س \frac{ءص}{ءس} + ٢ ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{-٢ س - ٣ ص}{٣ س + ٢ ص}$

$\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(-١ ، ١)} = ١$ ∴ ميل المماس = ١

∴ ميل العمودى = -١

∴ معادلة المماس : $\frac{ص - ١}{س + ١} = ١$ منها س - ص + ٢ = ٠

، معادلة العمودى : $\frac{ص - ١}{س + ١} = -١$ منها س + ص = ٠

∴ المماس يقطع محور السينات فى نقطة ب (-٢ ، ٠)

، العمودى يقطع محور السينات فى نقطة حـ (٠ ، ٠)

∴ ب حـ = |-٢ - ٠| = ٢ وحدة طول

∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٢ × ١ = ١ وحدة مربعة.

٦٢

لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات نضع ص = ٠

∴ $س^٢ - ٢ س - ٢٤ = ٠$

∴ (س - ٦) (س + ٤) = ٠

∴ س = ٦ أ، س = -٤

∴ المنحنى يقطع محور السينات فى (٦ ، ٠) ، (-٤ ، ٠)

∵ $س^٢ + ص^٢ - ٢ س + ٤ ص - ٢٤ = ٠$

∴ $٢ س + ٢ ص \frac{ءص}{ءس} - ٢ + ٤ \frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١ - س}{ص + ٢}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(٦ ، ٠)} = \frac{-٥}{٢}$

∴ معادلة المماس $\frac{ص - ٠}{س - ٦} = \frac{-٥}{٢}$

أى أن : ٥ س + ٢ ص - ٣٠ = ٠ (١)

، $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(-٤ ، ٠)} = \frac{٥}{٢}$

∴ معادلة المماس $\frac{ص - ٠}{س + ٤} = \frac{٥}{٢}$

أى أن : ٥ س - ٢ ص + ٢٠ = ٠ (٢)

وبحل المعادلتين (١) ، (٢) :

∴ س = ١ ، ص = ١٢,٥

∴ المماسان يتقاطعا معًا فى (١ ، ١٢,٥)

∴ المثلث المكون من محور السينات والمماسين ارتفاعه = ١٢,٥ وحدة طول

وطول قاعدته = ٦ - (-٤) = ١٠ وحدة طول

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ١٢,٥ × ١٠

= ٦٢,٥ وحدة مربعة.

٦٣

د (س) = $س^٢$ ∴ دَ (س) = ٢ س

∴ دَ (٢) = ٤ ∴ ميل المماس = ٤

∴ معادلة المماس $\frac{ص - ٤}{س - ٢} = ٤$

أى أن : ٤ س - ص - ٤ = ٠

وبوضع ص = ٠ ∴ س = ١

∴ المماس يقطع محور السينات فى (١ ، ٠)

، ∵ ميل العمودى = $\frac{-١}{٤}$

∴ معادلة العمودى $\frac{ص - ٤}{س - ٢} = \frac{-١}{٤}$

أى أن : س + ٤ ص - ١٨ = ٠

وبوضع ص = ٠ ∴ س = ١٨

∴ العمودى يقطع محور السينات فى (١٨ ، ٠)

∴ المثلث المحدد بمحور السينات والمماس والعمودى ارتفاعه = ٤ وحدة طول

وطول قاعدته = ١٨ - ١ = ١٧ وحدة طول

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ١٧ = ٣٤ وحدة مربعة.

٦٤

∵ ص = $س^٢$ - س ، ٢ ص = $-س^٣$ - ٣ س

ولإيجاد نقط تقاطع المنحنيين

∴ ٢ $س^٢$ - ٢ س = $-س^٣$ - ٣ س

∴ $س^٣ + ٢ س^٢ + س = ٠$

∴ س ($س^٢$ + ٢ س + ١) = ٠

∴ س $(س + ١)^٢$ = ٠

∴ إما س = ٠ ومنها ص = ٠

أ، س + ١ = ٠ ∴ س = -١ ومنها ص = ٢

∴ المنحنيان يتقاطعان عند النقطتين : (٠ ، ٠) ، (-١ ، ٢)

∵ $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]$ للمنحنى الأول = ٢ س - ١

، $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]$ للمنحنى الثانى = $-\frac{٣}{٢} س^٢ - \frac{٣}{٢}$

∴ $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(٠ ، ٠)}$ للمنحنى الأول = -١

، $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(٠ ، ٠)}$ للمنحنى الثانى = $-\frac{٣}{٢}$

∴ ميل المماس للمنحنى الأول ≠ ميل المماس للمنحنى الثانى

∴ المنحنيان ليسا متماسين عند (٠ ، ٠)

، ∵ $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(-١ ، ٢)}$ للمنحنى الأول = -٣

، $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(-١ ، ٢)}$ للمنحنى الثانى = -٣

∴ ميل المماس للمنحنى الأول = ميل المماس للمنحنى الثانى = -٣

∴ المنحنيان يتماسان عند النقطة (-١ ، ٢) وتكون معادلة العمودى عندها

ص - ٢ = $\frac{١}{٣}$ (س + ١)

أى : س - ٣ ص + ٧ = ٠

٦٥

ص = ٣ $س^٢$ - ٥ س - ٢ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦ س - ٥

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(١ ، -٤)} = ١$

، ص = $س^٢$ - ٣ س - ٢ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س - ٣

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(١ ، -٤)} = -١$

∵ (١ ، -٤) تحقق كل من المعادلتين

حاصل ضرب ميلهما = -١

∴ المنحنيان يتقاطعان على التعامد.

٦٦

$(س - ١)^٢ + ص^٢ = ٢$ (١)

$(س + ١)^٢ + ص^٢ = ٢$ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) (بالطرح) :

$(س - ١)^٢ = (س + ١)^٢$ ∴ س - ١ = ± (س + ١)

∴ س = ٠ بالتعويض فى إحدى المعادلتين : ص = ± ١

∴ المنحنيان يتقاطعان فى النقطتين أ (٠ ، ١)

، ب (٠ ، -١) نوجد ميل المماس للمنحنى الأول بالاشتقاق بالنسبة إلى س

٢ (س - ١) + ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

$م_١ = \frac{ءص}{ءس} = \frac{١ - س}{ص}$

نوجد ميل المماس للمنحنى الثانى بالاشتقاق بالنسبة إلى س

٢ (س + ١) + ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

$م_٢ = \frac{ءص}{ءس} = \frac{-س - ١}{ص}$

أولًا : عند النقطة أ (٠ ، ١)

$م_١ = ١ ، م_٢ = -١$

∴ $م_١ × م_٢ = -١$

∴ المنحنيان يتقاطعان على التعامد عند النقطة (٠ ، ١)

معادلتا المماسين :

① $\frac{ص - ١}{س - ٠} = ١$ أي أن : س − ص + ١ = ٠

② $\frac{ص - ١}{س - ٠} = -١$ أي أن : س + ص − ١ = ٠

ثانيًا : عند النقطة ب (٠ ، −١)

$م_١ = -١ ، م_٢ = ١$ ∴ $م_١ × م_٢ = -١$

∴ المنحنيان يتقاطعان على التعامد عند النقطة (٠ ، −١)

معادلتا المماسين

① $\frac{ص + ١}{س - ٠} = -١$ أي أن : س + ص + ١ = ٠

② $\frac{ص + ١}{س - ٠} = ١$ أي أن : س − ص − ١ = ٠

٦٧

∵ النقطة (أ ، ب) تحقق معادلتي المستقيم والمنحنى

∴ المستقيم يقطع المنحنى في النقطة (أ ، ب)

، ∵ $\left(\frac{س}{أ}\right)^{ن} + \left(\frac{ص}{ب}\right)^{ن} = ٢$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\frac{ن}{أ}\left(\frac{س}{أ}\right)^{ن-١} + \frac{ن}{ب}\left(\frac{ص}{ب}\right)^{ن-١} \frac{دص}{دس} = ٠$

عند النقطة (أ ، ب)

$\frac{ن}{أ} × ١ + \frac{ن}{ب} × ١ × \frac{دص}{دس} = ٠$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{-ن}{أ} × \frac{ب}{ن} = \frac{-ب}{أ}$

(ميل المماس عند (أ ، ب))

، ∵ ميل المستقيم = $-\frac{١}{أ} \div \frac{١}{ب} = \frac{-ب}{أ}$

∴ المستقيم يمس المنحنى عند نقطة (أ ، ب) التي تقع على كليهما لأي قيمة لـ ن

٦٨

$\frac{١}{٢\sqrt{س}} + \frac{١}{٢\sqrt{ص}} \frac{دص}{دس} = ٠$ $\frac{دص}{دس} = \frac{-\sqrt{ص}}{\sqrt{س}}$

∴ $\left(\frac{دص}{دس}\right)_{(س_١ ، ص_١)} = \frac{-\sqrt{ص_١}}{\sqrt{س_١}}$

معادلة المماس : $\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{-\sqrt{ص_١}}{\sqrt{س_١}}$

$-\sqrt{ص_١}\, س + س_١\sqrt{ص_١} = \sqrt{س_١}\, ص - \sqrt{س_١}\, ص_١$

$\sqrt{ص_١}\, س + \sqrt{س_١}\, ص = س_١\sqrt{ص_١} + \sqrt{س_١}\, ص_١$

(بالقسمة على $\sqrt{س_١}\sqrt{ص_١}$)

∴ $\frac{س}{\sqrt{س_١}} + \frac{ص}{\sqrt{ص_١}} = \sqrt{س_١} + \sqrt{ص_١}$

∴ $\sqrt{س_١} + \sqrt{ص_١} = \sqrt{أ}$ ∴ $\frac{س}{\sqrt{س_١}} + \frac{ص}{\sqrt{ص_١}} = \sqrt{أ}$

∴ الجزئين المقطوعين من محوري الإحداثيات هما

$\sqrt{ص_١}\sqrt{أ}$ ، $\sqrt{س_١}\sqrt{أ}$

مجموعهم = $\sqrt{ص_١}\sqrt{أ} + \sqrt{س_١}\sqrt{أ}$

$= \sqrt{أ}\left(\sqrt{س_١} + \sqrt{ص_١}\right)$

$= \sqrt{أ}\sqrt{أ} = أ$ = مقدار ثابت.

٦٩

معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات ويبعد ١ وحدة طولية في الاتجاه الموجب لمحور السينات هي س = ١

وبحل معادلة المنحنى $ص^٢ = س^٣$ ، س = ١

∴ $ص^٢ = ١$ ∴ ص = ±١

∴ النقطتان هما : (١ ، ١) ، (١ ، −١)

∵ $ص^٢ = س^٣$ ∴ $٢ ص \frac{دص}{دس} = ٣ س^٢$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{٣ س^٢}{٢ ص}$

عند (١ ، ١)   ∴ $\left(\frac{دص}{دس}\right)_{(١ ، ١)} = \frac{٣}{٢}$

∴ معادلة المماس $\frac{ص - ١}{س - ١} = \frac{٣}{٢}$

أي أن : ٣ س − ٢ ص − ١ = ٠

، ميل العمودي $\frac{-٢}{٣}$

∴ معادلة العمودي $\frac{ص - ١}{س - ١} = \frac{-٢}{٣}$

∴ ٢ س + ٣ ص − ٥ = ٠

عند (١ ، −١)   ∴ $\left(\frac{دص}{دس}\right)_{(١ ، -١)} = \frac{-٣}{٢}$

معادلة المماس $\frac{ص + ١}{س - ١} = \frac{-٣}{٢}$

∴ ٣ س + ٢ ص − ١ = ٠ ، ميل العمودي = $\frac{٢}{٣}$

∴ معادلة العمودي $\frac{ص + ١}{س - ١} = \frac{٢}{٣}$

أي أن : ٢ س − ٣ ص − ٥ = ٠

٧٠

① (ب)   ② (أ)   ③ (جـ)

④ (جـ)   ⑤ (جـ)   ⑥ (ب)

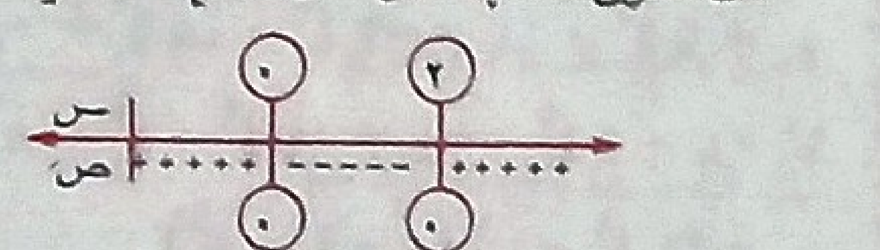
إرشادات لحل رقم ٧٠

① ∵ $ص = س^٣ - ٣ س^٢$

∴ $صَ = ٣ س^٢ - ٦ س = ٣ س (س - ٢)$

بدراسة إشارة صَ نجد أن

صَ تكون سالبة لكل س ∈]٠ ، ٢[



أي أن المماس يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات لكل س ∈]٠ ، ٢[

② ∵ $هـ(س) = \frac{د(٢ - س)}{س - ٢}$

∴ $هـَ(س) = \frac{(س - ٢) × دَ(٢ - س) × -١ - د(٢ - س)}{(س - ٢)^٢}$

، عند س = ٥

∴ $هـَ(٥) = \frac{-٣ دَ(-٣) - د(-٣)}{٩}$

، من الرسم : ∵ د(−٣) = ٣

، دَ(−٣) = ميل المماس للمنحنى = −١

∴ $هـَ(٥) = \frac{-٣ × -١ - ٣}{٩}$ = صفر

③ ∵ $ص = \frac{أ^٢}{س}$ ∴ $صَ = \frac{-أ^٢}{س^٢}$

∴ عند النقطة $(س_١ ، ص_١)$ ∴ $صَ = \frac{-أ^٢}{س_١^٢}$

∴ معادلة المماس هي :

$ص - ص_١ = \frac{-أ^٢}{س_١^٢}(س - س_١)$

أي أن : $س_١^٢ ص - س_١^٢ ص_١ = -أ^٢ س + أ^٢ س_١$

أي أن : $س_١^٢ ص + أ^٢ س = س_١^٢ ص_١ + أ^٢ س_١$

$= أ^٢ س_١ + أ^٢ س_١$

$= ٢ أ^٢ س_١$

ويوضع س = ٠   ∴ $ص = \frac{٢ أ^٢}{س_١}$

، ويوضع ص = ٠   ∴ $س = ٢ س_١$

∴ المماس يقطع محوري الإحداثيات

في النقطتين $\left(٠ ، \frac{٢ أ^٢}{س_١}\right)$ ، $(٢ س_١ ، ٠)$

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢} × \frac{٢ أ^٢}{س_١} × ٢ س_١ = ٢ أ^٢$

④ نفرض أن المماس ص = س + حـ يمس المنحنى عند النقطة (أ ، ب)

∴ ب = أ + حـ ، صَ = ١ عند النقطة (أ ، ب)

، ∵ $٩ س^٢ + ١٦ ص^٢ = ١٤٤$

∴ ١٨ س + ٣٢ ص صَ = ٠

، عند النقطة (أ ، ب)   ∴ ١٨ أ + ٣٢ ب × ١ = ٠

∴ ١٨ أ + ٣٢ (أ + حـ) = ٠

∴ ٥٠ أ + ٣٢ حـ = ٠

∴ $\boxed{أ = \frac{-١٦}{٢٥} حـ}$ ، $ب = \frac{-١٦}{٢٥} حـ + حـ$

∴ $\boxed{ب = \frac{٩}{٢٥} حـ}$

، ∵ (أ ، ب) تحقق المعادلة $٩ س^٢ + ١٦ ص^٢ = ١٤٤$

∴ $٩ أ^٢ + ١٦ ب^٢ = ١٤٤$

∴ $\frac{أ^٢}{١٦} + \frac{ب^٢}{٩} = ١$ ∴ $\frac{١٦}{٦٢٥} حـ^٢ + \frac{٩}{٦٢٥} حـ^٢ = ١$

∴ $\frac{٢٥ حـ^٢}{٦٢٥} = ١$ ∴ $حـ^٢ = ٢٥$ ∴ حـ = ±٥

⑤ ∵ العمودي على المنحنى يقطع من محوري الإحداثيات أجزاء متساوية في الطول

∴ ميل العمودي = ±١   ، ∵ $٩ ص^٢ = س^٣$

∴ $١٨ ص صَ = ٣ س^٢$

∴ $صَ = \frac{س^٢}{٦ ص}$

عند النقطة (أ ، ب)

∴ ميل المماس = $\frac{\text{أ}^{٢}}{\text{٦ ب}}$

∴ ميل العمودى = $\frac{\text{−٦ ب}}{\text{أ}^{٢}}$

∴ $\frac{\text{−٦ ب}}{\text{أ}^{٢}}$ = ± ١   ∴ ب = ± $\frac{١}{٦}$ $\text{أ}^{٢}$

، ∵ النقطة (أ ، ب) ∋ للمنحنى

∴ ٩ $\text{ب}^{٢}$ = $\text{أ}^{٣}$

∴ ٩ $(\pm \frac{١}{٦} \text{أ}^{٢})^{٢}$ = $\text{أ}^{٣}$

∴ $\frac{١}{٤}$ $\text{أ}^{٤}$ = $\text{أ}^{٣}$

∴ $\frac{١}{٤}$ أ = ١   ∴ أ = ٤

⑥ ∵ ٢ $\text{ص}^{٣}$ = أ $\text{س}^{٢}$ + $\text{س}^{٣}$

∴ ٦ $\text{ص}^{٢}$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ أ س + ٣ $\text{س}^{٢}$

، عند النقطة (أ ، أ)

∴ ٦ $\text{أ}^{٢}$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ $\text{أ}^{٢}$ + ٣ $\text{أ}^{٢}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{٥}{٦}$

∴ معادلة المماس هى : ص − أ = $\frac{٥}{٦}$ (س − أ)

وبوضع ص = ٠

∴ −أ = $\frac{٥}{٦}$ (س − أ)

∴ س = $\frac{-١}{٥}$ أ

وبوضع س = ٠

∴ ص − أ = − $\frac{٥}{٦}$ أ   ∴ ص = $\frac{١}{٦}$ أ

∴ المماس يقطع محورى الإحداثيات فى

النقطتين (٠ ، $\frac{١}{٦}$ أ) ، ($\frac{-١}{٥}$ أ ، ٠)

، ∵ $\text{ل}^{٢}$ + $\text{م}^{٢}$ = ٦١

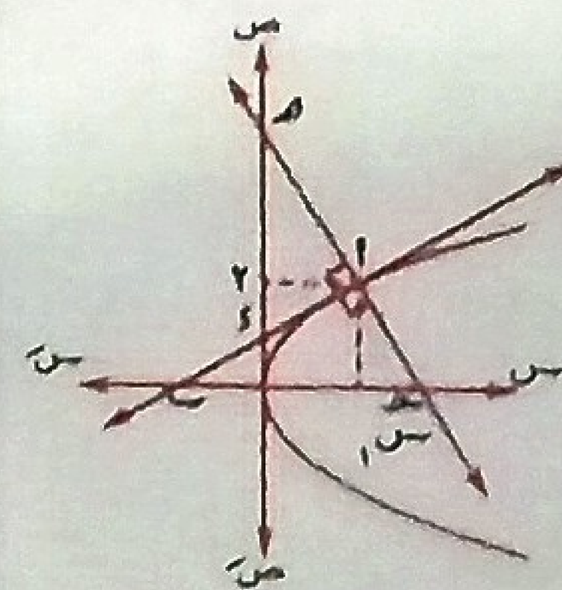
∴ $(\frac{١}{٦} \text{أ})^{٢}$ + $(\frac{-١}{٥} \text{أ})^{٢}$ = ٦١

∴ $\frac{١}{٣٦}$ $\text{أ}^{٢}$ + $\frac{١}{٢٥}$ $\text{أ}^{٢}$ = ٦١

∴ $\frac{٦١}{٩٠٠}$ $\text{أ}^{٢}$ = ٦١   ∴ $\text{أ}^{٢}$ = ٩٠٠

∴ أ = ± ٣٠

٧١



∵ أ ($\text{س}_{١}$ ، ٢)

تقع على المنحنى

$\text{ص}^{٢}$ = ٤ س

∴ ٤ = ٤ $\text{س}_{١}$

∴ $\text{س}_{١}$ = ١

∴ أ (١ ، ٢)

∵ $\text{ص}^{٢}$ = ٤ س

∴ ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٤ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{٢}{\text{ص}}$

∴ $(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}})_{(١ ، ٢)}$ = ١

∴ معادلة المماس $\frac{\text{ص − ٢}}{\text{س − ١}}$ = ١

∴ س − ص + ١ = ٠

∴ المماس يقطع محور السينات فى ب (−١ ، ٠) ومحور الصادات فى ء (٠ ، ١)

، معادلة العمودى $\frac{\text{ص − ٢}}{\text{س − ١}}$ = −١

أى أن : س + ص − ٣ = ٠

∴ العمودى يقطع محور السينات فى حـ (٣ ، ٠) ومحور الصادات فى هـ (٠ ، ٣)

ب حـ = ٣ − (−١) = ٤ وحدة طولية.

، ء هـ = ٣ − ١ = ٢ وحده طولية.

ب حـ : ء هـ = ٤ : ٢ = ٢ : ١

مساحة الشكل الرباعى ب حـ هـ ء

= مساحة Δ أ ب حـ + مساحة Δ أ ء هـ

= $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٢ + $\frac{١}{٢}$ × ٢ × ١ = ٥ وحدة مربعة.

٧٢

نوجد نقط تقاطع بحل معادلتى المنحنيين معًا

$\text{س}^{٢}$ − ٦ س + ١٠ = ٤ س − $\text{س}^{٢}$ − ٧

٢ $\text{س}^{٢}$ − ١٠ س + ١٧ = ٠

المميز سالب أى لا يوجد نقط تقاطع

نفرض ($\text{أ}_{١}$ ، $\text{ب}_{١}$) نقطة تماس للمنحنى الأول

($\text{أ}_{٢}$ ، $\text{ب}_{٢}$) نقطة تماس للمنحنى الثانى

ميل المماس $\frac{\text{ب}_{٢} - \text{ب}_{١}}{\text{أ}_{٢} - \text{أ}_{١}}$

= $\frac{(٤ \text{أ}_{٢} - \text{أ}_{٢}^{٢} - ٧) - (\text{أ}_{١}^{٢} - ٦ \text{أ}_{١} + ١٠)}{\text{أ}_{٢} - \text{أ}_{١}}$ (١)

ميل المماس الأول : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ س − ٦

∴ $(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}})_{(\text{أ}_{١} ، \text{ب}_{١})}$ = ٢ $\text{أ}_{١}$ − ٦   (٢)

ميل المماس الثانى : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٤ − ٢ س

$(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}})_{(\text{أ}_{٢} ، \text{ب}_{٢})}$ = ٤ − ٢ $\text{أ}_{٢}$ (٣)

من (٢) ، (٣) :

٢ $\text{أ}_{١}$ − ٦ = ٤ − ٢ $\text{أ}_{٢}$ ومنها $\text{أ}_{١}$ + $\text{أ}_{٢}$ = ٥   (٤)

من (١) ، (٢) ، (٣) :

$\frac{(٤ \text{أ}_{٢} - \text{أ}_{٢}^{٢} - ٧) - (\text{أ}_{١}^{٢} - ٦ \text{أ}_{١} + ١٠)}{\text{أ}_{٢} - \text{أ}_{١}}$ = ٢ $\text{أ}_{١}$ − ٦

∴ ٤ (٥ − $\text{أ}_{١}$) − $(٥ - \text{أ}_{١})^{٢}$ − ٧ − $\text{أ}_{١}^{٢}$ + ٦ $\text{أ}_{١}$ − ١٠

= (٢ $\text{أ}_{١}$ − ٦) (٥ − $\text{أ}_{١}$ − $\text{أ}_{١}$)

∴ ٢٠ − ٤ $\text{أ}_{١}$ − ٢٥ + ١٠ $\text{أ}_{١}$ − $\text{أ}_{١}^{٢}$ − ٧ − $\text{أ}_{١}^{٢}$

+ ٦ $\text{أ}_{١}$ − ١٠ = −٤ $\text{أ}_{١}^{٢}$ + ٢٢ $\text{أ}_{١}$ − ٣٠

∴ ٢ $\text{أ}_{١}^{٢}$ − ١٠ $\text{أ}_{١}$ + ٨ = ٠

∴ $\text{أ}_{١}^{٢}$ − ٥ $\text{أ}_{١}$ + ٤ = ٠   ∴ ($\text{أ}_{١}$ − ١) ($\text{أ}_{١}$ − ٤) = ٠

∴ $\text{أ}_{١}$ = ١   ومنها $\text{ب}_{١}$ = ٥

∴ النقطة (١ ، ٥)   ∴ ميل المماس = −٤

∴ معادلة المماس هى $\frac{\text{ص − ٥}}{\text{س − ١}}$ = −٤

أى أن : ٤ س + ص − ٩ = ٠

أو $\text{أ}_{١}$ = ٤   ومنها $\text{ب}_{١}$ = ٢   ∴ النقطة (٤ ، ٢)

∴ ميل المماس = ٢

∴ معادلة المماس هى $\frac{\text{ص − ٢}}{\text{س − ٤}}$ = $\frac{٢}{١}$

٢ س − ص − ٦ = ٠

اجابات تمارين 5

١

① (ب)   ② (د)   ③ (ب)   ④ (ب)   ⑤ (جـ)

٢

∵ $\text{س}^{٢}$ + $\text{ص}^{٢}$ − ٤ س + ٨ ص − ٦ = ٠

∴ ٢ س $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ + ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ − ٤ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ + ٨ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$

= صفر

∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ (٢ س − ٤) + $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ (٢ ص + ٨) = صفر

∵ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = ٤ عند (٣ ، ١)

٤ (٢ × ٣ − ٤) + $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ (٢ × ١ + ٨) = صفر

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = $\frac{-٤}{٥}$

٣

∵ $\text{س}^{٢}$ + س ص + $\text{ص}^{٢}$ = ٧

∴ ٢ س $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ + س $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ + ص $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

+ ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = صفر

∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ (٢ س + ص) + $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ (س + ٢ ص) = صفر

∵ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = ٠٫١ عند (−١ ، ٣)

٠٫١ (٢ × −١ + ٣) + $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ (−١ + ٢ × ٣) = صفر

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = $\frac{-١}{٥٠}$

٤

∵ $\text{س}^{٢}$ + $\text{ص}^{٢}$ + ٢ س − ٤ ص = ٢٧   (١)

∴ ٢ س $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ + ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ + ٢ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ − ٤ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = ٠

، عندما $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$

∴ ٢ س $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ + ٢ ص $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ + ٢ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ − ٤ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = ٠

وبالقسمة على $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

∴ ٢ س + ٢ ص + ٢ − ٤ = ٠

∴ س + ص = ١ ∴ ص = ١ − س (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ $س^2 + (١ - س)^2 + ٢ س - ٤ (١ - س) = ٢٧$

∴ $س^2 + ٢ س - ١٥ = ٠$

∴ (س + ٥) (س − ٣) = ٠

∴ س = −٥ ومنها ص = ٦ أ، س = ٣

ومنها ص = −٢

∴ النقط هى : (−٥ ، ٦) ، (٣ ، −٢)

٥

∵ $س^2 + ٤ س - ص = ٣$

∴ $٢ س \frac{دس}{دن} + ٤ \frac{دس}{دن} - \frac{دص}{دن} = ٠$

، ∵ $\frac{دص}{دن} = ٢ \frac{دس}{دن}$

∴ $٢ س \frac{دس}{دن} + ٤ \frac{دس}{دن} - ٢ \frac{دس}{دن} = ٠$

∴ ٢ س + ٤ − ٢ = ٠

∴ س = −١ ومنها ص = −٦

∴ النقطة هى (−١ ، −٦)

٦

∵ $ص = س^2 - \frac{١}{٤}$ ∴ $\frac{دص}{دن} = ٢ س \frac{دس}{دن}$

، عندما $\frac{دص}{دن} = ٣ \frac{دس}{دن}$ ∴ ٣ = ٢ س

∴ $س = \frac{٣}{٢}$ ومنها ص = ٢

∴ النقطة هى : $(\frac{٣}{٢} ، ٢)$

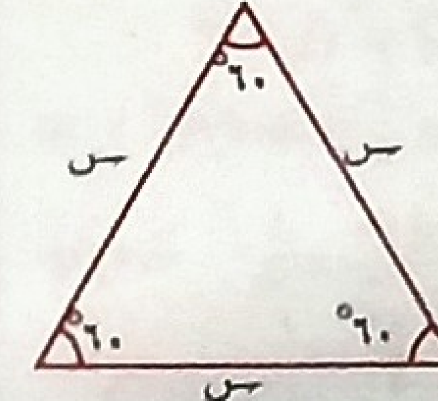
٧

① (جـ) ② (ب) ③ (ب) ④ (جـ)

⑤ (د) ⑥ (ب) ⑦ (د) ⑧ (د)

⑨ (ب) ⑩ (جـ) ⑪ (أ)

٨



∵ $م = \frac{١}{٢} س × س × حا ٦٠°$

∴ $م = \frac{\sqrt{٣}}{٤} س^2$

∴ $\frac{دم}{دن} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} س \frac{دس}{دن}$

∴ $\sqrt{٣} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} × س × ٠,١$ ∴ س = ٢٠ سم

٩

نفرض أن طول المستطيل = س ∴ عرضه = $\frac{١}{٢}$ س

∴ المساحة (م) = $\frac{١}{٢} س^2$

∴ $\frac{دم}{دن} = س \frac{دس}{دن}$ ٠,٢ = س × ٠,٠١

∴ س = ٢٠ ومنها المساحة = ٢٠٠ سم²

١٠

نفرض أن الطول = س ، العرض = س − ٢٠

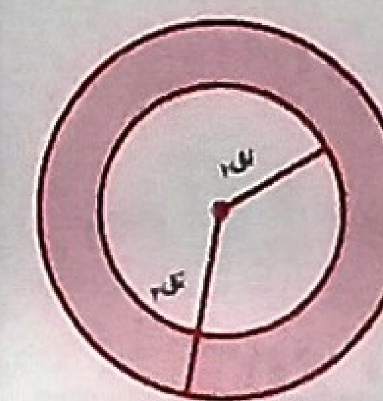
∴ المساحة (م) = س (س − ٢٠) = $س^2 - ٢٠ س$

∴ $\frac{دم}{دن} = (٢ س - ٢٠) \frac{دس}{دن}$

، عندما العرض = ٨٠ سم ∴ س = ١٠٠

∴ $\frac{دم}{دن} = (٢ × ١٠٠ - ٢٠) × -٠,٠٢٥ = -٤,٥$ سم²/ث

١١



∵ $ح = π نق_2^2 - π نق_1^2$

∴ $\frac{دح}{دن} = π × ٢ نق_2 \frac{دنق_2}{دن}$

$- π × ٢ نق_1 \frac{دنق_1}{دن}$

= π × ٢٨ × −٠,٢ − π × ١٦ × ٠,٤

= −١٢ π سم²/ث

١٢

∵ مساحة الدائرة م = π نق²

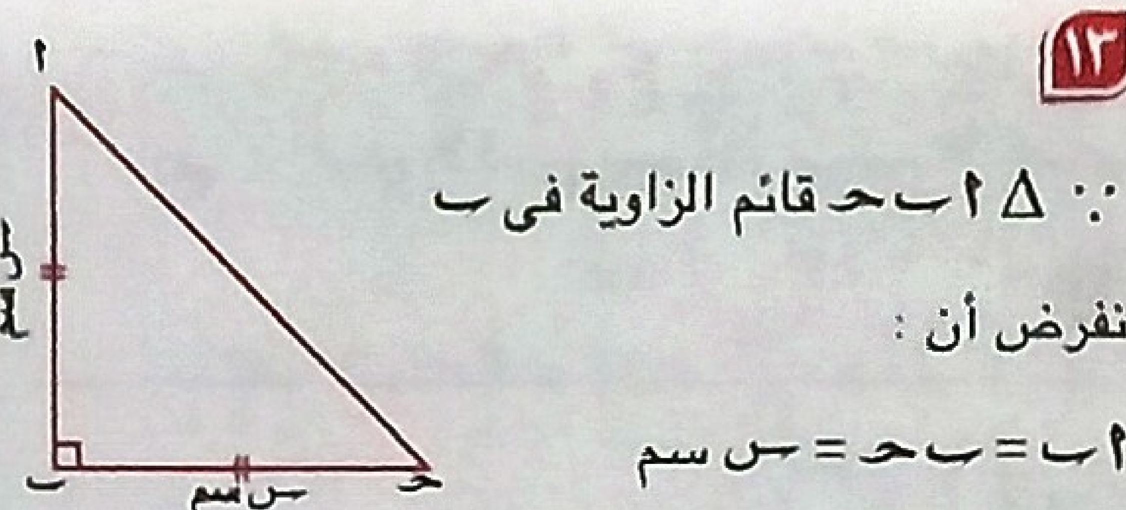
∴ $\frac{دم}{دن} = ٢ π نق × \frac{دنق}{دن}$

∴ $٢٧٧,٢ = ٢ × \frac{٢٢}{٧} × نق × ٢,١$ ∴ نق = ٢١ سم

، ∵ $نق = \frac{دنق}{دن} × ن$

∴ ٢١ = ٢,١ × ن ∴ ن = ١٠ ث

١٣



∵ Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب

نفرض أن :

أب = ب حـ = س سم

∴ المساحة (م) = $\frac{١}{٢} س^2$

∴ $\frac{دم}{دن} = س × \frac{دس}{دن}$ ∴ $٣٢ = ٨ × \frac{دس}{دن}$

∴ $\frac{دس}{دن} = ٤$ سم/ث

، ∵ المثلث أ ب حـ متساوى الساقين وقائم الزاوية

∴ $أحـ = \sqrt{س^2 + س^2} = س \sqrt{٢}$ سم

∴ المحيط (ح) = $٢ س + س \sqrt{٢} = (٢ + \sqrt{٢}) س$

∴ $\frac{دح}{دن} = (٢ + \sqrt{٢}) \frac{دس}{دن}$

= $(٢ + \sqrt{٢}) × ٤ = (٨ + ٤ \sqrt{٢})$ سم/ث

١٤

نفرض أن طول الحرف ل

∴ المساحة (م) = ٦ ل² ∴ $\frac{دم}{دن} = ١٢ ل \frac{دل}{دن}$

∴ ٠,٧٢ = ١٢ × ل × ٠,٠٢ ∴ ل = ٣ سم

ح = ل³

∴ $\frac{دح}{دن} = ٣ ل^2 \frac{دل}{دن}$

= ٣ × ٣² × ٠,٠٢ = ٠,٥٤ سم³/د

١٥

نفرض أن طول حرف المكعب ل

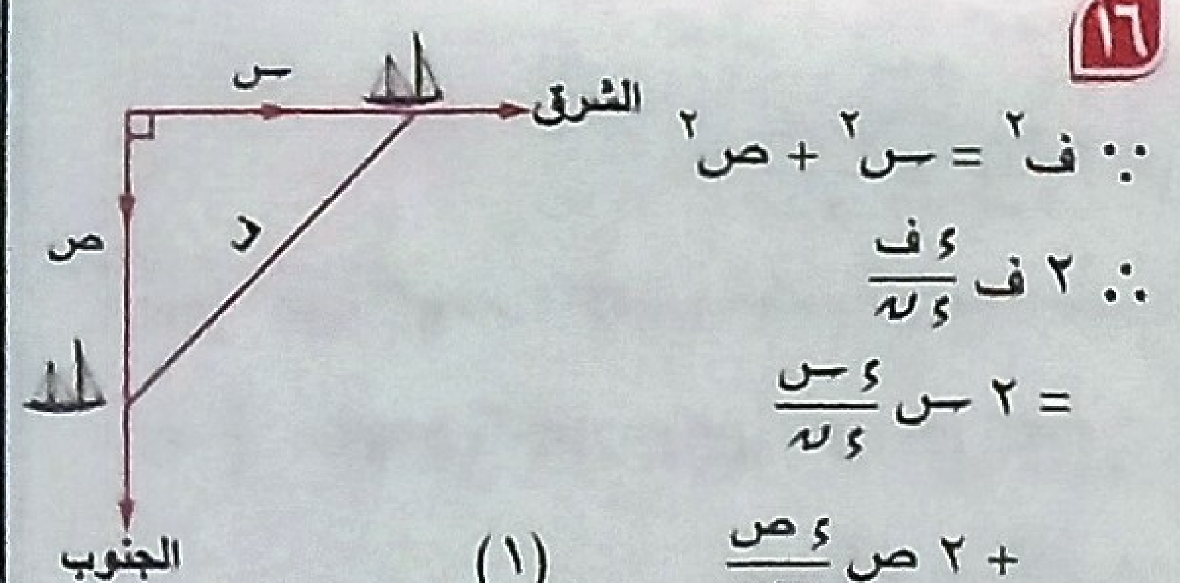
① الحجم (ح) = ل³ $\frac{دح}{دن} = ٣ ل^2 \frac{دل}{دن}$

٧٥ = ٣ ل² × ٠,٠١ ∴ ل = ٥٠ سم

② المساحة (م) = ٦ ل²

∴ $\frac{دم}{دن} = ١٢ ل \frac{دل}{دن} = ١٢ × ٥٠ × ٠,٠١ = ٦$ سم²/د

١٦



∵ $ف^2 = س^2 + ص^2$

∴ $٢ ف \frac{دف}{دن}$

$= ٢ س \frac{دس}{دن}$

$+ ٢ ص \frac{دص}{دن}$ (١)

بعد ساعتين : س = ٦٠ × ٢ = ١٢٠ كم

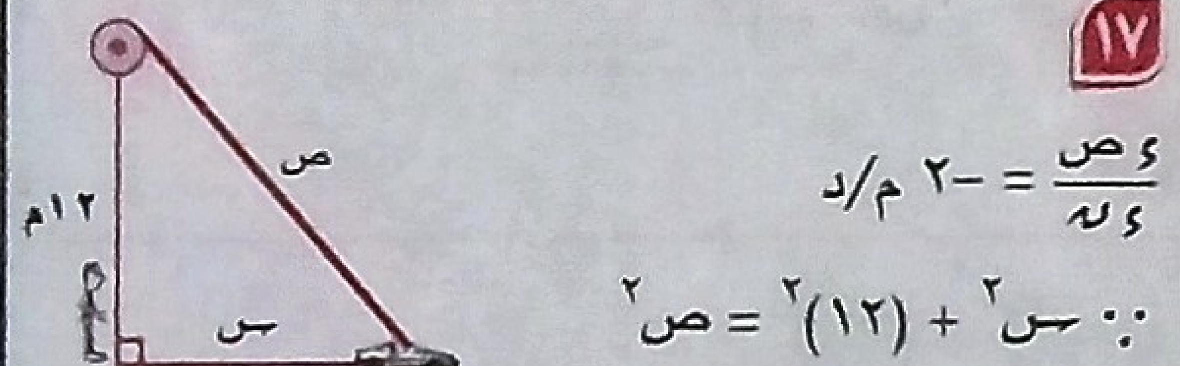
، ص = ٨٠ × ٢ = ١٦٠ كم ، ف = ٢٠٠ كم

من معادلة (١) :

$٢ × ٢٠٠ × \frac{دف}{دن} = ٢ × ١٢٠ × ٦٠ + ٢ × ١٦٠ × ٨٠$

∴ $\frac{دف}{دن} = ١٠٠$ كم/ساعة.

١٧



$\frac{دص}{دن} = -٢$ م/د

∵ $س^2 + (١٢)^2 = ص^2$

∴ $٢ س \frac{دس}{دن} = ٢ ص \frac{دص}{دن}$ (١)

عندما س = ٩ م

∴ $ص = \sqrt{٩^2 + ١٢^2} = ١٥$ م

ومن (١) : $٢ × ٩ × \frac{دس}{دن} = ٢ × ١٥ × -٢$

∴ $\frac{دس}{دن} = \frac{-١٠}{٣}$ م/د

أى أن السيارة تتحرك بسرعة $\frac{١٠}{٣}$ م/د نحو البرج

١٨



$\frac{ءص}{ءن} = ٦٥$ م/ث

∵ $ف^{٢} = (٥٠)^{٢} + ص^{٢}$

∴ $٢ف \frac{ءف}{ءن} = ٢ص \frac{ءص}{ءن}$ (١)

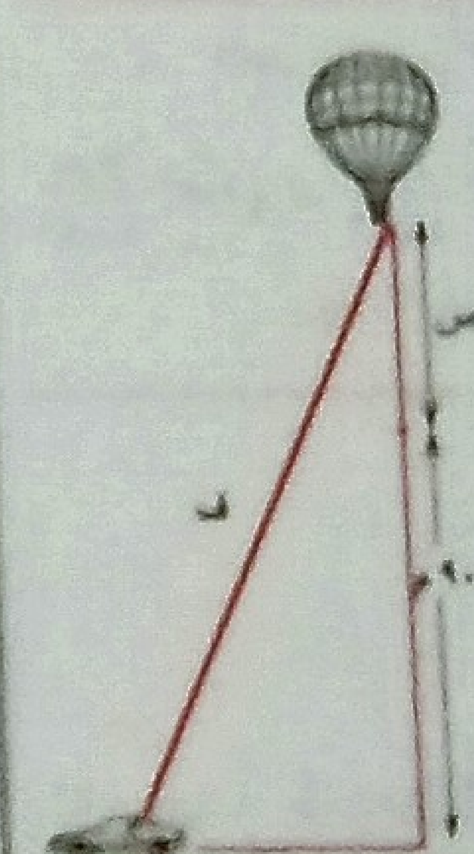
عندما ص = ١٢٠

∴ $ف = \sqrt{(١٢٠)^{٢} + (٥٠)^{٢}} = ١٣٠$ م

ومن (١): $٢ \times ١٣٠ \times \frac{ءف}{ءن} = ٢ \times ١٢٠ \times ٦٥$

∴ $\frac{ءف}{ءن} = ٦٠$ م/ث

١٩



$\frac{ءص}{ءن} = ١٥$ م/ث

، $\frac{ءس}{ءن} = ٢٥$ م/ث

$ف^{٢} = (٩٠ + ص)^{٢} + س^{٢}$

$٢ف \frac{ءف}{ءن} = ٢(٩٠ + ص) \frac{ءص}{ءن}$

$+ ٢س \frac{ءس}{ءن}$ (١)

بعد ثانيتين:

ص = ١٥ × ٢ = ٣٠ م ، س = ٢٥ × ٢ = ٥٠ م

ومن (١): ف = ١٣٠ م

$٢ \times ١٣٠ \times \frac{ءف}{ءن} = ٢(٩٠ + ٣٠) \times ١٥ + ٢ \times ٥٠ \times ٢٥$

∴ $\frac{ءف}{ءن} = \frac{٢٠٥}{١٣}$ م/ث

٢٠



$\frac{ءθ}{ءن} = ٠,١٢^{ء}$/د

$ظا\,θ = \frac{ع}{٢٠٠}$

$ع = ٢٠٠\, ظا\,θ$

$\frac{ءع}{ءن} = ٢٠٠\, قا^{٢}θ \frac{ءθ}{ءن}$

عند $θ = \frac{π}{٤}$

$\frac{ءع}{ءن} = ٢٠٠\, قا^{٢}(\frac{π}{٤}) \times ٠,١٢ = ٤٨$ متر/د

٢١



$\frac{ءع}{ءن} = ٤٢$ م/د

$ع = ١٥٠\, ظا\,θ$

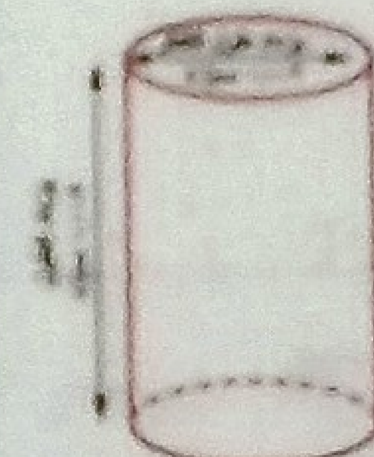
$\frac{ءع}{ءن} = ١٥٠\, قا^{٢}θ \frac{ءθ}{ءن}$

عندما ع = ١٥٠ فإن $θ = \frac{π}{٤}$

∴ $٤٢ = ١٥٠ \times ٢ \times \frac{ءθ}{ءن}$

∴ $\frac{ءθ}{ءن} = \frac{٧}{٥٠}^{ء}$/د

٢٢



الحجم (ح) = $π\, نق^{٢}\, ع$

∴ $\frac{ءح}{ءن} = π\, نق^{٢} \frac{ءع}{ءن} + π\, ع (٢\, نق \frac{ءنق}{ءن})$

، ∵ ق (القطر) = ٢ نق

∴ $\frac{ءق}{ءن} = ٢ \frac{ءنق}{ءن}$

∴ $\frac{ءنق}{ءن} = \frac{١}{٢} \frac{ءق}{ءن} = \frac{١}{٢} \times ٠,٠٠٢$

= ٠,٠٠١ سم/د

، عند ع = ٤٠ سم ، نق = ١ سم

، ∵ $\frac{ءع}{ءن} = ٠,٠٠٥$ سم/د

∴ $\frac{ءح}{ءن} = π \times (١)^{٢} \times ٠,٠٠٥ + π \times ٤٠ \times$

$(٢ \times ١ \times ٠,٠٠١) = ٠,٠٨٥\, π$ سم³/د

٢٣

حجم الماء الموجود بالوعاء $ح = π\, نق^{٢}\, ع$

∴ $ح = π \times ١٠٠\, ع$

∴ $\frac{ءح}{ءن} = ١٠٠\, π \times \frac{ءع}{ءن}$

∴ $٣٠\, π = ١٠٠\, π \times \frac{ءع}{ءن}$ ∴ $\frac{ءع}{ءن} = ٠,٣$ سم/ث

أى أن معدل ارتفاع الماء في الوعاء = ٠,٣ سم/ث

، يمتلئ الوعاء بالماء عندما تصبح ع = ٦٠ سم

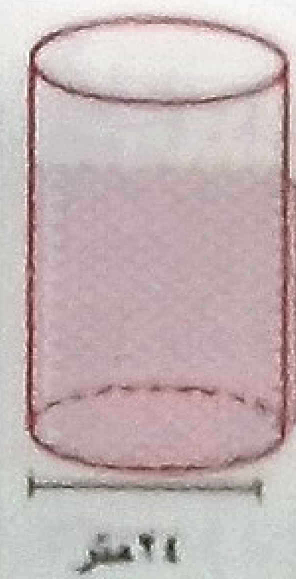
∴ يمتلئ الوعاء بعد مضى $\frac{٦٠}{(\frac{٣}{١٠})} = ٢٠٠$ ثانية

حل آخر:

الحجم الكلى للوعاء = $π \times ١٠٠ \times ٦٠ = ٦٠٠٠\, π$ سم³

∴ $ن = \frac{٦٠٠٠\, π}{٣٠\, π} = ٢٠٠$ ثانية

٢٤



$\frac{ءح}{ءن} = -٢$ م³/د

$ح = π\, نق^{٢}\, ع = π \times (١٢)^{٢} \times ع$

$\frac{ءح}{ءن} = π \times ١٤٤ \times \frac{ءع}{ءن}$

$-٢ = π \times ١٤٤ \times \frac{ءع}{ءن}$

∴ $\frac{ءع}{ءن} = \frac{-١}{٧٢\, π}$ م/د

٢٥

المساحة (م) = $٢\, π\, نق^{٢} + ٢\, π\, نق\, ع$

$= ٢\, π\, نق^{٢} + ٢\, π\, نق \times (٢\, نق)$

$= ٢\, π\, نق^{٢} + ٤\, π\, نق^{٢} = ٦\, π\, نق^{٢}$

∴ $\frac{ءم}{ءن} = ١٢\, π \times نق \times \frac{ءنق}{ءن}$

∴ $١٨\, π = ١٢\, π \times ٦ \times \frac{ءنق}{ءن}$

∴ $\frac{ءنق}{ءن} = \frac{١}{٤}$ سم/ث

٢٦

بفرض أن المسافة بين قمة السلم والأرض = ص

، المسافة بين طرفه السفلى والحائط = س

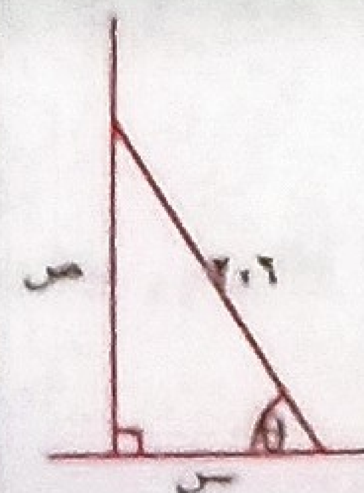
∴ $س^{٢} + ص^{٢} = (٢,٦)^{٢}$

بالاشتقاق بالنسبة إلى الزمن

$٢س \frac{ءس}{ءن} + ٢ص \frac{ءص}{ءن} = ٠$

$\frac{ءص}{ءن} = \frac{-س}{ص} \times \frac{ءس}{ءن}$

، ∵ $\frac{ءس}{ءن} = ٤$ متر/د



، عند س = ١

∴ $ص = \sqrt{(٢,٦)^{٢} - ١^{٢}} = ٢,٤$ متر

∴ $\frac{ءص}{ءن} = \frac{-١}{٢,٤} \times ٤ = \frac{-٥}{٣}$ متر/د

، ∵ $جا\,θ = \frac{ص}{٢,٦}$ ∴ $ص = ٢,٦\, جا\,θ$

∴ $\frac{ءص}{ءن} = ٢,٦\, جا\,θ \frac{ءθ}{ءن}$

∴ $\frac{-٥}{٣} = ٢,٦ \times \frac{١}{٢,٦} \times \frac{ءθ}{ءن}$

∴ $\frac{ءθ}{ءن} = (\frac{-٥}{٣})^{ء}$/د

٢٧

∵ $س^{٢} + ص^{٢} = (٦,٥)^{٢}$

∴ $٢س \frac{ءس}{ءن} + ٢ص \frac{ءص}{ءن} = ٠$ (١)

، عندما $\frac{ءس}{ءن} = ٠,٣$ م/د

، س = ٢,٥ م

∴ ص = ٦ م

ومن (١): $٢ \times ٢,٥ \times ٠,٣ + ٢ \times ٦ \times \frac{ءص}{ءن} = ٠$

∴ $\frac{ءص}{ءن} = -\frac{١}{٨}$ م/د

∴ معدل انخفاض الطرف العلوى للسلم = $\frac{١}{٨}$ م/د

وعندما يتحرك الطرف العلوى والسفلى بنفس المعدل

أى: $\frac{ءص}{ءن} = \frac{-ءس}{ءن}$

∴ $٢س \frac{ءس}{ءن} - ٢ص \frac{ءس}{ءن} = ٠$

∴ س − ص = ٠ أى: س = ص

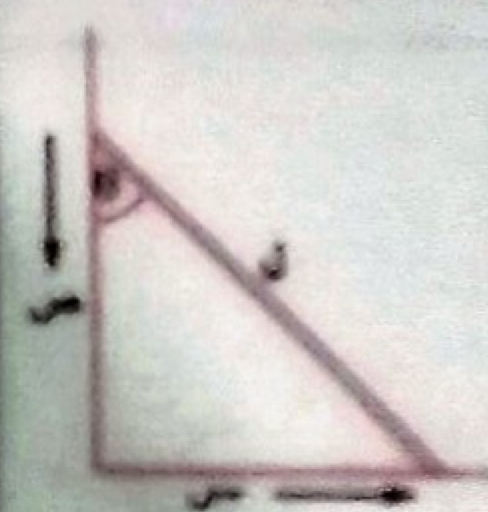
أى: $ص^{٢} + ص^{٢} = (٦,٥)^{٢}$

∴ $٢ص^{٢} = (٦,٥)^{٢}$

∴ $ص = \frac{١٣\sqrt{٢}}{٤}$

أى بعد الطرف العلوى للسلم عن الأرض = $\frac{١٣\sqrt{٢}}{٤}$ م

١٨



بفرض طول السلم = ل وحدة

س^{٢} + ص^{٢} = ل^{٢}

٢ س $\frac{ءس}{ءن}$ + ٢ ص $\frac{ءص}{ءن}$ = ٠

$\frac{ءس}{ءن} = \frac{-ص}{س} \times \frac{ءص}{ءن}$



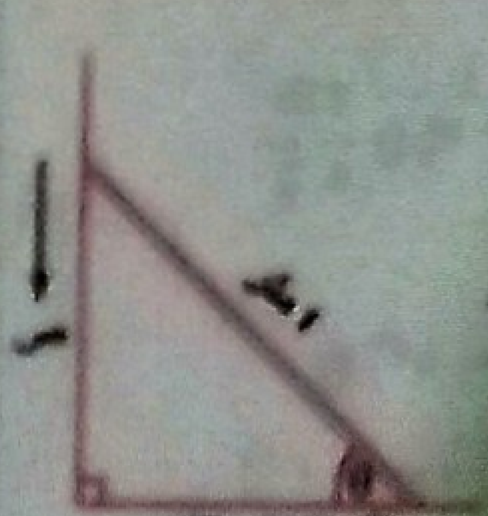
عندما ظا θ = $\frac{٣}{٤}$

س = ل جا θ ، ص = ل جتا θ

∴ $\frac{ءس}{ءن} = \frac{-٣}{٤} \times -ك$

= $\frac{٣ك}{٤}$ وحدة/ث (ك > ٠)

١٩



س^{٢} + ص^{٢} = ٤^{٢}

٢ س $\frac{ءس}{ءن}$ + ٢ ص $\frac{ءص}{ءن}$ = ٠

$\frac{ءص}{ءن} = \frac{-س}{ص} \times \frac{ءس}{ءن}$

عند θ = $\frac{\pi}{٣}$

فإن س = ٢٠٠ سم ، ص = ٢٠٠$\sqrt{٣}$ سم

$\frac{ءص}{ءن} = \frac{-٢٠٠}{٢٠٠\sqrt{٣}} \times ٢٠ = \frac{-٢٠\sqrt{٣}}{٣}$ سم/ث

∴ معدل هبوط الطرف العلوي للسطح = $\frac{٢٠\sqrt{٣}}{٣}$ سم/ث

٢٠

① (د)	② (ب)	③ (جـ)	④ (ب)
⑤ (جـ)	⑥ (جـ)	⑦ (أ)	⑧ (أ)
⑨ (جـ)	⑩ (ب)	⑪ (ب)	⑫ (أ)
⑬ (د)	⑭ (جـ)	⑮ (جـ)	⑯ (د)
⑰ (د)	⑱ (جـ)	⑲ (د)	⑳ (ب)
㉑ (أ)	㉒ (ب)		

٢١

∵ الطول يتناقص بمعدل ١ سم/ث

∴ بعد ن ثانية يصبح الطول = ١٢ - ١ × ن = ١٢ - ن

، ∵ العرض يتزايد بمعدل $\frac{١}{٢}$ سم/ث

∴ بعد ن ثانية يصبح العرض = ٥ + $\frac{١}{٢}$ ن

∴ المساحة (م) = (١٢ - ن) (٥ + $\frac{١}{٢}$ ن)

وعندما يكون الشكل مربعًا

∴ ١٢ - ن = ٥ + $\frac{١}{٢}$ ن   ∴ ٧ = ١$\frac{١}{٢}$ ن

∴ ن = $\frac{١٤}{٣}$ ث

$\frac{ءم}{ءن}$ = $\frac{١}{٢}$ (١٢ - ن) - (٥ + $\frac{١}{٢}$ ن)

∴ ٦ - $\frac{١}{٢}$ ن - ٥ - $\frac{١}{٢}$ ن = ٠   ∴ ن = ١ ث

وعندها م = (١٢ - ١) × (٥ + $\frac{١}{٢}$) = ٦٠.٥ سم^{٢}

٢٢

نفرض أن العرض = س   ∴ الطول = $\frac{٢٤}{س}$

∴ ① محيط المستطيل (ح) = ٢ (س + $\frac{٢٤}{س}$)

= ٢ س + $\frac{٤٨}{س}$

∴ $\frac{ءح}{ءن}$ = ٢ × $\frac{ءس}{ءن}$ - $\frac{٤٨}{س^{٢}}$ × $\frac{ءس}{ءن}$

∴ $\left(\frac{ءح}{ءن}\right)_{س=٤}$ = ٢ × ١ - $\frac{٤٨}{١٦}$ × ١

= -١ سم/ث

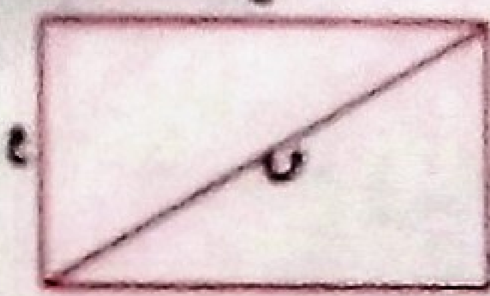
② عندما $\frac{ءح}{ءن}$ = ٠

∴ ٢ $\frac{ءس}{ءن}$ - $\frac{٤٨}{س^{٢}}$ × $\frac{ءس}{ءن}$ = ٠

∴ ٢ = $\frac{٤٨}{س^{٢}}$ ∴ س^{٢} = ٢٤

∴ س = ٢$\sqrt{٦}$ سم ومنها ص = ٢$\sqrt{٦}$ سم

٢٣



$\frac{ءل}{ءن}$ = ٦ سم/د

$\frac{ءع}{ءن}$ = -٢ سم/د

م = ل ع = ١٢٠٠   (١)

صفر = ل $\frac{ءع}{ءن}$ + ع $\frac{ءل}{ءن}$

∴ ل × -٢ + ع × ٦ = ٠   ∴ ل = ٣ ع

بالتعويض في (١)

(٣ ع) × ع = ١٢٠٠ منها ٣ ع^{٢} = ١٢٠٠

ع = ٢٠ سم   ∴ ل = ٦٠ سم

ق^{٢} = ل^{٢} + ع^{٢}

٢ ق $\frac{ءق}{ءن}$ = ٢ ل $\frac{ءل}{ءن}$ + ٢ ع $\frac{ءع}{ءن}$

ق $\frac{ءق}{ءن}$ = ل $\frac{ءل}{ءن}$ + ع $\frac{ءع}{ءن}$

$\sqrt{٢٠^{٢} + ٦٠^{٢}}$ × $\frac{ءق}{ءن}$ = ٦٠ × ٦ + ٢٠ × -٢

$\frac{ءق}{ءن}$ = $\frac{٨\sqrt{١٠}}{٥}$ سم/د

∴ القطر يتزايد بمعدل $\frac{٨\sqrt{١٠}}{٥}$ سم/د

٢٤

بفرض أن الارتفاع = ع ، طول قاعدة المثلث = ٣ ع

∴ المساحة (م) = $\frac{١}{٢}$ × ٣ ع × ع = $\frac{٣}{٢}$ ع^{٢}

∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = ٣ ع $\frac{ءع}{ءن}$ وعندما ع = ٩ سم

∴ ٠.٢٧ = ٣ × ٩ × $\frac{ءع}{ءن}$

∴ $\frac{ءع}{ءن}$ = ٠.٠١ سم/ث

٢٥

طولا ضلعي القائمة بعد مرور ن دقيقة

هما : (١٥ + ن) سم ، (٢٠ - $\frac{١}{٢}$ ن) سم

∴ مساحة المثلث م = $\frac{١}{٢}$ (١٥ + ن) (٢٠ - $\frac{١}{٢}$ ن)

∴ م = ١٥٠ + $\frac{٢٥}{٤}$ ن - $\frac{١}{٤}$ ن^{٢}

∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = $\frac{٢٥}{٤}$ - $\frac{١}{٢}$ ن

∴ $\left[\frac{ءم}{ءن}\right]_{ن=٥}$ = $\frac{٢٥}{٤}$ - $\frac{١}{٢}$ × ٥

= ٣.٧٥ سم^{٢}/دقيقة

، عندما $\frac{ءم}{ءن}$ = صفر   ∴ $\frac{٢٥}{٤}$ - $\frac{١}{٢}$ ن = صفر

∴ $\frac{١}{٢}$ ن = $\frac{٢٥}{٤}$ ∴ ن = ١٢.٥ دقيقة

وتكون مساحة المثلث عندها

= ١٥٠ + $\frac{٢٥}{٤}$ × ١٢.٥ - $\frac{١}{٤}$ (١٢.٥)^{٢}

= ١٨٩.٠٦٢٥ سم^{٢}

٢٦

∵ س^{٢} + ص^{٢} = ع^{٢}

∴ ٢ س $\frac{ءس}{ءن}$ + ٢ ص $\frac{ءص}{ءن}$

= ٢ ع $\frac{ءع}{ءن}$

، عندما س = ٨ ، ص = ١٥ ، ع = ١٧

، $\frac{ءع}{ءن}$ = ٧ سم/دقيقة

∴ ٨ $\frac{ءس}{ءن}$ + ١٥ $\frac{ءص}{ءن}$ = ١١٩   (١)

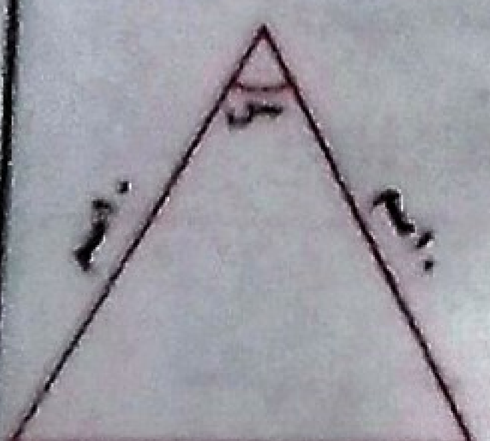
∵ س + ص + ع = ٤٠   ∴ $\frac{ءس}{ءن}$ + $\frac{ءص}{ءن}$ + $\frac{ءع}{ءن}$ = ٠

∴ $\frac{ءس}{ءن}$ + $\frac{ءص}{ءن}$ = -٧   (٢)

من (١) ، (٢) ∴ $\frac{ءص}{ءن}$ = ٢٥ سم/دقيقة.

، $\frac{ءس}{ءن}$ = -٣٢ سم/دقيقة.

٢٧



$\frac{ءس}{ءن}$ = ٣°/د

المساحة (م)

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ١٠ × جا س

= ٥٠ جا س

$\frac{ءم}{ءن}$ = ٥٠ جتا س $\frac{ءس}{ءن}$

وعندما س = ٦٠° ، $\frac{ءس}{ءن}$ = ٣° × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = $\frac{\pi}{٦٠}$ ء/د

∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = ٥٠ × جتا ٦٠° × $\frac{\pi}{٦٠}$ = $\frac{٥}{١٢}$ π سم^{٢}/د

٣٨

د س/د ن = −٣ سم/د

م = ١/٢ × ٢٠√٣ × √(س² − (١٠√٣)²)

= ١٠√٣ √(س² − ٣٠٠)

د م/د ن = ١٠√٣ × ٢ س/(٢ √(س² − ٣٠٠)) × د س/د ن

د م/د ن = ١٠√٣ س/√(س² − ٣٠٠) × د س/د ن

(د م/د ن) س = ٢٠√٣ = (١٠√٣ × ٢٠√٣)/√((٢٠√٣)² − ٣٠٠) × −٣ = −٦٠

معدل تناقص المساحة = ٦٠ سم²/ساعة.

٣٩

نفرض أن طولا ضلعين فى مثلث هما ل ، ع

، قياس الزاوية المحصورة بينهما هى θ

م = ١/٢ ل ع جا θ

د م/د ن = ١/٢ ع جا θ د ل/د ن + ١/٢ ل جا θ د ع/د ن

+ ١/٢ ل ع جتا θ د θ/د ن

، عند ل = ع = ١٠ ، θ = π/٣ فإن

∴ د م/د ن = ١/٢ × ١٠ × √٣/٢ × ٠,١

+ ١/٢ × ١٠ × √٣/٢ × ٠,١

+ ١/٢ × ١٠ × ١٠ × ١/٢ × ١/٥

= ٥,٨٦٦ سم²/ث

٤٠

م = ١/٢ أ ب = ٢٤ سم²

صفر = ١/٢ أ د ب/د ن + ١/٢ ب د أ/د ن

د أ/د ن = −أ/ب × د ب/د ن

عند ب = ٨ سم فإن أ = ٦ سم

د أ/د ن = −٦/٨ × ١ = −٣/٤ سم/ث

ظا هـ = أ/ب ∴ ب ظا هـ = أ

د ب/د ن ظا هـ + ب قا² هـ د هـ/د ن = د أ/د ن

١ × ٣/٤ + ٨ × (٥/٤)² × د هـ/د ن = −٣/٤

د هـ/د ن = −٣/٢٥ ء/ث = −٠,١٢ ء/ث

٤١

بفرض أن طول قطر الصفيحة "ل"

∴ أبعاد الصفيحة هى ٤/٥ ل ، ٣/٥ ل

∴ المساحة (م) = ٤/٥ ل × ٣/٥ ل = ١٢/٢٥ ل²

د م/د ن = ٢٤/٢٥ ل × د ل/د ن

٦٠ = ٢٤/٢٥ × ل × ٢,٥

∴ ل = ٢٥

∴ المساحة (م) = ٣٠٠ سم²

٤٢

د س/د ن = ٢٥ م/د

س² + (٣٠)² = ف²

٢ س د س/د ن = ٢ ف د ف/د ن (١)

وعندما ف = ٥٠ م

فإن: س = ٤٠ م

ومن (١): ٢ × ٤٠ × ٢٥ = ٢ × ٥٠ × د ف/د ن

∴ د ف/د ن = ٢٠ م/د

٤٣

بفرض أن أبعاد متوازى المستطيلات

س ، س + ٢ ، ٣ س

∴ الحجم (ح) = س (س + ٢) (٣ س)

= ٣ س³ + ٦ س²

د ح/د ن = (٩ س² + ١٢ س) د س/د ن

٠,٦ = (٩ س² + ١٢ س) × ٠,٠١

٩ س² + ١٢ س − ٦٠ = ٠

∴ ٣ س² + ٤ س − ٢٠ = ٠

∴ (س − ٢) (٣ س + ١٠) = ٠

س = ٢ ، س = −١٠/٣ (مرفوض)

∴ أبعاد القطعة هى ٢ سم ، ٤ سم ، ٦ سم

٤٤

بفرض أن أبعاد متوازى المستطيلات هى (س ، س ، ع)

∴ د س/د ن = ١ سم/د ، د ع/د ن = −٢ سم/د

الحجم (ح) = س² ع

∴ د ح/د ن = س² د ع/د ن + ٢ س ع × د س/د ن

= (٦)² × −٢ + ٢ × ٦ × ١ × ٢٤ = ٢١٦ سم³/د

، بفرض أن أبعاد متوازى المستطيلات عند أى لحظة زمنية هى :

(٦ + ن) ، (٦ + ن) ، (٢٤ − ٢ ن)

∴ الحجم (ح) = (٦ + ن)² (٢٤ − ٢ ن)

د ح/د ن = ٢ (٦ + ن) (٢٤ − ٢ ن) + (٦ + ن)² (−٢)

= ٢ (٦ + ن) (٢٤ − ٢ ن − ٦ − ن)

= ٢ (٦ + ن) (١٨ − ٣ ن)

وعندما د ح/د ن = صفر

∴ ١٨ − ٣ ن = ٠ ∴ ن = ٦ دقيقة.

٤٥

بفرض أن طول ضلع القاعدة = ارتفاع الهرم = س

∴ حجم الهرم = ١/٣ س³ سم³

∴ د ح/د ن = س² د س/د ن

∴ ١ = س² × ٠,٠١

س² = ١٠٠ ∴ س = ١٠ سم

∴ طول ضلع قاعدة الهرم = ١٠ سم

٤٦

نفرض أبعاد المنشور هى س ، س ، ص

∴ الحجم (ح) = س² × ص

∴ د ح/د ن = س² د ص/د ن + ٢ ص س د س/د ن

= (٤)² × −٤ + ٢ × ٨ × ٤ × ٢ = ٦٤ سم³/ث

، بفرض أن أبعاد المنشور عند أى لحظة هى :

(٤ + ٢ ن) ، (٤ + ٢ ن) ، (٨ − ٤ ن)

∴ الحجم (ح) = (٤ + ٢ ن)² (٨ − ٤ ن)

∴ د ح/د ن = ٤ (٤ + ٢ ن) (٨ − ٤ ن) + (٤ + ٢ ن)² (−٤)

= ٤ (٤ + ٢ ن) (٨ − ٤ ن − ٤ − ٢ ن)

= ٤ (٤ + ٢ ن) (٤ − ٦ ن)

عندما د ح/د ن = صفر ∴ ن = ٢/٣ ث

٤٧

مساحة الدائرة (م) = π نق²

∴ د م/د ن = ٢ π نق د نق/د ن

∵ د م/د ن = ثابت وليكن ث

∴ د نق/د ن = ث/(٢ π نق) (١)

، ∵ محيط الدائرة (ح) = ٢ π نق

∴ د ح/د ن = ٢ π د نق/د ن ومن (١)

= ٢ π × ث/(٢ π نق) = ث/نق

∴ د ح/د ن ∝ ١/نق

أى أن محيط الدائرة يتناسب عكسيا مع نق

٤٨

حجم الكرة (ح) = $\frac{4}{3}\pi\,\text{نق}^{3}$

$\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}} = 4\pi\,\text{نق}^{2}\,\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$

$\text{س} = 4\pi\,\text{نق}^{2}\,\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$ $\therefore \frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}} = \frac{\text{س}}{4\pi\,\text{نق}^{2}}$

مساحة الكرة (م) = $4\pi\,\text{نق}^{2}$

$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = 8\pi\,\text{نق}\,\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$

$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = 8\pi\,\text{نق} \times \frac{\text{س}}{4\pi\,\text{نق}^{2}}$

$= \frac{2\,\text{س}}{\text{نق}}$ سم²/ث

٤٩

$\because$ ميل المنحنى (م) = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 4 - 6\,\text{س}^{2}$

$\therefore \frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = -12\,\text{س}\,\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ (١)

، $\because \text{ص} = 4\,\text{س} - 2\,\text{س}^{3}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = (4 - 6\,\text{س}^{2})\,\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

$\therefore -5 = (4 - 6 \times 4)\,\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ $\therefore \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \frac{1}{4}$

ومن (١) :

$\therefore \frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = -12 \times 2 \times \frac{1}{4} = -6$ وحدات/ث

٥٠

$\text{ف}^{2} = 64 + (\text{س} - 9)^{2}$

$2\,\text{ف}\,\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$

$= 2(\text{س} - 9)\,\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

بعد ٣ ث : $\text{س} = 3 \times 5 = 15$

$\therefore \text{ف} = \sqrt{64 + 36} = 10$

$2 \times 10 \times \frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = 2\,(15 - 9) \times 5$

$\therefore \frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = 3$ سم/ث

٥١

بفرض أن النقطة هى (س ، ص)

$\text{ف} = \sqrt{(\text{س} - \text{س}_1)^{2} + (\text{ص} - \text{ص}_1)^{2}}$

$\text{ف} = \sqrt{(\text{س} - 1)^{2} + (\text{ص})^{2}}$

$\text{ف} = \sqrt{\text{س}^{2} + 1 - 2\,\text{س} + \text{س}^{2} + 5}$

$\text{ف}^{2} = 2\,\text{س}^{2} - 2\,\text{س} + 6$

$2\,\text{ف}\,\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = (4\,\text{س} - 2)\,\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

عند س = ٢ $\therefore \text{ف} = \sqrt{10}$

$2\sqrt{10} \times \frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = 6 \times 3\sqrt{10}$ $\therefore \frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = 9$ سم/ث

٥٢

بفرض أن مساحة Δ أ و ب = م

$\text{م} = \frac{1}{2}\,\text{و ب} \times \text{س}$

$= \frac{1}{2} \times 6 \times \text{س}$

$= 3\,\text{س}$

بالاشتقاق بالنسبة إلى الزمن «ن»

$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = 3\,\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ (١)

$\text{ص} = \text{س}^{3} + \text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = (3\,\text{س}^{2} + 1)\,\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

$\therefore 2 = 28\,\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ $\therefore \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \frac{1}{14}$

بالتعويض فى (١) :

$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = 3 \times \frac{1}{14} = \frac{3}{14}$ وحدة مربعة/ث

٥٣

مساحة شكل السداسى المنتظم الذى طول ضلعه س

$\text{م} = \frac{6}{4}\,\text{س}^{2}\,\text{ظتا}\,\frac{180}{6} = \frac{3}{2}\sqrt{3}\,\text{س}^{2}$

$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = 3\sqrt{3}\,\text{س}\,\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

$\left(\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}\right)_{\text{س} = 10} = 3\sqrt{3} \times 10 \times -0{,}1$

$= -3\sqrt{3}$ سم²/ث

٥٤

مساحة المثمن (م) = $\frac{8}{4}\,\text{س}^{2}\,\text{ظتا}\,\frac{180}{8}$

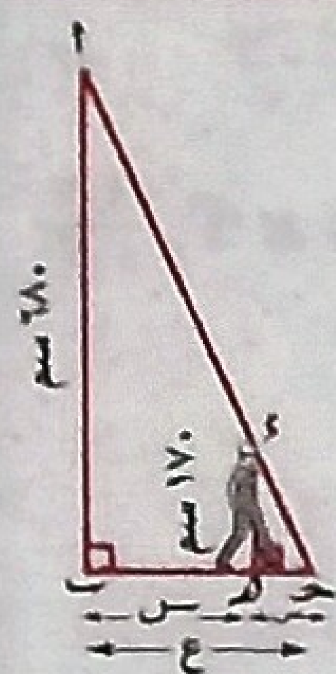
$\text{م} = 2\,\text{س}^{2}\,\text{ظتا}\,\frac{45}{2}$

$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = 4\,\text{س}\,\text{ظتا}\,\frac{45}{2}\,\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

$\left(\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}\right)_{\text{س} = 10} = 4 \times 10 \times \text{ظتا}\,\frac{45}{2} \times 0{,}2$

$\simeq 19{,}3$ سم²/ث

٥٥



نفرض أن : $\overline{\text{ده}}$ يمثل الرجل

، بعد الرجل عن قاعدة المصباح = س

، طول ظل الرجل = ص

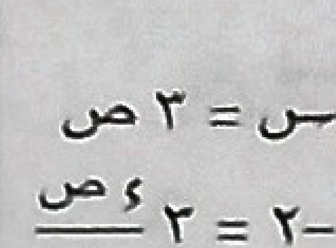
، المسافة التى تحركتها

نهاية ظل الرجل = ع



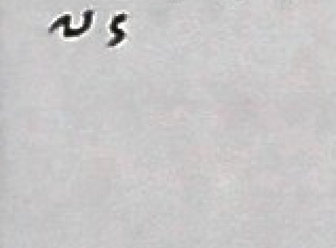
① من تشابه المثلثين أ ب حـ ، د هـ حـ

$\frac{\text{ص}}{\text{س} + \text{ص}} = \frac{170}{680} = \frac{1}{4}$



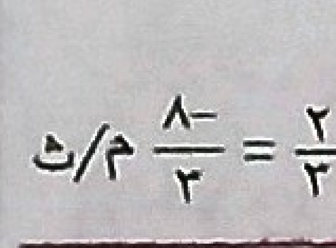
$\therefore \text{س} + \text{ص} = 4\,\text{ص}$ $\therefore \text{س} = 3\,\text{ص}$

$\therefore \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = 3\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ $\therefore -2 = 3\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$



$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{-2}{3}$ م/ث

② $\because \text{ع} = \text{س} + \text{ص}$

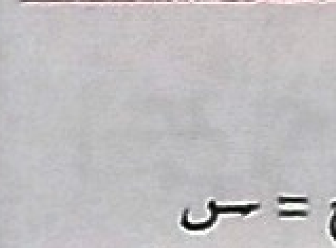


$\therefore \frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} + \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = -2 - \frac{2}{3} = \frac{-8}{3}$ م/ث

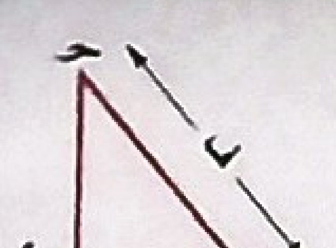
٥٦

نفرض أن بعد الرجل عن قاعدة المصباح = س

وطول ظل الرجل = ص



$\therefore \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = -150$ سم/ث

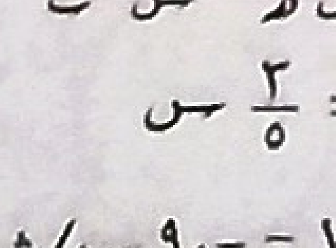


① من تشابه المثلثين أ د هـ ، أ حـ ب

$\frac{\text{ص}}{\text{س} + \text{ص}} = \frac{180}{480} = \frac{3}{8}$



$\therefore 5\,\text{ص} = 3\,\text{س}$ $\therefore \text{ص} = \frac{3}{5}\,\text{س}$



$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{3}{5}\,\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \frac{3}{5} \times -150 = -90$ سم/ث

② $\because \text{ف}^{2} = \text{س}^{2} + (300)^{2}$

$\therefore 2\,\text{ف}\,\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = 2\,\text{س}\,\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

وعند س = ٣٠٠

$\therefore \text{ف}^{2} = (300)^{2} + (300)^{2}$

$\therefore \text{ف} = 300\sqrt{2}$ سم

$\therefore 300\sqrt{2}\,\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = 300 \times -150$

$\therefore \frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = -75\sqrt{2}$ سم/ث

٥٧

من التشابه فى المثلثين أ ب حـ ، هـ د حـ

$\frac{\text{ص}}{\text{ص} + \text{س}} = \frac{1{,}8}{3} = \frac{3}{5}$

$\therefore 3\,\text{س} = 2\,\text{ص}$

بالاشتقاق بالنسبة إلى الزمن

$3\,\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = 2\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{3}{2} \times 1{,}2 = 1{,}8$ متر/ث

(معدل تغير طول ظل الرجل)

من Δ أ ب حـ :

$\text{ظا}\,\theta = \frac{3}{\text{س} + \text{ص}} = \frac{3}{\text{س} + \frac{3}{2}\,\text{س}} = \frac{6}{5\,\text{س}}$

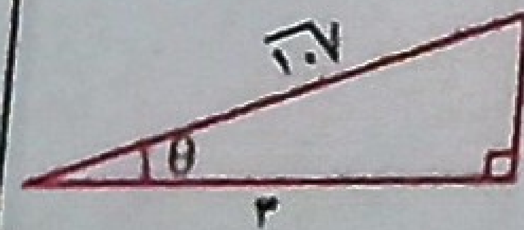
$\therefore \text{س} = \frac{6}{5}\,\text{ظتا}\,\theta$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى الزمن)

$\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \frac{6}{5}\,(-\text{قتا}^{2}\,\theta)\,\frac{\text{ء}\theta}{\text{ءن}}$

عند س = ٣,٦ فإن $\theta = \text{ظا}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

$\therefore 1{,}2 = \frac{6}{5} \times -\left(\frac{\sqrt{10}}{1}\right)^{2} \times \frac{\text{ء}\theta}{\text{ءن}}$

$\frac{\text{ء}\theta}{\text{ءن}} = \left(-\frac{1}{10}\right)^{\text{ء}}$ /ث



٥٨

أولاً : في Δ أ ب حـ

∴ ظا θ = $\frac{٧}{٢٤}$

∴ أحـ = ٧ ل

، أب = ٢٤ ل

∴ حـ ب = ٢٥ متر

∴ (٧ ل)^{٢} + (٢٤ ل)^{٢} = (٢٥)^{٢}

∴ ل = ١ ∴ أحـ = ٧ متر ، أب = ٢٤ متر

∴ حـ ء = ١١ $\frac{١}{٤}$ − ٧ = ٤ $\frac{١}{٤}$ متر

، ∵ Δ هـ حـ ء ~ Δ هـ ل ن

∴ $\frac{١,٧}{٤,٢٥}$ = $\frac{ص}{س + ص}$

∴ $\frac{٢}{٥}$ = $\frac{ص}{س + ص}$

∴ ٢ س = ٣ ص

∴ ٢ $\frac{ءس}{ءن}$ = ٣ $\frac{ءص}{ءن}$

∴ ٢ (−٦) = ٣ ($\frac{ءص}{ءن}$)

∴ $\frac{ءص}{ءن}$ = −٤ م/دقيقة

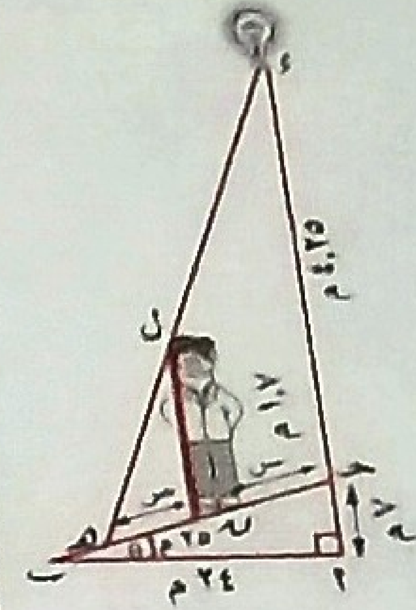
∴ معدل انكماش طول ظل الرجل = ٤ م/دقيقة

ثانيًا : ف = س + ص

∴ $\frac{ءف}{ءن}$ = $\frac{ءس}{ءن}$ + $\frac{ءص}{ءن}$

= −٦ − ٤ = −١٠ م/دقيقة

∴ نهاية ظل الرجل تقترب بمعدل ١٠ م / دقيقة من أعلى نقطة للمنحدر.

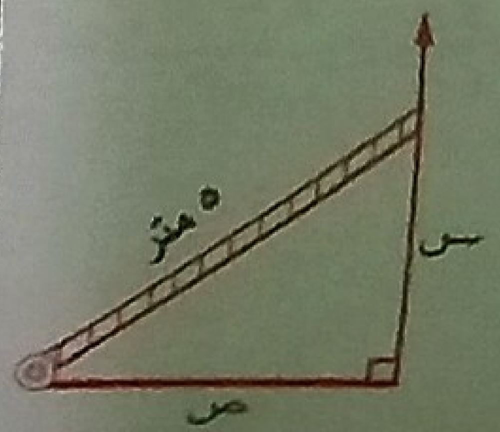


٥٩

$\frac{ءس}{ءن}$ = ١ متر/د

ص طول مسقط القضيب على الأرض

س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥



٢ س $\frac{ءس}{ءن}$ + ٢ ص $\frac{ءص}{ءن}$ = ٠

$\frac{ءص}{ءن}$ = $\frac{−س}{ص}$ $\frac{ءس}{ءن}$

عندما س = ٣ متر ∴ ص = ٤

∴ $\frac{ءص}{ءن}$ = $\frac{−٣}{٤}$ × ١ = $\frac{−٣}{٤}$ متر/د

٦٠

$\frac{ءس}{ءن}$ = −١٠ م/ث

ظا θ = $\frac{س}{٥}$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى الزمن)

قا^{٢} θ $\frac{ءθ}{ءن}$ = $\frac{١}{٥}$ $\frac{ءس}{ءن}$

$\frac{س^{٢} + ٢٥}{٢٥}$ × $\frac{ءθ}{ءن}$ = $\frac{١}{٥}$ × −١٠

$\frac{ءθ}{ءن}$ = $\frac{−٥٠}{س^{٢} + ٢٥}$

∴ ($\frac{ءθ}{ءن}$)$_{س = ٥}$ = (−١)ء/ث

٦١

نفرض أن سمك طبقة الجليد عند أي لحظة = س سم

∴ حجم الجليد (ح) = $\frac{٤}{٣}$ π (٦ + س)^{٣} − $\frac{٤}{٣}$ π (٦)^{٣}

∴ $\frac{ءح}{ءن}$ = ٤ π (٦ + س)^{٢} × $\frac{ءس}{ءن}$

∴ −٢٠ = ٤ π (٦ + س)^{٢} × $\frac{−١}{٢٠ π}$

∴ س = ٤

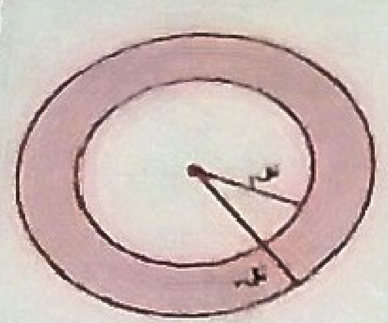
، ∵ مساحة السطح الخارجي (م) = ٤ π (٦ + س)^{٢}

∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = ٨ π (٦ + س) × $\frac{ءس}{ءن}$

= ٨ × π × ١٠ × $\frac{−١}{٢٠ π}$ = −٤ سم^{٢}/دقيقة

∴ مساحة السطح الخارجي تتناقص بمعدل ٤ سم^{٢}/دقيقة

٦٢



① حجم مادة الكرة (ح)

= حجم الكرة الخارجية

− حجم الكرة الداخلية

∴ ح = $\frac{٤}{٣}$ π نق$_{٢}^{٣}$ − $\frac{٤}{٣}$ π نق$_{١}^{٣}$

= $\frac{٤}{٣}$ π (نق$_{٢}^{٣}$ − نق$_{١}^{٣}$)

∴ $\frac{ءح}{ءن}$ = $\frac{٤}{٣}$ π [٣ نق$_{٢}^{٢}$ $\frac{ءنق_{٢}}{ءن}$ − ٣ نق$_{١}^{٢}$ $\frac{ءنق_{١}}{ءن}$]

∴ صفر = $\frac{٤}{٣}$ π [٣ × ٨١ × $\frac{ءنق_{٢}}{ءن}$ − ٣ × ٩ × ١]

∴ $\frac{ءنق_{٢}}{ءن}$ = $\frac{١}{٩}$ سم/ث

② مساحة الكرة (م) = ٤ π نق$_{٢}^{٢}$

∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = ٨ π نق$_{٢}$ $\frac{ءنق_{٢}}{ءن}$ = ٨ π × ٩ × $\frac{١}{٩}$

= ٨ π سم^{٢}/ث

③ بفرق أن السمك "ل" ∴ ل = نق$_{٢}$ − نق$_{١}$

$\frac{ءل}{ءن}$ = $\frac{ءنق_{٢}}{ءن}$ − $\frac{ءنق_{١}}{ءن}$ = $\frac{١}{٩}$ − ١ = − $\frac{٨}{٩}$ سم/ث

٦٣

$\frac{ءح}{ءن}$ = −٢٠ سم^{٣}/ث

∵ ح = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} ∴ $\frac{ءح}{ءن}$ = ٤ π نق^{٢} $\frac{ءنق}{ءن}$

عندما نق = ١٠

−٢٠ = ٤ π × ١٠^{٢} $\frac{ءنق}{ءن}$ ∴ $\frac{ءنق}{ءن}$ = $\frac{−١}{٢٠ π}$ سم/ث

المساحة (م) = ٤ π نق^{٢}

$\frac{ءم}{ءن}$ = ٨ π نق $\frac{ءنق}{ءن}$

($\frac{ءم}{ءن}$)$_{نق = ١٠}$ = ٨ × π × ١٠ × $\frac{−١}{٢٠ π}$

= −٤ سم^{٢}/ث

٦٤

بفرض أن حجم البالون «ح»

① ح = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

$\frac{ءح}{ءن}$ = ٤ π نق^{٢} $\frac{ءنق}{ءن}$ (١)

− ٨ π = ٤ π × (٤)^{٢} × $\frac{ءنق}{ءن}$

∴ $\frac{ءنق}{ءن}$ = − $\frac{١}{٨}$ سم/د

② بعد ستة دقائق

ح = ٨٤ π − ٨ π × ٦ = ٣٦ π

∴ ٣٦ π = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} ومنها نق = ٣ سم

ومن (١) :

− ٨ π = ٤ π × (٣)^{٢} × $\frac{ءنق}{ءن}$

∴ $\frac{ءنق}{ءن}$ = $\frac{−٢}{٩}$ سم/د

٦٥

∵ ح = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

∴ $\frac{ءح}{ءن}$ = ٤ π نق^{٢} × $\frac{ءنق}{ءن}$ (١)

∵ م = ٤ π نق^{٢}

∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = ٨ π نق × $\frac{ءنق}{ءن}$ وبتربيع الطرفين

∴ ($\frac{ءم}{ءن}$)^{٢} = (٨ π نق × $\frac{ءنق}{ءن}$)^{٢} (٢)

بضرب (١) × $\frac{ءنق}{ءن}$

∴ $\frac{ءح}{ءن}$ × $\frac{ءنق}{ءن}$ = ٤ π نق^{٢} × ($\frac{ءنق}{ءن}$)^{٢}

بالتعويض من (٢) :

∴ $\frac{ءح}{ءن}$ × $\frac{ءنق}{ءن}$ = ٤ π نق^{٢} × ($\frac{ءم}{ءن}$)^{٢} × $\frac{١}{٦٤ π^{٢} نق^{٢}}$

∴ $\frac{ءح}{ءن}$ × $\frac{ءنق}{ءن}$ = $\frac{١}{١٦ π}$ × ($\frac{ءم}{ءن}$)^{٢}

، عند $\frac{ءح}{ءن}$ = π سم^{٣}/ث ، $\frac{ءم}{ءن}$ = ٢ π سم^{٢}/ث

∴ π × $\frac{ءنق}{ءن}$ = $\frac{١}{١٦ π}$ × ٤ π^{٢}

∴ $\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}} = \frac{1}{4}$ سم/ث

، ∵ هـ = ٤ π نق^2 وبالتعويض من (١)

∴ $\frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} = \frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} \div \frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}} = \pi \div \frac{1}{4} = 4\pi$ سم^2

٦٦

نفرض أن الضغط = ض ، الحجم = ع

، ∵ ض ∝ $\frac{1}{\text{ع}}$ ∴ ض = $\frac{\text{م}}{\text{ع}}$ حيث م ثابت

، عند ض = ١٠٠٠ ث جم / سم^2 ، ع = ٢٥٠ سم^3

∴ ض × ع = ١٠٠٠ × ٢٥٠ = ٢٥٠٠٠٠ (١)

(بالاشتقاق بالنسبة إلى ن)

∴ $\frac{\text{ءض}}{\text{ءن}}$ × ع + $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$ × ض = ٠

$\frac{\text{ءض}}{\text{ءن}} = \frac{-\text{ض}}{\text{ع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$

من (١) :

عندما يكون الحجم = ١٠٠ سم^3 فإن الضغط = ٢٥٠٠ ث جم/سم^2

∴ $\frac{\text{ءض}}{\text{ءن}} = -\frac{2500}{100} \times -2$ = ٥٠ ث جم/سم^2/ث

٦٧

∵ جـ = ت × م (بالاشتقاق بالنسبة إلى ن)

$\frac{\text{ءجـ}}{\text{ءن}}$ = ت $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}$ + م $\frac{\text{ءت}}{\text{ءن}}$ (١)

$\frac{\text{ءجـ}}{\text{ءن}}$ = ١ ڤولت/ث ، $\frac{\text{ءت}}{\text{ءن}} = \frac{-1}{2}$ أمبير/ث

عند جـ = ١٢ ڤولت ، ت = ٢ أمبير

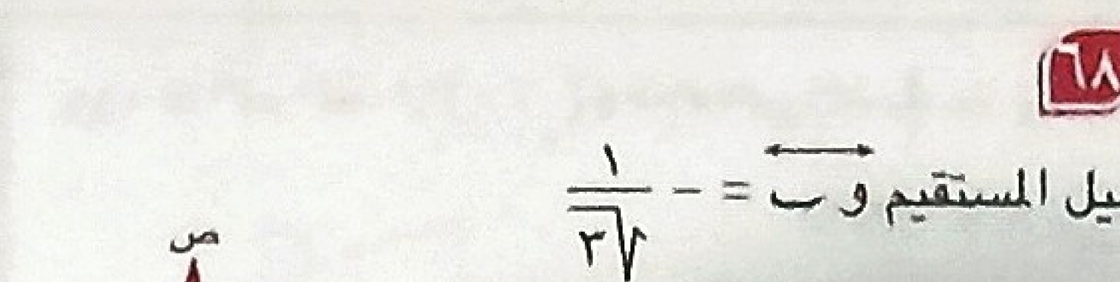
∴ م = $\frac{\text{جـ}}{\text{ت}} = \frac{12}{2}$ = ٦ أوم

بالتعويض فى (١)

١ = ٢ × $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}$ + ٦ × $\frac{-1}{2}$

∴ $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}$ = ٢ أوم/ث

٦٨



ميل المستقيم $\overleftrightarrow{\text{وب}}$ = $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

∴ قياس الزاوية التى يصنعها المستقيم $\overleftrightarrow{\text{وب}}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات = ١٥٠°

، ∵ ق(∠أ و س) = ٣٠° ∴ ق(∠ب و أ) = ٦٠°

بعد مرور ن دقيقة من تحرك النقطة ب تكون النقطة أ قد تحركت (ن + ١) دقيقة وبالتالى فإن النقطة ب تكون قد قطعت مسافة وب = ٦ ن متر

، النقطة أ تكون قد قطعت مسافة و أ = ٤ (ن + ١) = (٤ ن + ٤) متر

وبفرض أن ف المسافة بين النقطتين أ ، ب بعد مرور ن دقيقة من تحرك ب

فإن : ف^2 = (أب)^2 = (و أ)^2 + (وب)^2 − ٢ × و أ × وب × جتا ٦٠°

∴ ف^2 = (٤ ن + ٤)^2 + (٦ ن)^2 − ٢ (٤ ن + ٤) × ٦ ن × $\frac{1}{2}$

∴ ف^2 = ٢٨ ن^2 + ٨ ن + ١٦ (١)

وبعد دقيقتين من تحرك النقطة ب

∴ ف^2 = ١١٢ + ١٦ + ١٦ = ١٤٤

∴ ف = ١٢ متر

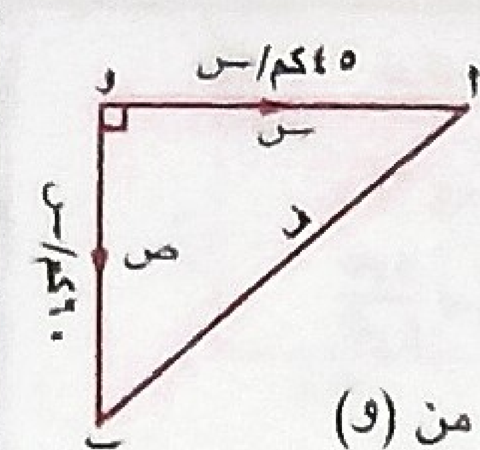
(باشتقاق العلاقة (١) بالنسبة إلى ن)

∴ ٢ ف $\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$ = ٥٦ ن + ٨

∴ ٢ × ١٢ × $\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$ = ١٢٠

∴ $\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$ = ٥ متر/دقيقة.

٦٩



نفرض أن القطار الأول على بعد (س) كم من (و)

والقطار الثانى على بعد (ص) كم من (و)

والمسافة بين القطارين (ف) كم

∴ ف^2 = س^2 + ص^2

∴ ٢ ف $\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$ = ٢ س $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ + ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ (١)

، عند الساعة الثالثة ظهرًا

∴ س = ٤ × ٤٥ = ١٨٠ كم

، ص = ٣ × ٦٠ = ١٨٠ كم

∴ ف = $\sqrt{(180)^2 + (180)^2}$ = ١٨٠ $\sqrt{2}$ كم

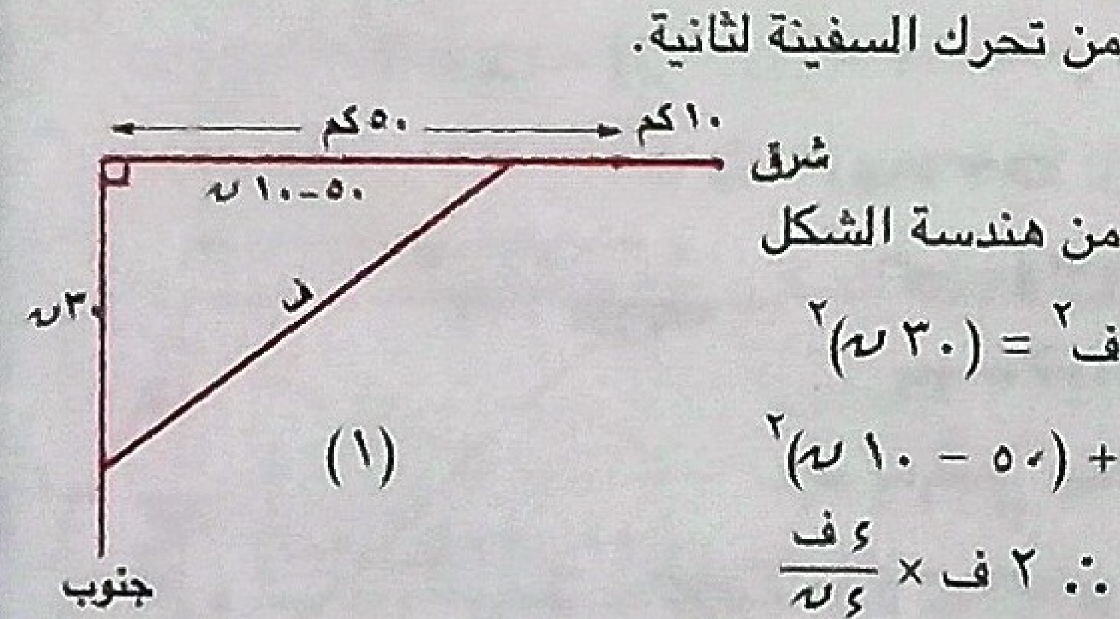
من المعادلة (١) :

٢ × ١٨٠ $\sqrt{2}$ $\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$ = ٢ (١٨٠) (٤٥) + ٢ (١٨٠) (٦٠)

∴ $\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$ = ٥٢٫٥ $\sqrt{2}$ كم/س

٧٠

نفرض أن ف البعد بين السفينتين بعد مرور ن ساعة من تحرك السفينة الثانية.



من هندسة الشكل

ف^2 = (٣٠ ن)^2 + (٥٠ − ١٠ ن)^2 (١)

∴ ٢ ف × $\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$ = ٢ (٣٠ ن) (٣٠) + ٢ (٥٠ − ١٠ ن) (−١٠)

فى الساعة العاشرة صباحًا ∴ ن = ١

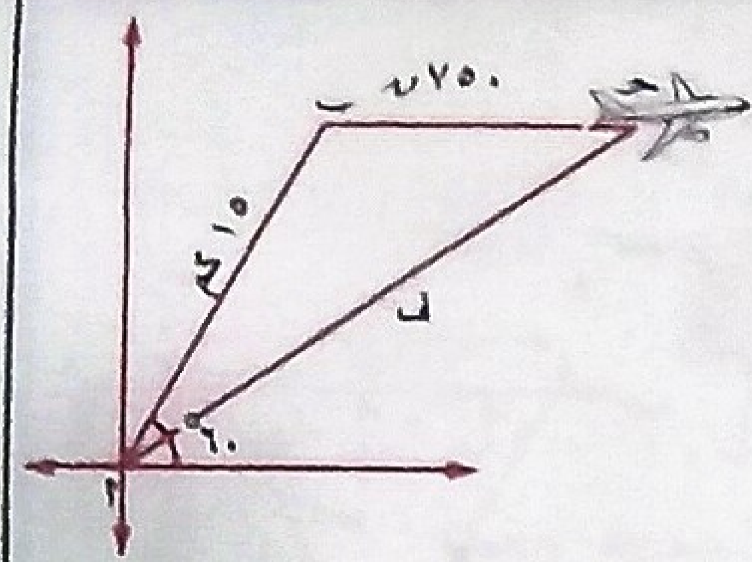
ومن (١) : ∴ ف = ٥٠ كم

∴ ٢ (٥٠) $\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$ = ٢ (٣٠) (٣٠) + ٢ (٤٠) (−١٠)

∴ $\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$ = ١٠ كم/ساعة

∴ $\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$ > ٠ ∴ السفينتان تتباعدان.

٧١



من هندسة الشكل

ف^2 = (١٥)^2 + (٧٥٠ ن)^2 − ٢ (١٥) (٧٥٠ ن) جتا ١٢٠°

ف^2 = ٢٢٥ + ٥٦٢٥٠٠ ن^2 + ١١٢٥٠ ن (١)

∴ ٢ ف $\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$ = ٢ × ٥٦٢٥٠٠ ن + ١١٢٥٠

بعد مرور ٢ دقيقة

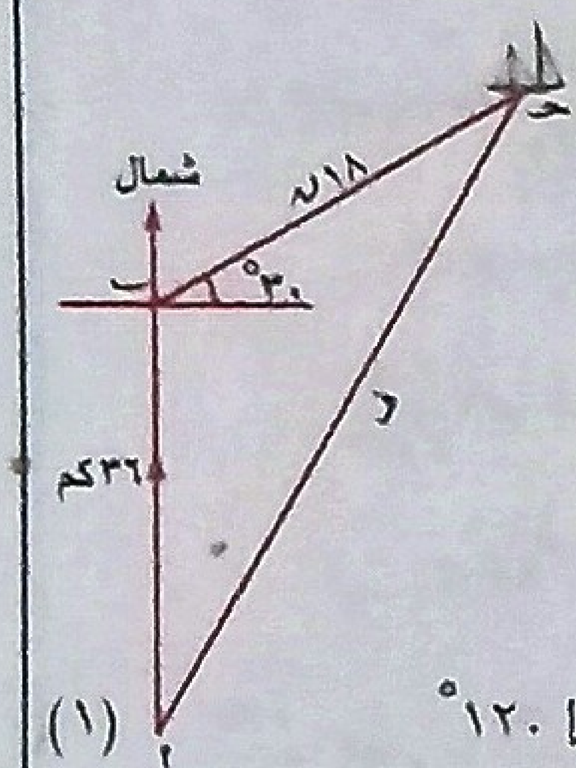
أى أن : ن = $\frac{1}{30}$ ساعة

ومن (١) ف = ٣٥ كم

∴ ٢ × ٣٥ $\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$ = ٢ × ٥٦٢٥٠٠ × $\frac{1}{30}$ + ١١٢٥٠

∴ $\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = \frac{4875}{7}$ كم/ساعة.

٧٢



أب = ٢ × ١٨

= ٣٦ كم

، جـب = ١٨ ن

ومن هندسة الشكل :

ف^2 = (٣٦)^2 + (١٨ ن)^2 − ٢ (٣٦) (١٨ ن) جتا ١٢٠° (١)

∴ ٢ ف $\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$ = ٢ (١٨ ن) × ١٨ + ٣٦ × ١٨

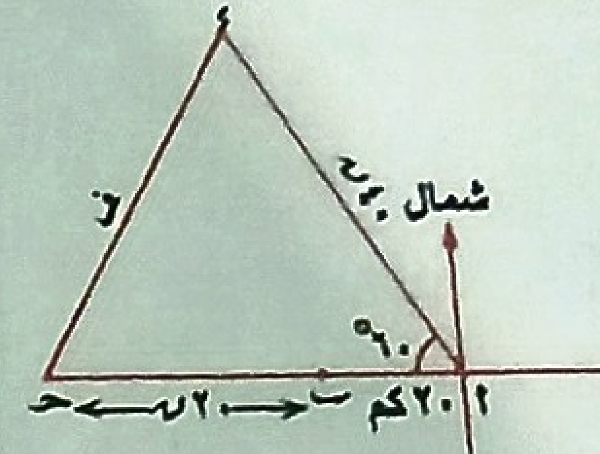
وبعد ٤ ساعات من بدء الحركة ∴ ن = ٢

ومن (١) ف = ٣٦ $\sqrt{3}$ كم

∴ ٢ × ٣٦ $\sqrt{3}$ $\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$ = ٢ × ١٨ × ٢ × ١٨ + ٣٦ × ١٨

∴ $\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$ = ٩ $\sqrt{3}$ كم/ساعة.

٧٣



أب = ٢٠ كم

ب حـ = ٢٠ ن

، أ ء = ٤٠ ن

ومن هندسة الشكل :

$ف^{٢} = (٢٠ ن + ٢٠)^{٢} + (٤٠ ن)^{٢} - ٢ (٤٠ ن)$

$(٢٠ ن + ٢٠)$ جتا ٦٠ (١)

$\therefore ٢ ف \frac{ء ف}{ء ن} = ٢ (٢٠ ن + ٢٠) (٢٠)$

$+ ٢ (٤٠ ن) (٤٠)$

$- (٤٠) (٢٠ ن + ٢٠) - ٢٠ (٤٠ ن)$

الساعة ١١ صباحًا $\therefore$ ن = ١ ساعة

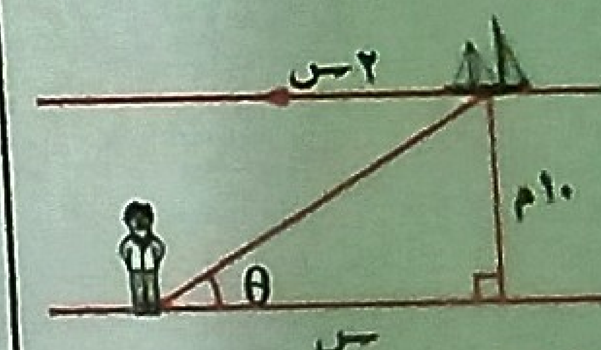
ومن (١) ف = ٤٠ كم

$\therefore ٢ × ٤٠ \frac{ء ف}{ء ن} = ٢ (٤٠) (٢٠) + ٢ (٤٠) (٤٠)$

$- ٤٠ (٤٠) - ٢٠ (٤٠)$

$\therefore \frac{ء ف}{ء ن} = ٣٠$ كم/ساعة.

٧٤



$\frac{ء θ}{ء ن} = ± \frac{١}{٢}$ دائرى/ث

$ظا θ = \frac{١٠}{س}$

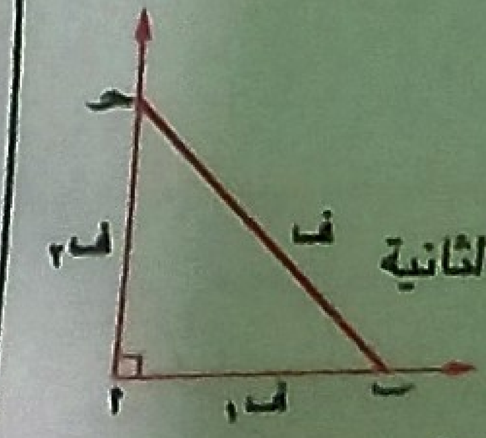
$\therefore قا^{٢} θ \frac{ء θ}{ء ن} = -١٠ س^{-٢} \frac{ء س}{ء ن}$

عندما θ = ٣٠° $\therefore$ س = ١٠ $\sqrt{٣}$

$\therefore قا^{٢} ٣٠° × ± \frac{١}{٢} = -١٠ (١٠ \sqrt{٣})^{-٢} × \frac{ء س}{ء ن}$

$\therefore \frac{ء س}{ء ن} = ± ٢٠$ م/ث $\therefore$ السرعة = ٢٠ م/ث

٧٥



عند أى لحظة من تحركهما

معًا نفرض أن زمن تحرك السيارة الثانية

= ن ساعة

$\therefore$ زمن الأولى = $(ن + \frac{١}{٦})$ ساعة

$\therefore ف_{١} = ٤٠ (ن + \frac{١}{٦})$ ، $ف_{٢} = ٦٠ ن$

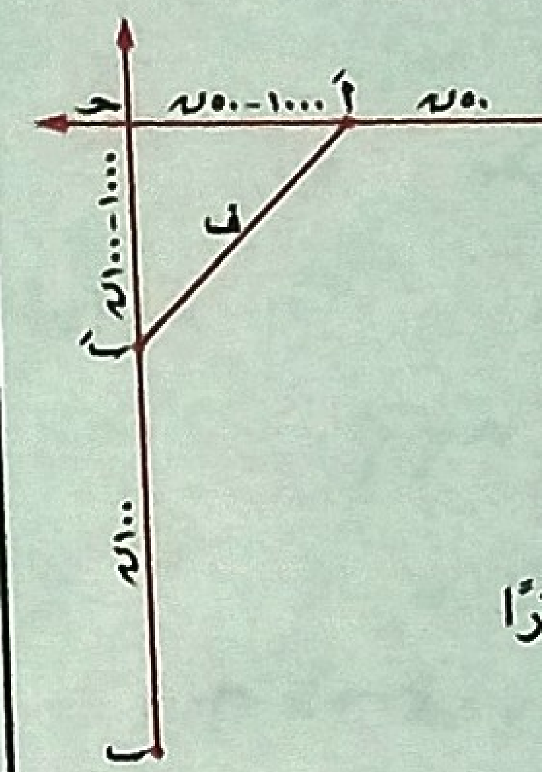
$\therefore ف^{٢} = ١٦٠٠ (ن + \frac{١}{٦})^{٢} + ٣٦٠٠ ن^{٢}$

$\therefore ٢ ف \frac{ء ف}{ء ن} = ٣٢٠٠ (ن + \frac{١}{٦}) + ٧٢٠٠ ن$

، عند ن = ٢٠ دقيقة = $\frac{١}{٣}$ ساعة

فإن : ف = ٢٠ $\sqrt{٢}$ كم $\therefore \frac{ء ف}{ء ن} = ٥٠ \sqrt{٢}$ كم/س

٧٦



بعد زمن ن دقيقة يتحرك

الرجل الأول = ٥٠ ن مترًا

فيصبح بعده عن حـ

يساوى ١٠٠٠ − ٥٠ ن

والرجل الثانى يتحرك ١٠٠ ن مترًا

فيصبح بعدة عن حـ

يساوى ١٠٠٠ − ١٠٠ ن

$\therefore$ مربع البعد بين الرجلين :

$ف^{٢} = (١٠٠٠ - ٥٠ ن)^{٢} + (١٠٠٠ - ١٠٠ ن)^{٢}$

$\therefore ٢ ف \frac{ء ف}{ء ن} = ٢ (١٠٠٠ - ٥٠ ن) × -٥٠$

$+ ٢ (١٠٠٠ - ١٠٠ ن) × -١٠٠$

، عندما ن = ٤ فإن : ف = ١٠٠٠ متر

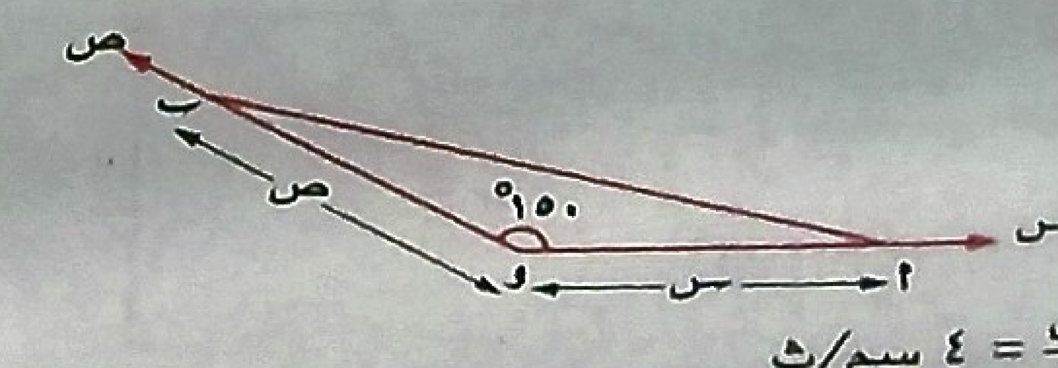
$\therefore \frac{ء ف}{ء ن} = -١٠٠$ متر/دقيقة.

أى أن الرجلين يقتربان بمعدل ١٠٠ متر/دقيقة

وعندما $\frac{ء ف}{ء ن} = ٠$ $\therefore$ ن = ١٢ دقيقة

$\therefore$ الرجلان يبدأن فى التباعد عن بعضها عندما ن > ١٢ دقيقة.

٧٧



$\frac{ء س}{ء ن} = ٤$ سم/ث

$\because ٣٠ = \frac{١}{٢}$ س ص جا ١٥٠° $\therefore$ س ص = ١٢٠

$\therefore س \frac{ء ص}{ء ن} + ص \frac{ء س}{ء ن} = ٠$ عندما س = ٨ سم

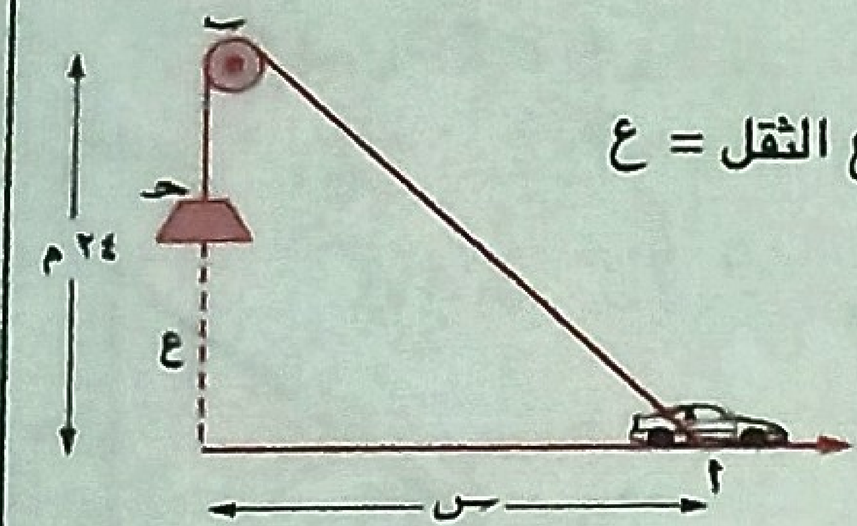
$\therefore$ ص = ١٢٠ ÷ ٨ = ١٥ سم

$\therefore ٨ \frac{ء ص}{ء ن} + ١٥ × ٤ = ٠$

$\therefore \frac{ء ص}{ء ن} = -٧,٥$ سم/ث

أى أن «ب» تتحرك نحو (و) بسرعة ٧,٥ سم/ث

٧٨



نفرض أن ارتفاع الثقل = ع

وبعد السيارة عن

موقع مسقط

البكرة = س

$\therefore$ ب حـ = ٢٤ − ع

، أب = ٥٠ − (٢٤ − ع) = ٢٦ + ع

ومن هندسة الشكل :

$\therefore (٢٦ + ع)^{٢} = س^{٢} + (٢٤)^{٢}$ (١)

$\therefore ٢ (٢٦ + ع) \frac{ء ع}{ء ن} = ٢ س \frac{ء س}{ء ن}$

، عندما س = ٣٢ مترًا

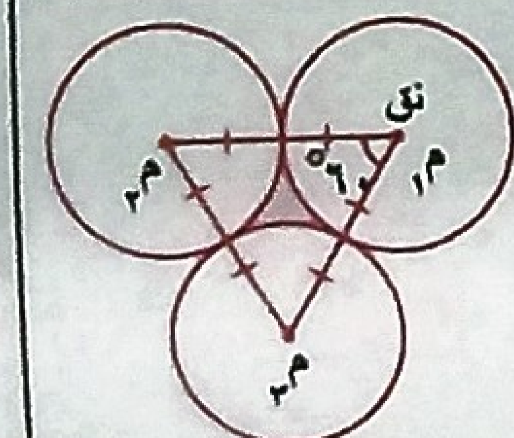
، من معادلة (١) : $\therefore (٢٦ + ع)^{٢} = ١٦٠٠$

$\therefore$ ع = ١٤ مترًا

$\therefore ٢ (٢٦ + ١٤) × \frac{ء ع}{ء ن} = ٢ × ٣٢ × ١٨$

$\therefore \frac{ء ع}{ء ن} = ١٤,٤$ م/ث

٧٩



$\because$ م (مساحة المنطقة المظللة)

= مساحة Δ $م_{١} م_{٢} م_{٣}$

− $\frac{١}{٢}$ مساحة الدائرة الواحدة

$= \frac{١}{٢} × ٢ نق × ٢ نق × جا ٦٠° - \frac{١}{٢} π نق^{٢}$

$= (\sqrt{٣} - \frac{١}{٢} π) نق^{٢}$

$\therefore \frac{ء م}{ء ن} = ٢ (\sqrt{٣} - \frac{١}{٢} π) نق × \frac{ء نق}{ء ن}$

$= ٢ (\sqrt{٣} - \frac{١}{٢} π) × ١٠ × ١$

$= (٢٠ \sqrt{٣} - ١٠ π)$ سم²/د

٨٠

① $\because ص = \sqrt{س}$

$\therefore \frac{ء ص}{ء ن} = \frac{١}{٢ \sqrt{س}} \frac{ء س}{ء ن}$ وعندما س = ٤

$\therefore ١ = \frac{١}{٤} × \frac{ء س}{ء ن}$ $\therefore \frac{ء س}{ء ن} = ٤$ وحدة طول/ث

② بفرض أن المسافة (و أ) = ف

$\therefore ف^{٢} = س^{٢} + ص^{٢}$

$\therefore ٢ ف \frac{ء ف}{ء ن} = ٢ س \frac{ء س}{ء ن} + ٢ ص \frac{ء ص}{ء ن}$

، وعندما س = ٤

فإن : ص = ٢ ، ف = ٢ $\sqrt{٥}$

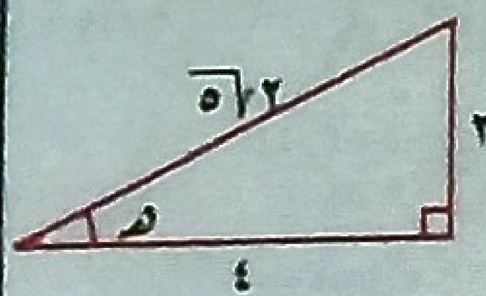
$\therefore ف \frac{ء ف}{ء ن} = س \frac{ء س}{ء ن} + ص \frac{ء ص}{ء ن}$

$\therefore ٢ \sqrt{٥} \frac{ء ف}{ء ن} = ٤ × ٤ + ٢ × ١$

$\therefore \frac{ء ف}{ء ن} = \frac{١٨}{٢ \sqrt{٥}} = \frac{٩ \sqrt{٥}}{٥}$ وحدة طول/ث

③ $\because ظا هـ = \frac{ص}{س} = \frac{\sqrt{س}}{س} = س^{-\frac{١}{٢}}$

$\therefore قا^{٢} هـ × \frac{ء هـ}{ء ن} = -\frac{١}{٢} س^{-\frac{٣}{٢}} \frac{ء س}{ء ن}$



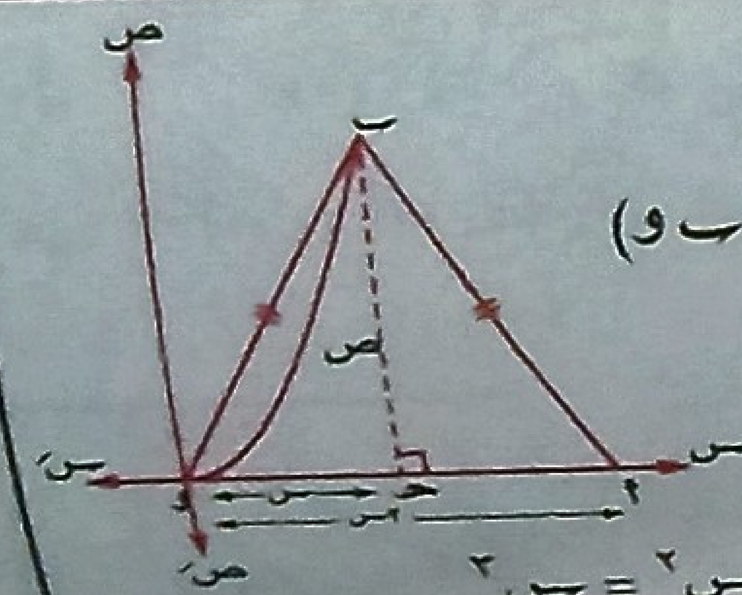
وعند س = ٤

$\therefore (\frac{٢ \sqrt{٥}}{٤})^{٢} \frac{ء هـ}{ء ن}$

$= -\frac{١}{٢} × (٤)^{\frac{-٣}{٢}} × ٤$

$\therefore \frac{ء هـ}{ء ن} = (\frac{-١}{٥})$ ء/ث

٨١



$\because$ م (مساحة المثلث أ ب و)

$= \frac{١}{٢}$ أ و × ب حـ

$= \frac{١}{٢} × ٢ س × ص$

$\therefore م = \frac{١}{٢} × ٢ س × س^{٢} = س^{٣}$

$\therefore \frac{ء م}{ء ن} = ٣ س^{٢} × \frac{ء س}{ء ن}$

بعد ٥ ثوان من بدء الحركة نجد أن :

∴ ٢ س = ٢ × ٥ = ١٠ وحدات   ∴ س = ٥

∴ $\frac{دم}{دن}$ = ٣ × $(٥)^{٢}$ × ١ = ٧٥ وحدة مربعة/ث

٨٢

نفرض أن الاحداثى السينى لنقطة أ هو س والإحداثى السينى لنقطة تقاطع المماس للدائرة عند أ مع محور السينات هو ك فى Δ و أ ب

∵ و أ ⊥ المماس أ ب ، أ أَ ⊥ ب و

∴ $(و أ)^{٢}$ = و أَ × و ب   ∴ $(١)^{٢}$ = س × ك

∴ ك = $\frac{١}{س}$ = $س^{-١}$

∴ $\frac{دك}{دن}$ = $-س^{-٢}$ $\frac{دس}{دن}$

وعندما ك = ٢   ∴ س = $\frac{١}{٢}$

∴ $\frac{دك}{دن}$ = $-\left(\frac{١}{٢}\right)^{-٢}$ × ٣ = −١٢ وحدة طول/ث

٨٣

من هندسة الشكل :

ق(∠م) = ق(∠ع) − ق(∠ك)

∴ طا م = $\frac{طا ع - طا ك}{١ + طا ع طا ك}$

= $\frac{\frac{س}{٢} - \frac{س}{٤}}{١ + \frac{س^{٢}}{٨}}$ = $\frac{٢ س}{س^{٢} + ٨}$

وبالاشتقاق بالنسبة لـ ن

∴ $قا^{٢}$ م × $\frac{دم}{دن}$

= $\frac{(س^{٢} + ٨) × ٢ - ٢ س × ٢ س}{(س^{٢} + ٨)^{٢}}$ × $\frac{دس}{دن}$

∴ $قا^{٢}$ م × $\frac{دم}{دن}$ = $\frac{١٦ - ٢ س^{٢}}{(س^{٢} + ٨)^{٢}}$ × $\frac{دس}{دن}$

، عندما تصل أ إلى النقطة (٢ ، ٠)

∴ طا م = $\frac{١}{٢}$

∴ قا م = $\frac{\sqrt{١٠}}{٢}$

∴ $\frac{١٠}{٩}$ × $\frac{دم}{دن}$ = $\frac{١٦ - ٢ × ٤}{١٤٤}$ × $\frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{دم}{دن}$ = $\left(\frac{١}{٣٠}\right)$ ءً/د

٨٤

$\frac{دس}{دن}$ = $\frac{٥}{٤}$ متر/د

∵ Δ أ حـ ء قائم الزاوية فى حـ

∴ أء = $\sqrt{٩ + س^{٢}}$

ومن تشابه المثلثين ∴ $\frac{\sqrt{٩ + س^{٢}}}{٥}$ = $\frac{٣}{ص}$

∴ ص = $\frac{١٥}{\sqrt{٩ + س^{٢}}}$ = ١٥ $(٩ + س^{٢})^{-\frac{١}{٢}}$

∴ $\frac{دص}{دن}$ = ١٥ × $-\frac{١}{٢}$ $(٩ + س^{٢})^{-\frac{٣}{٢}}$ × ٢ س × $\frac{دس}{دن}$

وعندما تكون ب عند ء فإن س = ٤ سم

∴ $\frac{دص}{دن}$ = $\frac{-٣}{٥}$ م/د

٨٥

$\frac{دس}{دن}$ = ٢ سم/ث

$س^{٢}$ = $ص^{٢}$ + ٨١

(بالاشتقاق بالنسبة إلى ن)

٢ س $\frac{دس}{دن}$ = ٢ ص $\frac{دص}{دن}$

$\frac{دص}{دن}$ = $\frac{س}{ص}$ $\frac{دس}{دن}$

عندما يصل الساق إلى نهاية القاعدة

ص = ١٢ سم   ∴ س = ١٥ سم

$\frac{دص}{دن}$ = $\frac{١٥}{١٢}$ × ٢ = $\frac{٥}{٢}$ سم/ث

٨٦

من هندسة الشكل : $\frac{١٦ - ف}{س}$ = $\frac{ف}{١٥}$

∴ س = $\frac{٢٤٠ - ١٥ ف}{ف}$ ∴ س = ٢٤٠ $ف^{-١}$ − ١٥

، ∵ ف = ع ن + $\frac{١}{٢}$ د $ن^{٢}$

∴ ف = ٤,٩ $ن^{٢}$

∴ س = ٢٤٠ $(٤,٩ ن^{٢})^{-١}$ − ١٥ = $\frac{٢٤٠ ن^{-٢}}{٤,٩}$ − ١٥

$\frac{دس}{دن}$ = $\frac{-٤٨٠٠}{٤٩}$ $ن^{-٣}$ وعندما ف = ١٠ م

∴ ن = $\frac{١٠}{٧}$ ث   ∴ $\frac{دس}{دن}$ = −٣٣,٦ م/ث

أى أن ظل الكرة يتحرك مقتربًا من مسقط الكرة على الأرض بسرعة ٣٣,٦ م/ث

٨٧

ف = ع ن + $\frac{١}{٢}$ د $ن^{٢}$

ف = ٥ ن − $\frac{١}{٢}$ × ٩,٨ × $ن^{٢}$

∴ ف = ٥ ن − ٤,٩ $ن^{٢}$

ومن هندسة الشكل : $\frac{ف}{س}$ = $\frac{١٥ - ف}{١٢}$

∴ س = $\frac{١٢ ف}{١٥ - ف}$

∴ $\frac{دس}{دن}$ = $\frac{(١٥ - ف) × ١٢ - ١٢ ف × (-١)}{(١٥ - ف)^{٢}}$ × $\frac{دف}{دن}$

= $\frac{١٨٠}{(١٥ - ف)^{٢}}$ $\frac{دف}{دن}$ = $\frac{١٨٠}{(١٥ - ف)^{٢}}$ × (٥ − ٩,٨ ن)

، عند ن = $\frac{١}{٢}$ ث

فإن ف = $\frac{٥}{٢}$ − ٤,٩ × $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$ = ١,٢٧٥

∴ $\frac{دس}{دن}$ = $\frac{١٨٠}{(١٥ - ١,٢٧٥)^{٢}}$ × (٥ − ٩,٨ × $\frac{١}{٢}$)

≈ ٠,٠٩٥٥٥ م/ث

٨٨

① (ب)   ② (جـ)   ③ (ب)

إرشادات لحل رقم ٨٨

① بفرض أن $ل_{١}$ ، $ل_{٢}$ ، .... ، $ل_{م}$ هى أطول أضلاع المضلع ، ح هى محيط المضلع

∴ ح = $ل_{١}$ + $ل_{٢}$ + ... + $ل_{م}$

∴ $\frac{دح}{دن}$ = $\frac{دل_{١}}{دن}$ + $\frac{دل_{٢}}{دن}$ + ... + $\frac{دل_{م}}{دن}$

، ∵ $\frac{دل_{١}}{دن}$ = $\frac{دل_{٢}}{دن}$ = ... = $\frac{دل_{م}}{دن}$ = أ

∴ $\frac{دح}{دن}$ = م أ

أى أن المحيط يزداد بمعدل (م أ) سم/ث

② بفرض أن $ح_{١}$ هو حجم الخزان الأصغر وارتفاع الماء به هو $ع_{١}$

، $ح_{٢}$ هو حجم الخزان الأكبر وارتفاع الماء به هو $ع_{٢}$

، ∵ الحجم = π $نق^{٢}$ ع

∴ $ح_{١}$ = π × $(٤)^{٢}$ $ع_{١}$ = ١٦ π $ع_{١}$

∴ $\frac{دح_{١}}{دن}$ = ١٦ π $\frac{دع_{١}}{دن}$

، $ح_{٢}$ = π × $(٨)^{٢}$ $ع_{٢}$ = ٦٤ π $ع_{٢}$

∴ $\frac{دح_{٢}}{دن}$ = ٦٤ π $\frac{دع_{٢}}{دن}$

، ∵ تدفق المياه فى الخزانان بنفس المعدل

أى أن $\frac{دح_{١}}{دن}$ = $\frac{دح_{٢}}{دن}$

∴ ١٦ π $\frac{دع_{١}}{دن}$ = ٦٤ π $\frac{دع_{٢}}{دن}$

، ∵ $\frac{دع_{١}}{دن}$ = $\frac{١}{٢}$ م/دقيقة

∴ $\frac{دع_{٢}}{دن}$ = $\frac{١}{٨}$ م/دقيقة

(٣) ∵ حجم الأسطوانة (ح) = π نق² ع

، ∵ نق ثابتة

∴ $\frac{\text{دح}}{\text{دن}}$ = π نق² $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ ، ∵ $\frac{\text{دح}}{\text{دن}}$ = ثابت

∴ $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ = ثابت ∴ ع = ع + ثابت × ن

، ∵ ع (الارتفاع عند البدء) = صفر

∴ ع = ثابت × ن

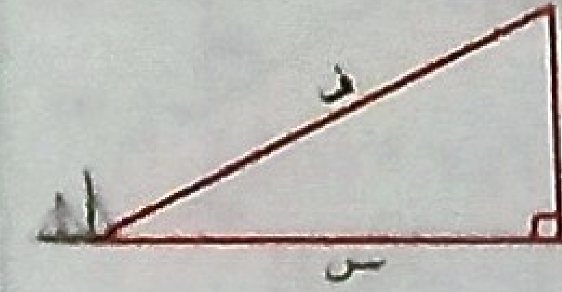
∴ العلاقة خطية بين ع ، ن وتمر بنقطة الأصل

∴ الشكل الصحيح هو (ب)

٨٩

بفرض أن شدة الإستضاءة ض

∴ ض = $\frac{\text{ك}}{\text{ف}^{2}}$



∵ $(١٠٠)^{2}$ + س² = ف²

∴ ض = ك ف$^{-2}$

ض = ك $(١٠٠٠٠ + \text{س}^{2})^{-1}$

$\frac{\text{دض}}{\text{دن}}$ = − ك $(١٠٠٠٠ + \text{س}^{2})^{-2}$ (٢ س) × $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

وعند س = ١٠٠ م

∴ $\frac{\text{دض}_1}{\text{دن}}$ = − ك × ٥ × ١٠$^{-7}$ × $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

، وعند س = ٢٠٠ م

$\frac{\text{دض}_2}{\text{دن}}$ = − ك × ١,٦ × ١٠$^{-7}$ × $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ وبالقسمة

∴ $\frac{\text{دض}_1}{\text{دن}} \div \frac{\text{دض}_2}{\text{دن}} = \frac{٥}{١,٦} = \frac{٢٥}{٨}$

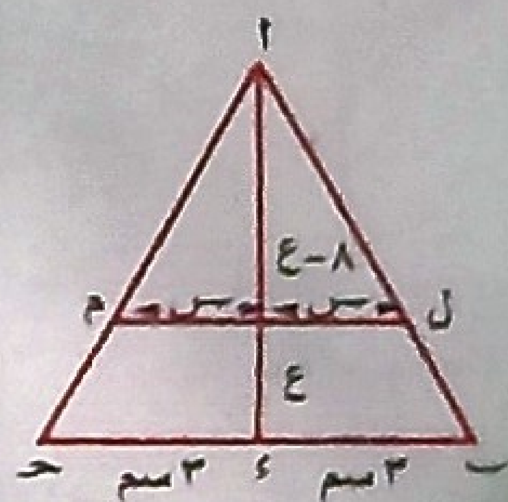
٩٠

$\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ = $-\frac{1}{2}$ سم/ث

من هندسة الشكل :

$\frac{\text{س}}{٣} = \frac{٨ - \text{ع}}{٨}$

∴ س = $\frac{٣ (٨ - \text{ع})}{٨}$



مساحة شبه المنحرف (م) = $\frac{1}{2}$ (٢ س + ٦) × ع

= (س + ٣) ع

= [$\frac{٣}{٨}$ (٨ − ع) + ٣] × ع

= ٦ ع − $\frac{٣}{٨}$ ع²

∴ $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ = ٦ $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ − $\frac{٣}{٤}$ ع $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$

= ٦ × $-\frac{1}{2}$ − $\frac{٣}{٤}$ × ٤ × $-\frac{1}{2}$

= − ١,٥ سم²/ث

٩١

بفرض أن و ب = س

∴ مساحة المستطيل (م) = س (١٦ − ٢ س)

∴ م = ١٦ س − ٢ س²

∴ $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ = (١٦ − ٤ س) $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

وعندما $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ = $-\frac{1}{4}$ ، س = ٣ سم

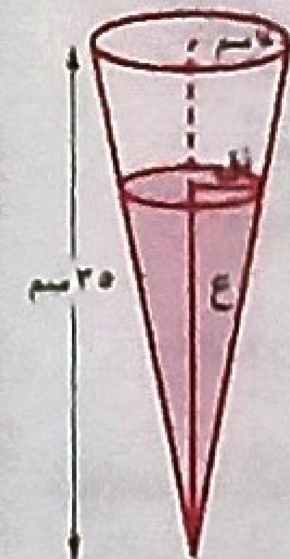
∴ $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ = (١٦ − ٤ × ٣) × $-\frac{1}{4}$ = − ١ سم²/ث

، عندما $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ = صفر ∴ ١٦ − ٤ س = صفر

∴ س = ٤ سم

∴ مساحة المستطيل = ١٦ × ٤ − ٢ × ٤² = ٣٢ سم²

٩٢



معدل زيادة حجم المخروط (ح)

= ٥,٤ − ٣,٢ = ٢,٢ سم³/ث

، حجم المخروط (ح) = $\frac{1}{3}$ π نق² ع

ومن هندسة الشكل

$\frac{\text{نق}}{\text{ع}} = \frac{٧}{٣٥}$ ∴ نق = $\frac{1}{5}$ ع

∴ ح = $\frac{1}{3}$ π $(\frac{1}{5}\text{ع})^{2}$ × ع ح = $\frac{\pi}{٧٥}$ ع³

∴ $\frac{\text{دح}}{\text{دن}}$ = $\frac{\pi}{٢٥}$ ع² $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$

وعندما ع = ٢٥ سم ∴ $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ = ٠,٠٢٨ سم/ث

٩٣

حجم المخروط (ح) = $\frac{1}{3}$ π نق² ع

، ومن هندسة الشكل

$\frac{\text{نق}}{٨٠} = \frac{\text{ع}}{١٦٠}$

∴ نق = $\frac{1}{2}$ ع

∴ الحجم (ح) = $\frac{1}{3}$ π $(\frac{1}{2}\text{ع})^{2}$ ع

∴ ح = $\frac{\pi}{١٢}$ ع³ ∴ $\frac{\text{دح}}{\text{دن}}$ = $\frac{\pi}{٤}$ ع² $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$

، حجم الماء في الاسطوانة = π نق² ع₁ = π $(٥٠)^{2}$ ع₁

∴ $\frac{\text{دح}}{\text{دن}}$ = ٢٥٠٠ π $\frac{\text{دع}_1}{\text{دن}}$

، ∵ القيمة العددية لـ $\frac{\text{دح}}{\text{دن}}$ للمخروط = القيمة العددية لـ $\frac{\text{دح}}{\text{دن}}$ للاسطوانة وكذلك $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ ، $\frac{\text{دع}_1}{\text{دن}}$

∴ $\frac{\pi}{٤}$ ع² $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ = ٢٥٠٠ π $\frac{\text{دع}_1}{\text{دن}}$

∴ ع = ١٠٠ سم

٩٤

أبعاد متوازي المستطيلات عند أي لحظة

هي ٣ + ٢ ن ، ٤ + ن ، ١٢ − ٣ ن

∴ حجم متوازي المستطيلات في أي لحظة

ح = (٣ + ٢ ن) (٤ + ن) (١٢ − ٣ ن)

= ١٤٤ + ٩٦ ن − ٩ ن² − ٦ ن³

∴ $\frac{\text{دح}}{\text{دن}}$ = ٩٦ − ١٨ ن − ١٨ ن²

$\left(\frac{\text{دح}}{\text{دن}}\right)_{\text{ن}=٢}$ = −١٢ سم³/ث

إذا كان قطر متوازي المستطيلات = ل

∴ ل² = (٣ + ٢ ن)² + (٤ + ن)² + (١٢ − ٣ ن)²

٢ ل $\frac{\text{دل}}{\text{دن}}$ = ٢ (٣ + ٢ ن) × ٢ + ٢ (٤ + ن)

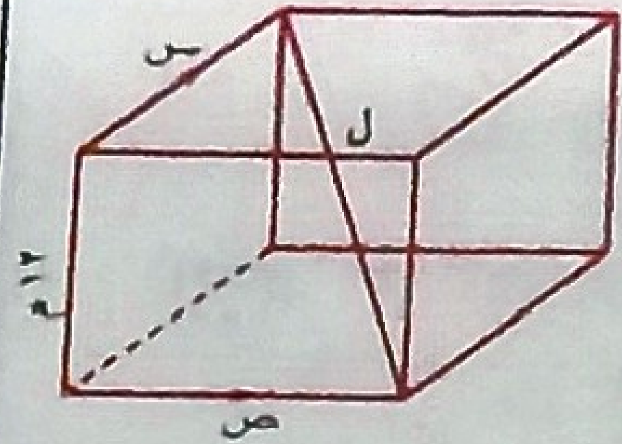
+ ٢ (١٢ − ٣ ن) × −٣

عند ن = ٢ فإن ل = ١١

$\left(\frac{\text{دل}}{\text{دن}}\right)_{\text{ن}=٢} = \frac{٧ \times ٢ + ٦ + ٦ \times -٣}{١١}$

= $\frac{٢}{١١}$ سم/ث

٩٥



$\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ = ٣ م/د

$\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ = ٦ م/د

ومن هندسة الشكل

ل² = س² + ص² + (١٢)² (١)

∵ ٢ ل $\frac{\text{دل}}{\text{دن}}$ = ٢ س $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ + ٢ ص $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$

بعد ٦ دقائق : س = ٣ × ٦ = ١٨ م

، ص = ٦ × ٦ = ٣٦ م ومن (١) ∴ ل = ٤٢ م

∴ ٢ × ٤٢ × $\frac{\text{دل}}{\text{دن}}$ = ٢ × ١٨ × ٣ + ٢ × ٣٦ × ٦

∴ $\frac{\text{دل}}{\text{دن}}$ = $\frac{٤٥}{٧}$ م/د

٩٦

$\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ = ١٥٠ م/ث

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ = ٧٥ م/ث

من هندسة الشكل

ف² = (٢٠٠٠)² + س² + ص² (١)

∴ ٢ ف $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ = ٢ س $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ + ٢ ص $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$

بعد ٤٠ ث

ص = ٤٠ × ١٥٠ = ٦٠٠٠ م

س = ٤٠ × ٧٥ = ٣٠٠٠ م

ومن (١) ف = ٧٠٠٠ م

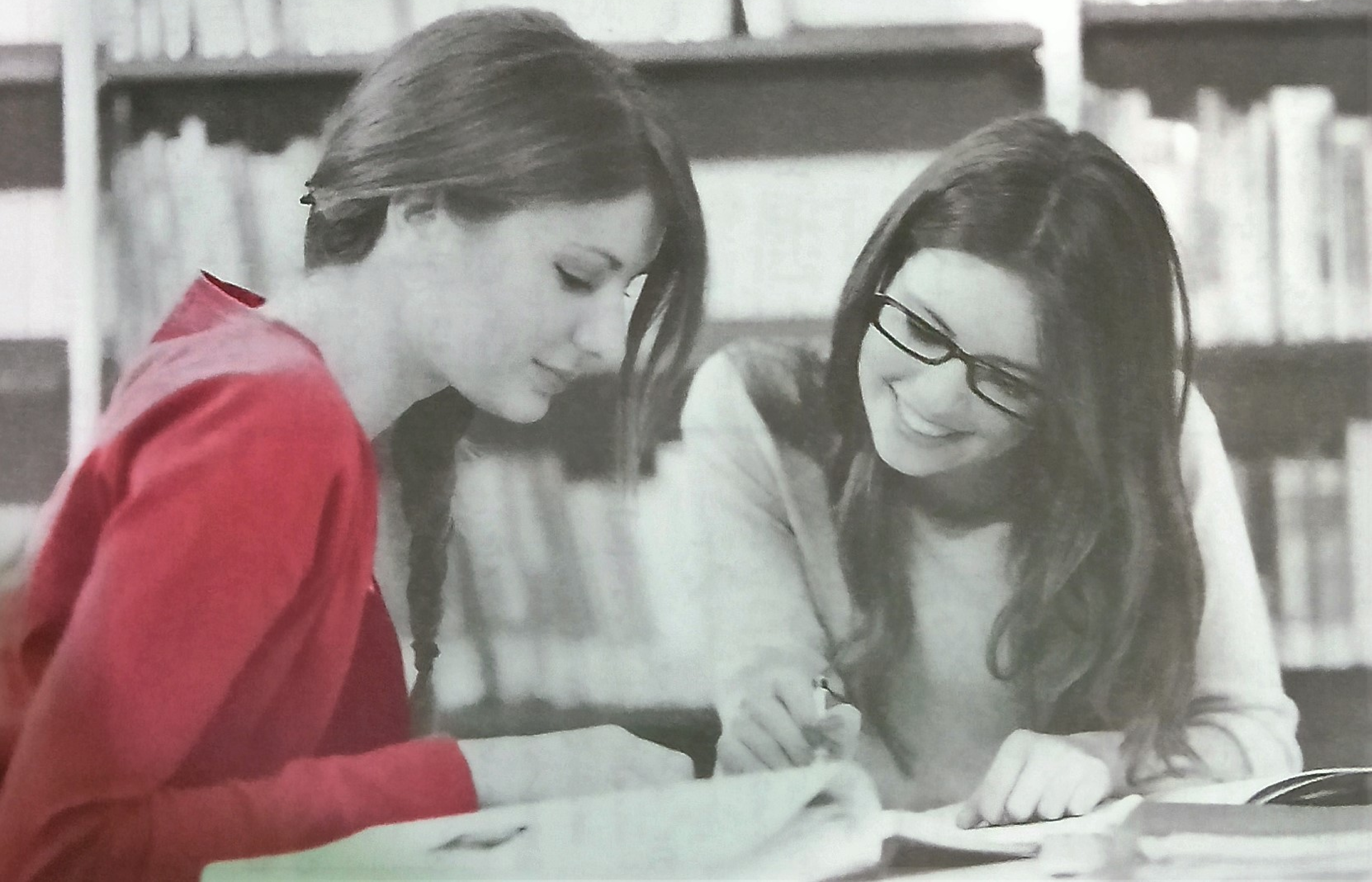
∴ ٢ × ٧٠٠٠ × $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ = ٢ × ٣٠٠٠ × ٧٥

+ ٢ × ٦٠٠٠ × ١٥٠

∴ $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ = ١٦٠ $\frac{٥}{٧}$ م/ث

إجابات الوحدة 2

تفاضل وتكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية



إجابات تمارين المتطلبات القبلية الجبرية

1

(١) (د)   (٢) (ب)   (٣) (د)   (٤) (د)

2

(١) $\text{لو}\,(\text{س} - ٣) = ٢$

$\text{س} - ٣ = ١٠^{٢} = ١٠٠$

$\text{س} = ١٠٣ \quad \therefore \text{م.ح} = \{١٠٣\}$

(٢) $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} = ٤$

$\therefore \text{س} = \text{هـ}^{٤} \quad \therefore \text{م.ح} = \{\text{هـ}^{٤}\}$

(٣) $\text{لو}_{٢}\,(\text{س} + ٧) = ٥$

$\text{س} + ٧ = ٢^{٥} = ٣٢$

$\text{س} = ٢٥ \quad \therefore \text{م.ح} = \{٢٥\}$

(٤) $\text{لو}_{\text{هـ}}\,(٢\text{س} + ١) = ٥$

$٢\text{س} + ١ = \text{هـ}^{٥} \quad \text{س} = \frac{\text{هـ}^{٥} - ١}{٢}$

$\therefore \text{م.ح} = \left\{\frac{\text{هـ}^{٥} - ١}{٢}\right\}$

(٥) $٢\,\text{هـ}^{\text{س}} = ٢١ \quad \text{هـ}^{\text{س}} = \frac{٢١}{٢}$

$\text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\frac{٢١}{٢} \quad \therefore \text{م.ح} = \left\{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\frac{٢١}{٢}\right\}$

(٦) $\text{هـ}^{\text{س}} = ١٠$

$\text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,١٠ \quad \therefore \text{م.ح} = \{\text{لو}_{\text{هـ}}\,١٠\}$

(٧) $\text{هـ}^{٥\text{س} + ١} = ٢٠ \quad ٥\text{س} + ١ = \text{لو}_{\text{هـ}}\,٢٠$

$\therefore \text{س} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\,٢٠ - ١}{٥}$

$\text{م.ح} = \left\{\frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\,٢٠ - ١}{٥}\right\}$

(٨) $\text{هـ}^{٣\text{س} + ١} = \frac{١}{٢} \quad \therefore ٣\text{س} + ١ = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\frac{١}{٢}$

$\therefore \text{س} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\frac{١}{٢} - ١}{٣}$

$\therefore \text{م.ح} = \left\{\frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\frac{١}{٢} - ١}{٣}\right\}$

(٩) $٧^{\text{س}} = ٢٥$

$\text{س} = \text{لو}_{٧}\,٢٥ \quad \therefore \text{م.ح} = \{\text{لو}_{٧}\,٢٥\}$

(١٠) $\text{لو}_{\text{هـ}}\,(\text{س} + ١) - \text{لو}_{\text{هـ}}\,(\text{س} - ٢) = \text{لو}_{\text{هـ}}\,٤$

$\text{لو}_{\text{هـ}}\,\frac{(\text{س} + ١)}{(\text{س} - ٢)} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,٤$

$\therefore \frac{(\text{س} + ١)}{(\text{س} - ٢)} = ٤$

$\therefore \text{س} + ١ = ٤\text{س} - ٨$

منها $٣\text{س} = ٩ \quad \therefore \text{س} = ٣$

$\therefore \text{م.ح} = \{٣\}$

(١١) $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}\,(\text{س} - ٣) = ٠$

$\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\,(\text{س} - ٣) = ٠$

$\text{س}\,(\text{س} - ٣) = \text{هـ}^{٠} = ١$

$\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ١ = ٠$

أ = ١ ، ب = −٣ ، حـ = −١ باستخدام القانون العام

$\text{س} = \frac{٣ + \sqrt{١٣}}{٢} ، \text{س} = \frac{٣ - \sqrt{١٣}}{٢}$ (مرفوضة)

$\therefore \text{م.ح} = \left\{\frac{٣ + \sqrt{١٣}}{٢}\right\}$

(١٢) $\text{لو}_{\text{هـ}}\,٢ + \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} = ٤$

$\text{لو}_{\text{هـ}}\,٢\text{س} = ٤ \quad ٢\text{س} = \text{هـ}^{٤}$

$\therefore \text{س} = \frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{٤} \quad \therefore \text{م.ح} = \left\{\frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{٤}\right\}$

(١٣) $\text{لو}_{\text{هـ}}\,٤^{٢\text{س} - ١} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,٥٠$

$\therefore ٤^{٢\text{س} - ١} = ٥٠$

$٢\text{س} - ١ = \text{لو}_{٤}\,٥٠$ منها $\text{س} = \frac{\text{لو}_{٤}\,٥٠ + ١}{٢}$

$\therefore \text{م.ح} = \left\{\frac{\text{لو}_{٤}\,٥٠ + ١}{٢}\right\}$

(١٤) $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{س}} = ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,٣$

$\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{س}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,٣^{٣} \quad \text{هـ}^{\text{س}} = ٣^{٣} = ٢٧$

$\text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,٢٧ \quad \therefore \text{م.ح} = \{\text{لو}_{\text{هـ}}\,٢٧\}$

(١٥) $٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,(\text{س} - ٣) = \text{لو}_{\text{هـ}}\,(\text{س} + ٥) + \text{لو}_{\text{هـ}}\,٤$

$\text{لو}_{\text{هـ}}\,(\text{س} - ٣)^{٢} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,٤\,(\text{س} + ٥)$

$(\text{س} - ٣)^{٢} = ٤\,(\text{س} + ٥)$

$\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩ = ٤\text{س} + ٢٠$

$\text{س}^{٢} - ١٠\text{س} - ١١ = ٠$

$\text{س} = ١١ ، \text{س} = -١$ (مرفوض)

$\therefore \text{م.ح} = \{١١\}$

(١٦) $\text{س} - \text{س}\,\text{هـ}^{٢\text{س} - ٣} = ٠$

$\text{س}\,(١ - \text{هـ}^{٢\text{س} - ٣}) = ٠$

$\text{س} = ٠$ أو $١ - \text{هـ}^{٢\text{س} - ٣} = ٠$

$\text{هـ}^{٢\text{س} - ٣} = ١$

$٢\text{س} - ٣ = ٠$

$\text{س} = \frac{٣}{٢} \quad \therefore \text{م.ح} = \left\{٠ ، \frac{٣}{٢}\right\}$

(١٧) $٢٤ - \text{هـ}^{-٢\text{س}} = ١٠$

$\text{هـ}^{-٢\text{س}} = ١٤ \quad -٢\text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,١٤$

$\text{س} = \frac{-١}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,١٤$

$\therefore \text{م.ح} = \left\{\frac{-١}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,١٤\right\}$

(١٨) $\text{هـ}^{\text{س}} + ٦\,\text{هـ}^{-\text{س}} = ٥$ بالضرب × $\text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{هـ}^{٢\text{س}} + ٦ = ٥ \times \text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{هـ}^{٢\text{س}} - ٥ \times \text{هـ}^{\text{س}} + ٦ = ٠$

$\text{هـ}^{\text{س}} = ٣$ أو $\text{هـ}^{\text{س}} = ٢$

$\text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,٣$ أو $\text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,٢$

$\therefore \text{م.ح} = \{\text{لو}_{\text{هـ}}\,٣ ، \text{لو}_{\text{هـ}}\,٢\}$

(١٩) $\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{-\text{س}} = ٢$

بالضرب × $\text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{هـ}^{٢\text{س}} + ١ = ٢ \times \text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{هـ}^{٢\text{س}} - ٢ \times \text{هـ}^{\text{س}} + ١ = ٠$

$\therefore \text{هـ}^{\text{س}} = ١ \quad \therefore \text{س} = ٠$

$\therefore \text{م.ح} = \{٠\}$

(٢٠) $٥ \times \text{هـ}^{\text{س}^{٢}} = ٢٠٠$

$\text{هـ}^{\text{س}^{٢}} = ٤٠ \quad \text{س}^{٢} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,٤٠$

$\text{س} = \pm\sqrt{\text{لو}_{\text{هـ}}\,٤٠}$

$\therefore \text{م.ح} = \left\{\sqrt{\text{لو}_{\text{هـ}}\,٤٠} ، -\sqrt{\text{لو}_{\text{هـ}}\,٤٠}\right\}$

إجابات تمارين 6

1

(١) $\lim_{\text{س} \to \infty} \left[\left(١ + \frac{١}{\text{س}}\right)^{\text{س}}\right]^{٣} = \text{هـ}^{٣}$

(٢) $\lim_{\text{س} \to \infty} \left[\left(١ + \frac{١}{\text{س}}\right)^{\text{س}}\right]^{\frac{١}{٥}} = \text{هـ}^{\frac{١}{٥}}$

(٣) $\lim_{\text{س} \to \infty} \left(١ + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٤\text{س}}$

$= \lim_{\text{س} \to \infty} \left[\left(١ + \frac{١}{\text{س}}\right)^{\text{س}}\right]^{٤} = \text{هـ}^{٤}$

(٤) $\lim_{\text{س} \to \infty} \left(١ + \frac{٥}{\text{س}}\right)^{\text{س}}$

بفرض أن: $\text{ص} = \frac{٥}{\text{س}}$ منها $\text{س} = \frac{٥}{\text{ص}}$

في حالة $\text{س} \to \infty \quad \therefore \text{ص} \to ٠$

$\lim_{\text{ص} \to ٠} (١ + \text{ص})^{\frac{٥}{\text{ص}}}$

$= \lim_{\text{ص} \to ٠} \left[(١ + \text{ص})^{\frac{١}{\text{ص}}}\right]^{٥} = \text{هـ}^{٥}$

(٥) $\lim_{\text{ن} \to \infty} \left(١ + \frac{٢}{\text{ن}}\right)^{٣\text{ن}}$

بفرض أن $\text{م} = \frac{٢}{\text{ن}}$ منها $\text{ن} = \frac{٢}{\text{م}}$

في حالة $\text{ن} \to \infty \quad \therefore \text{م} \to ٠$

$\therefore \lim_{\text{م} \to ٠} (١ + \text{م})^{\frac{٦}{\text{م}}}$

$= \lim_{\text{م} \to ٠} \left[(١ + \text{م})^{\frac{١}{\text{م}}}\right]^{٦} = \text{هـ}^{٦}$

⑥ $\lim_{س \to \infty} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{س + ١}$

$= \lim_{س \to \infty} \left[\left(١ + \frac{١}{س}\right)^{س} \times \left(١ + \frac{١}{س}\right)\right]$

$= هـ^{١} \times ١ = هـ$

⑦ $\lim_{س \to \infty} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{٢س + ٥}$

$= \lim_{س \to \infty} \left[\left(١ + \frac{١}{س}\right)^{س}\right]^{٢} \times \left[١ + \frac{١}{س}\right]^{٥}$

$= هـ^{٢} \times ١^{٥} = هـ^{٢}$

⑧ $\lim_{س \to \infty} \left(١ + \frac{١}{س + ١}\right)^{٢س}$

بفرض أن : $ص = \frac{١}{س + ١}$ منها $س = \frac{١}{ص} - ١$

فى حالة $س \to \infty$ ∴ $ص \to$ صفر

∴ $\lim_{ص \to \text{صفر}} (١ + ص)^{\frac{٢}{ص} - ٢}$

$= \lim_{ص \to ٠} \left[(١ + ص)^{\frac{١}{ص}}\right]^{٢} \div [١ + ص]^{٢}$

$= هـ^{٢} \div ١^{٢} = هـ^{٢}$

⑨ $\lim_{س \to \infty} \left(١ + \frac{٤}{س}\right)^{س + ٣}$

بفرض أن : $ص = \frac{٤}{س}$ منها $س = \frac{٤}{ص}$

فى حالة $س \to \infty$ ∴ $ص \to ٠$

∴ $\lim_{ص \to ٠} (١ + ص)^{\frac{٤}{ص} + ٣}$

$= \lim_{ص \to ٠} \left[(١ + ص)^{\frac{١}{ص}}\right]^{٤} \times [١ + ص]^{٣}$

$= هـ^{٤} \times ١ = هـ^{٤}$

⑩ $\lim_{س \to \infty} \left(١ - \frac{١}{س}\right)^{٢س}$

بفرض أن $\frac{-١}{س} = ص$ منها $س = \frac{-١}{ص}$

فى حالة $س \to \infty$ ∴ $ص \to ٠$

∴ $\lim_{ص \to ٠} (١ + ص)^{\frac{-٢}{ص}}$

$= \lim_{ص \to ٠} \left[(١ + ص)^{\frac{١}{ص}}\right]^{-٢} = هـ^{-٢} = \frac{١}{هـ^{٢}}$

⑪ $\lim_{ن \to \infty} \left(\frac{ن}{ن + ١}\right)^{ن} = \lim_{ن \to \infty} \left(\frac{ن + ١ - ١}{ن + ١}\right)^{ن}$

$= \lim_{ن \to \infty} \left(١ - \frac{١}{ن + ١}\right)^{ن}$

بفرض أن : $م = \frac{-١}{ن + ١}$ منها $ن = \left(-١ - \frac{١}{م}\right)$

فى حالة $ن \to \infty$ ∴ $م \to$ صفر

∴ $\lim_{م \to ٠} (١ + م)^{-١ - \frac{١}{م}}$

$= \lim_{م \to ٠} \left((١ + م)^{\frac{١}{م}}\right)^{-١} \times (١ + م)^{-١}$

$= هـ^{-١} \times ١^{-١} = \frac{١}{هـ}$

⑫ $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س + ٧}{س + ٣}\right)^{س + ٤}$

$= \lim_{س \to \infty} \left(١ + \frac{٤}{س + ٣}\right)^{س + ٤}$

بفرض أن : $ص = \frac{٤}{س + ٣}$ منها $س = \frac{٤}{ص} - ٣$

فى حالة $س \to \infty$ ∴ $ص \to ٠$

∴ $\lim_{ص \to ٠} (١ + ص)^{\frac{٤}{ص} - ٣ + ٤}$

$= \lim_{ص \to ٠} (١ + ص)^{\frac{٤}{ص} + ١}$

$= \lim_{ص \to ٠} \left((١ + ص)^{\frac{١}{ص}}\right)^{٤} \times (١ + ص)^{١}$

$= هـ^{٤} \times ١ = هـ^{٤}$

⑬ $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{٢س - ١}{٢س + ١}\right)^{٢س}$

$= \lim_{س \to \infty} \left(١ - \frac{٢}{٢س + ١}\right)^{٢س}$

بفرض أن : $ص = \frac{-٢}{٢س + ١}$ منها $س = \frac{-١}{ص} - \frac{١}{٢}$

فى حالة $س \to \infty$ ∴ $ص \to$ صفر

∴ $\lim_{ص \to ٠} (١ + ص)^{\frac{-٢}{ص} - ١}$

$= \lim_{ص \to ٠} \left((١ + ص)^{\frac{١}{ص}}\right)^{-٢} \times (١ + ص)^{-١}$

∴ $هـ^{-٢} \times ١^{-١} = \frac{١}{هـ^{٢}}$

⑭ $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{٢س + ٥}{٢س + ١}\right)^{س + ٢}$

$= \lim_{س \to \infty} \left(١ + \frac{٤}{٢س + ١}\right)^{س + ٢}$

بفرض أن : $ص = \frac{٤}{٢س + ١}$ منها $س = \frac{٢}{ص} - \frac{١}{٢}$

فى حالة $س \to \infty$ فإن : $ص \to ٠$

∴ $\lim_{ص \to ٠} (١ + ص)^{\frac{٢}{ص} - \frac{١}{٢} + ٢}$

$= \lim_{ص \to ٠} (١ + ص)^{\frac{٢}{ص} + \frac{٣}{٢}}$

$= \lim_{ص \to ٠} \left((١ + ص)^{\frac{١}{ص}}\right)^{٢} \times (١ + ص)^{\frac{٣}{٢}}$

$= هـ^{٢} \times ١^{\frac{٣}{٢}} = هـ^{٢}$

٢

① $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{٣س} - ١}{س} = ٣ \lim_{٣س \to ٠} \frac{هـ^{٣س} - ١}{٣س}$

$= ٣ \times ١ = ٣$

② $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{٤س} - ١}{٥س} = \frac{٤}{٥} \lim_{٤س \to ٠} \frac{هـ^{٤س} - ١}{٤س}$

$= \frac{٤}{٥} \times ١ = \frac{٤}{٥}$

③ $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{س} + س - ١}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{س} - ١}{س} + \frac{س}{س} = ١ + ١ = ٢$

④ $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{س} - \text{جا}س - ١}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} \left(\frac{هـ^{س} - ١}{س} - \frac{\text{جا}س}{س}\right)$

$= ١ - ١ =$ صفر

⑤ $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{\text{جا}س} - ١}{\text{جا}س}$

بفرض أن : ص = جاس

فى حالة $س \to ٠$ ∴ $ص \to ٠$

∴ $\lim_{ص \to ٠} \frac{هـ^{ص} - ١}{ص} = ١$

⑥ $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{\text{ظا}س} - ١}{\text{ظا}س}$

بفرض أن ظاس = ص

فى حالة $س \to ٠$ ∴ $ص \to ٠$

∴ $\lim_{ص \to ٠} \frac{هـ^{ص} - ١}{ص} = ١$

⑦ $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{-س} - ١}{س}$

$= - \lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{-س} - ١}{-س} = -١$

⑧ $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}٢س}{هـ^{س} - ١} = \lim_{س \to ٠} \frac{\frac{\text{جا}٢س}{س}}{\frac{هـ^{س} - ١}{س}}$

$= \frac{\frac{٢}{١}}{١} = ٢$

⑨ $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{\text{ظا}س} - ١}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{\text{ظا}س} - ١}{\text{ظا}س} \times \frac{\text{ظا}س}{س}$

بجعل ص = ظاس فى النهاية الأولى

$\lim_{ص \to ٠} \frac{هـ^{ص} - ١}{ص} \times \lim_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}س}{س} = ١ \times ١ = ١$

⑩ $\lim_{س \to ٠} \frac{٣^{س} - ١}{س} = \text{لو}_{هـ} ٣$

⑪ $\lim_{س \to ٠} \frac{٥^{س} - ١}{٣^{س} - ١} = \lim_{س \to ٠} \frac{\frac{٥^{س} - ١}{س}}{\frac{٣^{س} - ١}{س}}$

$= \frac{\text{لو}_{هـ} ٥}{\text{لو}_{هـ} ٣} = \text{لو}_{٣} ٥$

⑫ $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}٥س}{٥^{س} - ١} = \lim_{س \to ٠} \frac{\frac{\text{جا}٥س}{س}}{\frac{٥^{س} - ١}{س}}$

$= \frac{٥}{\text{لو}_{هـ} ٥} = ٥ \, \text{لو}_{٥} هـ$

⑬ $\lim_{س \to ٠} \frac{٢^{\text{جا}س} - ١}{\text{جا}س}$

بفرض أن : ص = جاس

$\lim_{ص \to ٠} \frac{٢^{ص} - ١}{ص} = \text{لو}_{هـ} ٢$

③ $\underset{\text{س} \to ٦}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{٦}}{\text{س} - ٦}$

بفرض أن

س − ٦ = ص منها س = ص + ٦

$\underset{\text{ص} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{ص} + ٦} - \text{هـ}^{٦}}{\text{ص}} = \underset{\text{ص} \to ٠}{\text{نهـا}} \text{هـ}^{٦} \times \frac{(\text{هـ}^{\text{ص}} - ١)}{\text{ص}}$

$= \text{هـ}^{٦} \times ١ = \text{هـ}^{٦}$

④ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} (١ + ٤ \text{ جا}^{٢} \text{س})^{\text{قتا}^{٢} \text{س}}$

بفرض أن : $\text{ص} = ٤ \text{ جا}^{٢} \text{س}$

$\therefore \text{قتا}^{٢} \text{س} = \frac{٤}{\text{ص}}$

في حالة $\text{س} \to ٠ \quad \therefore \text{ص} \to ٠$

$\underset{\text{ص} \to ٠}{\text{نهـا}} (١ + \text{ص})^{\frac{٤}{\text{ص}}}$

$= \underset{\text{ص} \to ٠}{\text{نهـا}} \left((١ + \text{ص})^{\frac{١}{\text{ص}}}\right)^{٤} = \text{هـ}^{٤}$

⑤ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{جتا س}} - ١}{\text{جتا س}} = \frac{\text{هـ} - ١}{١} = \text{هـ} - ١$

⑥ $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{جتا س}} - ١}{\left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)}$

بفرض أن : $\text{ص} = \frac{\pi}{٢} - \text{س}$ منها $\text{س} = \frac{\pi}{٢} - \text{ص}$

$\therefore \text{جتا س} = \text{جا ص}$

في حالة $\text{س} \to \frac{\pi}{٢} \quad \therefore \text{ص} \to ٠$

$\therefore \underset{\text{ص} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{جا ص}} - ١}{\text{ص}}$

$= \underset{\text{جا ص} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{جا ص}} - ١}{\text{جا ص}} \times \frac{\text{جا ص}}{\text{ص}}$

$= ١ \times ١ = ١$

⑦ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{ب س}} - \text{هـ}^{\text{أ س}}}{\text{س}}$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{أ س}} (\text{هـ}^{(\text{ب} - \text{أ}) \text{س}} - ١)}{\text{س}}$

$= (\text{ب} - \text{أ}) \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \text{هـ}^{\text{أ س}} \times$

$\underset{(\text{ب} - \text{أ}) \text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{هـ}^{(\text{ب} - \text{أ}) \text{س}} - ١}{(\text{ب} - \text{أ}) \text{س}} \right)$

$\therefore (\text{ب} - \text{أ}) \times \text{هـ}^{٠} \times ١ = \text{ب} - \text{أ}$

⑧ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{جا س}}}{\text{س} - \text{جا س}}$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{جا س}} (\text{هـ}^{\text{س} - \text{جا س}} - ١)}{\text{س} - \text{جا س}}$

بفرض أن : ص = س − جا س

في حالة $\text{س} \to ٠ \quad \therefore \text{ص} \to ٠$

$\therefore \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \text{هـ}^{\text{جا س}} \times \underset{\text{ص} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(\text{هـ}^{\text{ص}} - ١)}{\text{ص}}$

$= \text{هـ}^{٠} \times ١ = ١$

٧

① (جـ) ② (ب) ③ (د)

إرشادات لحل رقم ٧

① $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \left[\frac{\text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١)}{\text{س}} \times \frac{(\text{س} + ٢)}{(\text{س} + ٢)} \right]$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١)}{(\text{س}^{٢} + ٢\text{س})}$

$\times \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} (\text{س} + ٢) = ١ \times ٢ = ٢$

② $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \left[\frac{\text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١)}{\text{س} (\text{س} + ٢)} \right.$

$\left. \times \frac{\text{س} (\text{س} + ٥)}{\text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ١)} \times \frac{(\text{س} + ٢)}{(\text{س} + ٥)} \right]$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١)}{(\text{س}^{٢} + ٢\text{س})}$

$\times \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}^{٢} + ٥\text{س})}{\text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ١)}$

$\times \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} + ٢}{\text{س} + ٥} = ١ \times ١ \times \frac{٢}{٥} = \frac{٢}{٥}$

③ $\because \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{أ س}} - ١}{\text{لو}_{\text{هـ}} (١ + ٢\text{س})} = ٢$

$\therefore \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \left[\frac{\text{هـ}^{\text{أ س}} - ١}{\text{أ س}} \times \frac{٢\text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}} (١ + ٢\text{س})} \times \frac{\text{أ س}}{٢\text{س}} \right]$

$= ٢$

$\therefore \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{أ س}} - ١}{\text{أ س}}$

$\times \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}} (١ + ٢\text{س})} \times \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{أ}}{٢} = ٢$

$\therefore ١ \times ١ \times \frac{\text{أ}}{٢} = ٢ \qquad \therefore \text{أ} = ٦$

٨

① $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} (\text{هـ}^{\text{س}} - ١)}{١ - \text{جتا } ٢\text{س}} = \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} (\text{هـ}^{\text{س}} - ١)}{٢ \text{ جا}^{٢} \text{س}}$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} (\text{هـ}^{\text{س}} - ١)}{\text{س}^{٢}} \times \frac{\text{س}^{٢}}{٢ \text{ جا}^{٢} \text{س}}$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - ١}{\text{س}} \times \frac{\text{س}^{٢}}{٢ \text{ جا}^{٢} \text{س}}$

$= ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

② $\underset{\text{س} \to \text{هـ}}{\text{نهـا}} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - ١}{\text{س} - \text{هـ}}$

بفرض $\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - ١ = \text{ص}$

$\therefore \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} = ١ + \text{ص}$ ، $\text{س} = \text{هـ}^{١ + \text{ص}}$

، عندما $\text{س} \to \text{هـ}$ فإن $\text{ص} \to ٠$

$\therefore \underset{\text{ص} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ص}}{\text{هـ}^{١ + \text{ص}} - \text{هـ}} = \underset{\text{ص} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{هـ}} \times \frac{\text{ص}}{\text{هـ}^{\text{ص}} - ١}$

$= \frac{١}{\text{هـ}}$

③ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} (\text{هـ}^{\text{س} + ٢} - \text{هـ}^{٢})}{١ - \text{جتا س}}$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} \text{ هـ}^{٢} (\text{هـ}^{\text{س}} - ١)}{٢ \text{ جا}^{٢} \frac{\text{س}}{٢}}$

$= \text{هـ}^{٢} \underset{\text{س}^{٢} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢}}{٢ \text{ جا}^{٢} \frac{\text{س}}{٢}} \times \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - ١}{\text{س}}$

$= \text{هـ}^{٢} \times \frac{١}{٢ \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}} \times ١ = ٢ \text{هـ}^{٢}$

④ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(\text{أب})^{\text{س}} - \text{أ}^{\text{س}} - \text{ب}^{\text{س}} + ١}{\text{س}^{٢}}$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{أ}^{\text{س}} (\text{ب}^{\text{س}} - ١) - (\text{ب}^{\text{س}} - ١)}{\text{س}^{٢}}$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(\text{ب}^{\text{س}} - ١)(\text{أ}^{\text{س}} - ١)}{\text{س}^{٢}}$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ب}^{\text{س}} - ١}{\text{س}} \times \frac{\text{أ}^{\text{س}} - ١}{\text{س}}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ب} \times \text{لو}_{\text{هـ}} \text{أ}$

⑤ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١٠^{\text{س}} - ٢^{\text{س}} - ٥^{\text{س}} + ١}{\text{س جا س}}$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢^{\text{س}} (٥^{\text{س}} - ١) - (٥^{\text{س}} - ١)}{\text{س جا س}}$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(٥^{\text{س}} - ١) \times (٢^{\text{س}} - ١)}{\text{س جا س}}$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٥^{\text{س}} - ١}{\text{س}} \times \frac{٢^{\text{س}} - ١}{\text{س}} \times \frac{\text{س}}{\text{جا س}}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} ٥ \times \text{لو}_{\text{هـ}} ٢ \times ١$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} ٥ \times \text{لو}_{\text{هـ}} ٢$

⑥ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} (٣ + \text{س}) - \text{لو}_{\text{هـ}} (٣ - \text{س})}{\text{س}}$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} ٣ \left(١ + \frac{١}{٣} \text{س}\right) - \text{لو}_{\text{هـ}} ٣ \left(١ - \frac{١}{٣} \text{س}\right)}{\text{س}}$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} ٣ + \text{لو}_{\text{هـ}} \left(١ + \frac{١}{٣} \text{س}\right) - \text{لو}_{\text{هـ}} ٣ - \text{لو}_{\text{هـ}} \left(١ + \frac{-١}{٣} \text{س}\right)}{\text{س}}$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} \left(١ + \frac{١}{٣} \text{س}\right)}{\text{س}}$

$- \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} \left(١ + \frac{-١}{٣} \text{س}\right)}{\text{س}}$

$= \frac{١}{٣} \underset{\frac{١}{٣} \text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} \left(١ + \frac{١}{٣} \text{س}\right)}{\frac{١}{٣} \text{س}}$

$+ \frac{١}{٣} \underset{-\frac{١}{٣} \text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} \left(١ + \frac{-١}{٣} \text{س}\right)}{-\frac{١}{٣} \text{س}}$

$= \frac{١}{٣} \times ١ + \frac{١}{٣} \times ١ = \frac{٢}{٣}$

⑦ $\lim_{س\to 2} \frac{3^{س}-9}{2^{س}-4} = \lim_{س\to 2} \frac{3^2(3^{س-2}-1)}{2^2(2^{س-2}-1)}$

بفرض أن ص = س − ٢ منها س = ص + ٢

في حالة س ← ٢ فإن ص ← ٠

∴ $\lim_{ص\to 0} \frac{9}{4}\times\frac{3^{ص}-1}{2^{ص}-1}$

$= \frac{9}{4}\times \lim_{ص\to 0} \frac{\frac{3^{ص}-1}{ص}}{\frac{2^{ص}-1}{ص}}$

$= \frac{9}{4}\times\frac{\log_{هـ} 3}{\log_{هـ} 2} = \frac{9}{4}\log_2 3$

⑧ $\lim_{س\to 0^+} \frac{هـ^{س}-1}{\sqrt{1-جتا\, س}}$

$= \lim_{س\to 0^+} \frac{هـ^{س}-1}{\sqrt{2\, جا^2 \frac{س}{2}}}$

$= \lim_{س\to 0^+} \frac{هـ^{س}-1}{س}\times\frac{س}{\sqrt{2}\, جا \frac{س}{2}}$

$= 1\times\frac{1}{\sqrt{2}\times\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

⑨ ∵ $هـ^{س} = \sum_{ر=0}^{\infty}\frac{س^{ر}}{\underline{ر}}$

$= 1+\frac{س}{\underline{1}}+\frac{س^2}{\underline{2}}+\frac{س^3}{\underline{3}}+\frac{س^4}{\underline{4}}+ ...$

$= 1+س+\frac{س^2}{2}+\frac{س^3}{6}+\frac{س^4}{24}+ ...$

∴ $\lim_{س\to 0}\frac{هـ^{س}-1-س-\frac{س^2}{2}}{س^3}$

$= \lim_{س\to 0}\frac{1+س+\frac{س^2}{2}+\frac{س^3}{6}+\frac{س^4}{24}+ ... +(-1-س-\frac{س^2}{2})}{س^3}$

$= \lim_{س\to 0}\frac{\frac{س^3}{6}+\frac{س^4}{24}+ ...}{س^3}$

$= \lim_{س\to 0}\left(\frac{1}{6}+\frac{س}{24}+ ...\right) = \frac{1}{6}$

اجابات تمارين 7

١

① $ص = هـ^{3س}$

∴ $ص' = هـ^{3س}\times 3 = 3هـ^{3س}$

② $ص = 7هـ^{س+4}$

∴ $ص' = 7هـ^{س+4}\times 1 = 7هـ^{س+4}$

③ $ص = هـ^{2س+2}$

∴ $ص' = هـ^{2س+2}\times 2 = 2هـ^{2س+2}$

④ $ص = \frac{1}{2}هـ^{3-6س-س^2}$

∴ $ص' = \frac{1}{2}هـ^{3-6س-س^2}\times(-6-2س)$

$= (-س-3)\, هـ^{3-6س-س^2}$

⑤ $ص = هـ^{3س^5}$

∴ $ص' = هـ^{3س^5}\times 15س^4 = 15س^4 هـ^{3س^5}$

⑥ $ص = هـ^{س^2-س}$

∴ $ص' = هـ^{س^2-س}\times(2س-1)$

$= (2س-1)\, هـ^{س^2-س}$

⑦ $ص = \frac{1}{2}هـ^{س} - 5هـ$

∴ $ص' = \frac{1}{2}هـ^{س}$

⑧ $ص = هـ^{(س+1)^2}$

∴ $ص' = هـ^{(س+1)^2}\times 2(س+1)$

$= 2(س+1)\, هـ^{(س+1)^2}$

⑨ $ص = س^2 هـ^{-3}$

∴ $ص' = 2هـ^{-3}س$

⑩ $ص = س^2 + 3هـ^{س}$

∴ $ص' = 2س + 3هـ^{س}$

⑪ $ص = 2هـ^{س} + جتا\, 2س$

∴ $ص' = 2هـ^{س} - 2\, جا\, 2س$

⑫ $ص = 2س + هـ^{6س}$

∴ $ص' = 2 + هـ^{6س}\times 6 = 2 + 6هـ^{6س}$

⑬ $ص = س^2 + ظا\, س + هـ^{5س+1}$

∴ $ص' = 2س + قا^2 س + 5هـ^{5س+1}$

⑭ $ص = هـ^{5} + هـ^{5س} + هـ^{5س^2}$

∴ $ص' = 0 + 5هـ^{5س} + 10س\, هـ^{5س^2}$

$= 5هـ^{5س} + 10س\, هـ^{5س^2}$

٢

① $ص = 3^{س}$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = 3^{س}\log_{هـ} 3$

② $ص = \left(\frac{1}{2}\right)^{س}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \left(\frac{1}{2}\right)^{س}\times\log_{هـ}\frac{1}{2}$

③ $ص = 5\times 6^{س}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = 5\times 6^{س}\log_{هـ} 6$

④ $ص = 5^{س^3+2س}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = 5^{س^3+2س}\times(3س^2+2)\log_{هـ} 5$

⑤ $ص = 7^{س} + س^7$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = 7^{س}\log_{هـ} 7 + 7س^6$

⑥ $ص = 3^{3س^2-5س+2}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = 3^{3س^2-5س+2}\times(6س-5)\log_{هـ} 3$

⑦ $ص = 2هـ^{قا\, س}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = 2هـ^{قا\, س}\times قا\, س\, ظا\, س$

⑧ $ص = هـ^{جتا\, س}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = هـ^{جتا\, س}\times -جا\, س = -جا\, س\, هـ^{جتا\, س}$

⑨ $ص = هـ^{\sqrt{س}}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = هـ^{\sqrt{س}}\times\frac{1}{2\sqrt{س}} = \frac{هـ^{\sqrt{س}}}{2\sqrt{س}}$

⑩ $ص = (3^{س-1})^{-2}$

∴ $ص = 3^{-2س+2}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = 3^{-2س+2}\times -2\times\log_{هـ} 3$

$= -2\times 3^{-2س+2}\log_{هـ} 3$

⑪ $ص = هـ^{جا\sqrt{س}}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = هـ^{جا\sqrt{س}}\times جتا\sqrt{س}\times\frac{1}{2\sqrt{س}}$

$= \frac{جتا\sqrt{س}}{2\sqrt{س}}\times هـ^{جا\sqrt{س}}$

⑫ $ص = هـ^{\sqrt{ظا\, س}}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = هـ^{\sqrt{ظا\, س}}\times\frac{-قا^2 س}{2\sqrt{ظا\, س}}$

$= \frac{-قا^2 س}{2\sqrt{ظا\, س}}\times هـ^{\sqrt{ظا\, س}}$

٣

① $ص = س\, هـ^{س^2}$

∴ $ص' = هـ^{س^2} + س\, هـ^{س^2}\times 2س$

$= هـ^{س^2}(1+2س^2)$

② $ص = س^2 هـ^{س}$

∴ $ص' = 2س\, هـ^{س} + س^2 هـ^{س}$

$= س\, هـ^{س}(2+س)$

③ $ص = (س^2+3)\, هـ^{-3س}$

∴ $ص' = 2س\, هـ^{-3س} + (س^2+3)\, هـ^{-3س}\times -3$

$= هـ^{-3س}(2س - 3س^2 - 9)$

④ $ص = 2س^4 هـ^{1+س}$

∴ $ص' = 8س^3 هـ^{1+س} + 2س^4 هـ^{1+س}$

$= 2س^3 هـ^{1+س}(4+س)$

⑤ $ص = (3س-5)\, هـ^{س^2}$

∴ $ص' = 3هـ^{س^2} + (3س-5)\, هـ^{س^2}\times 2س$

$= هـ^{س^2}(3 + 6س^2 - 10س)$

(٦) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جاس}$

$\therefore \text{ص}' = \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جاس} + \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتاس}$

$= \text{هـ}^{\text{س}} (\text{جاس} + \text{جتاس})$

(٧) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{٢س}}\ \text{قا ٣س}$

$\therefore \text{ص}' = \text{هـ}^{\text{٢س}} \times ٢ \times \text{قا ٣س} + \text{هـ}^{\text{٢س}}\ \text{قا ٣س ظا ٣س} \times ٣$

$= \text{قا ٣س} \,.\, \text{هـ}^{\text{٢س}} (٢ + ٣\ \text{ظا ٣س})$

(٨) $\text{ص} = \text{س} \times ٥^{\text{س}}$

$\therefore \text{ص}' = ٥^{\text{س}} + \text{س} \times ٥^{\text{س}}\ \text{لو}_{\text{هـ}} ٥$

$= ٥^{\text{س}} (١ + \text{س لو}_{\text{هـ}} ٥)$

(٩) $\text{ص} = ٢^{\text{س}} (\text{س} + ١)$

$\therefore \text{ص}' = ٢^{\text{س}} (\text{س} + ١)\ \text{لو}_{\text{هـ}} ٢ + ٢^{\text{س}} \times ١$

$= ٢^{\text{س}} (\text{س لو}_{\text{هـ}} ٢ + \text{لو}_{\text{هـ}} ٢ + ١)$

(١٠) $\text{ص} = \sqrt{\text{س}}\ \text{هـ}^{\text{س}}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}\ \text{هـ}^{\text{س}} + \sqrt{\text{س}}\ \text{هـ}^{\text{س}}$

$= \text{هـ}^{\text{س}} \left(\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} + \sqrt{\text{س}}\right)$

(١١) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{جاس}} \times ٢^{-٥\text{س}}$

$\therefore \text{ص}' = \text{هـ}^{\text{جاس}} \times \text{جتاس} \times ٢^{-٥\text{س}} + \text{هـ}^{\text{جاس}} \times ٢^{-٥\text{س}} \times -٥ \times \text{لو}_{\text{هـ}} ٢$

$= \text{هـ}^{\text{جاس}} \times ٢^{-٥\text{س}} (\text{جتاس} - ٥\ \text{لو}_{\text{هـ}} ٢)$

(١٢) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{ظاس}} \times ٥^{٧\text{س}^٢}$

$\therefore \text{ص}' = \text{هـ}^{\text{ظاس}} \times \text{قا}^٢\text{س} \times ٥^{٧\text{س}^٢} + \text{هـ}^{\text{ظاس}} \times ٥^{٧\text{س}^٢} \times ١٤\text{س} \times \text{لو}_{\text{هـ}} ٥$

$= \text{هـ}^{\text{ظاس}} \times ٥^{٧\text{س}^٢} (\text{قا}^٢\text{س} + ١٤\ \text{س لو}_{\text{هـ}} ٥)$

(١٣) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{٢س}} \times \text{أ}^{\text{س}^٢ - ٥}$

$\therefore \text{ص}' = \text{هـ}^{\text{٢س}} \times ٢ \times \text{أ}^{\text{س}^٢ - ٥} + \text{هـ}^{\text{٢س}} \times \text{أ}^{\text{س}^٢ - ٥} \times ٢\text{س} \times \text{لو}_{\text{هـ}} \text{أ}$

$= ٢\ \text{هـ}^{\text{٢س}} \times \text{أ}^{\text{س}^٢ - ٥} (١ + \text{س لو}_{\text{هـ}} \text{أ})$

(١٤) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \times \text{جا}^٢\text{س}$

$\therefore \text{ص}' = \text{هـ}^{\text{س}} \times \text{جا}^٢\text{س} + \text{هـ}^{\text{س}} \times ٢\ \text{جاس جتاس}$

$= \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جاس} (\text{جاس} + ٢\ \text{جتاس})$

٤

(١) $\text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{هـ}^{\text{٢س}}}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{\text{هـ}^{\text{٢س}} \times ١ - \text{س} \times \text{هـ}^{\text{٢س}} \times ٢}{\text{هـ}^{\text{٤س}}}$

$= \text{هـ}^{-\text{٢س}} (١ - ٢\text{س})$

(٢) $\text{ص} = \frac{٢\ \text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{س} + ١)}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{(\text{س} + ١) \times ٢\ \text{هـ}^{\text{س}} - ٢\ \text{هـ}^{\text{س}} (١)}{(\text{س} + ١)^٢}$

$= \frac{٢\ \text{س هـ}^{\text{س}}}{(\text{س} + ١)^٢}$

(٣) $\text{ص} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}^٢}}{\text{س}}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{\text{س هـ}^{\text{س}^٢} \times ٢\text{س} - \text{هـ}^{\text{س}^٢} \times ١}{\text{س}^٢}$

$= \frac{\text{هـ}^{\text{س}^٢} (٢\text{س}^٢ - ١)}{\text{س}^٢}$

(٤) $\text{ص} = \frac{٢^{\text{س}}}{\text{س}}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{\text{س} \times ٢^{\text{س}}\ \text{لو}_{\text{هـ}} ٢ - ٢^{\text{س}} \times ١}{\text{س}^٢}$

$= \frac{٢^{\text{س}} (\text{س لو}_{\text{هـ}} ٢ - ١)}{\text{س}^٢}$

(٥) $\text{ص} = \frac{\text{هـ}^{\text{٢س} + ٢}}{\text{س}^٢ + ٣}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{(\text{س}^٢ + ٣)\ \text{هـ}^{\text{٢س} + ٢} \times ٢ - \text{هـ}^{\text{٢س} + ٢} \times ٢\text{س}}{(\text{س}^٢ + ٣)^٢}$

$= \frac{٢\ \text{هـ}^{\text{٢س} + ٢} (\text{س}^٢ + ٣ - \text{س})}{(\text{س}^٢ + ٣)^٢}$

(٦) $\text{ص} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{ظاس}}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{\text{ظاس هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{قا}^٢\text{س}}{(\text{ظاس})^٢}$

$= \frac{\text{هـ}^{\text{س}} (\text{ظاس} - \text{قا}^٢\text{س})}{\text{ظا}^٢\text{س}}$

(٧) $\text{ص} = \frac{\text{جا ٣س}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا ٣س} \times ٣ - \text{جا ٣س} \times \text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{هـ}^{\text{س}})^٢}$

$= \text{هـ}^{-\text{س}} (٣\ \text{جتا ٣س} - \text{جا ٣س})$

(٨) $\text{ص} = \frac{\text{هـ}^{\text{جاس}}}{\text{جتاس}}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{\text{جتاس} \times \text{هـ}^{\text{جاس}} \times \text{جتاس} - \text{هـ}^{\text{جاس}} (-\text{جاس})}{(\text{جتاس})^٢}$

$= \frac{\text{هـ}^{\text{جاس}} (\text{جتا}^٢\text{س} + \text{جاس})}{\text{جتا}^٢\text{س}}$

(٩) $\text{ص} = \frac{\text{هـ}^{-\text{٢س}}}{\sqrt{\text{س} + ١}}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{\sqrt{\text{س} + ١} \times \text{هـ}^{-\text{٢س}} \times -٢ - \text{هـ}^{-\text{٢س}} \times \frac{١}{٢\sqrt{\text{س} + ١}}}{(\sqrt{\text{س} + ١})^٢}$

$= \frac{-٤ (\text{س} + ١)\ \text{هـ}^{-\text{٢س}} - \text{هـ}^{-\text{٢س}}}{٢ (\text{س} + ١) \sqrt{\text{س} + ١}}$

(١٠) $\text{ص} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} + ١}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{(\text{هـ}^{\text{س}} + ١)\ \text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}} \times \text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{هـ}^{\text{س}} + ١)^٢}$

$= \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{هـ}^{\text{س}} + ١)^٢}$

(١١) $\text{ص} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{١ + \text{جتاس}}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{(١ + \text{جتاس})\ \text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}} (-\text{جاس})}{(١ + \text{جتاس})^٢}$

$= \frac{\text{هـ}^{\text{س}} (١ + \text{جتاس} + \text{جاس})}{(١ + \text{جتاس})^٢}$

(١٢) $\text{ص} = \frac{٣^{\text{س}}}{٣^{\text{س}} + ١}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{(٣^{\text{س}} + ١)(٣^{\text{س}}\ \text{لو}_{\text{هـ}} ٣) - ٣^{\text{س}} (٣^{\text{س}}\ \text{لو}_{\text{هـ}} ٣)}{(٣^{\text{س}} + ١)^٢}$

$= \frac{٣^{\text{س}}\ \text{لو}_{\text{هـ}} ٣}{(٣^{\text{س}} + ١)^٢}$

(١٣) $\text{ص} = (\text{هـ}^{\text{٢س}} - \text{هـ}^{-\text{٢س}})^٥$

$\therefore \text{ص}' = ٥ (\text{هـ}^{\text{٢س}} - \text{هـ}^{-\text{٢س}})^٤ (٢\ \text{هـ}^{\text{٢س}} + ٢\ \text{هـ}^{-\text{٢س}})$

(١٤) $\text{ص} = (\text{هـ}^{\text{٢س}} + \text{هـ}^{-\text{٢س}})^٣$

$\therefore \text{ص}' = ٣ (\text{هـ}^{\text{٢س}} + \text{هـ}^{-\text{٢س}})^٢ \times (٢\ \text{هـ}^{\text{٢س}} - ٢\ \text{هـ}^{-\text{٢س}})$

$= ٦ (\text{هـ}^{\text{٢س}} - \text{هـ}^{-\text{٢س}}) (\text{هـ}^{\text{٢س}} + \text{هـ}^{-\text{٢س}})^٢$

٥

(١) $\text{ص} = ٥\ \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} \qquad \therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٥}{\text{س}}$

(٢) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} ٧\text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٧\text{س}} \times ٧ = \frac{١}{\text{س}}$

(٣) $\text{ص} = ٣\ \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س} + ٤)$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٣}{\text{س} + ٤}$

(٤) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} (٢\text{س} - ٧)$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢\text{س} - ٧} \times ٢ = \frac{٢}{٢\text{س} - ٧}$

(٥) $\text{ص} = ٣\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣ + \frac{١}{\text{س}}$

(٦) $\text{ص} = ٥ - ٣\ \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-٣}{\text{س}}$

(٧) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} \left(\frac{١}{٢} \text{س}^٢ + \text{س}\right)$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{س} + ١}{\frac{١}{٢} \text{س}^٢ + \text{س}}$

(٨) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} (٣\text{س}^٢ + ٩)$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٦\text{س}}{٣\text{س}^٢ + ٩}$

(٩) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} \left(\frac{١}{\text{س}^٢ + ٩}\right) = -\text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س}^٢ + ٩)$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-١}{\text{س}^٢ + ٩} \times ٢\text{س} = \frac{-٢\text{س}}{\text{س}^٢ + ٩}$

(١٠) $\text{ص} = \text{لو}_{٢} \text{س} \qquad \therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{\text{س}}\ \text{لو}_{٢} \text{هـ}$

(١١) $\text{ص} = \text{لو}_{٥} (٣\text{س} - ٢)$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٣}{٣\text{س} - ٢} \times \text{لو}_{٥} \text{هـ}$

⑫ $ص = ٢ هـ^{٣س} - ٥ لو_{٢} \frac{س}{٥}$

$∴ \frac{ءص}{ءس} = ٦ هـ^{٣س} - \frac{٥ \times \frac{١}{٥}}{\frac{س}{٥}} لو_{٢} هـ$

$= ٦ هـ^{٣س} - \frac{٥ لو_{٢} هـ}{س}$

⑬ $ص = لو_{هـ} س^{٢} - هـ^{\frac{١}{٤} س}$

$∴ \frac{ءص}{ءس} = \frac{٢س}{س^{٢}} - \frac{١}{٤} هـ^{\frac{١}{٤} س}$

$= \frac{٢}{س} - \frac{١}{٤} هـ^{\frac{١}{٤} س}$

⑭ $ص = لو (٢س - ٣)^{٢}$

$∴ \frac{ءص}{ءس} = \frac{٢ \times ٢ (٢س - ٣)}{(٢س - ٣)^{٢}} لو هـ$

$= \frac{٤ لو هـ}{(٢س - ٣)}$

⑮ $ص = ٣ جتاس - هـ^{س} - \frac{١}{٢} لو_{هـ} س$

$∴ \frac{ءص}{ءس} = -٣ جاس - هـ^{س} - \frac{١}{٢س}$

⑯ $ص = ٣^{س} + ٣ لو_{هـ} س - ٢٠٢١$

$∴ \frac{ءص}{ءس} = ٣^{س} لو_{هـ} ٣ + \frac{٣}{س}$

⑰ $ص = لو_{هـ} \frac{س^{٢}}{س + ٧} = لو_{هـ} س^{٢} - لو_{هـ} (س + ٧)$

$∴ \frac{ءص}{ءس} = \frac{٢س}{س^{٢}} - \frac{١}{س + ٧} = \frac{٢}{س} - \frac{١}{س + ٧}$

⑱ $ص = لو \left(\frac{هـ^{س^{٢}}}{س^{٢}}\right) = لو هـ^{س^{٢}} - لو س^{٢}$

$∴ \frac{ءص}{ءس} = \frac{هـ^{س^{٢}} \times ٢س}{هـ^{س^{٢}}} لو هـ - \frac{٢س}{س^{٢}} لو هـ$

$= \left(٢س - \frac{٢}{س}\right) لو هـ$

٦

① $ص = س لو_{هـ} س$

$∴ \frac{ءص}{ءس} = لو_{هـ} س + س \times \frac{١}{س} = لو_{هـ} س + ١$

② $ص = س^{٢} لو_{هـ} س$

$∴ \frac{ءص}{ءس} = ٢ س لو_{هـ} س + س^{٢} \times \frac{١}{س}$

$= ٢ س لو_{هـ} س + س$

$= س (٢ لو_{هـ} س + ١)$

③ $ص = س لو_{هـ} س^{٢}$

$∴ \frac{ءص}{ءس} = لو_{هـ} س^{٢} + س \times \frac{٢س}{س^{٢}}$

$= لو_{هـ} س^{٢} + ٢$

④ $ص = (٢ س^{٥} - ٣) لو_{هـ} س$

$∴ \frac{ءص}{ءس} = ١٠ س^{٤} لو_{هـ} س + (٢ س^{٥} - ٣) \times \frac{١}{س}$

$= ١٠ س^{٤} لو_{هـ} س + ٢ س^{٤} - \frac{٣}{س}$

⑤ $ص = (س + ٣) لو_{هـ} س$

$∴ \frac{ءص}{ءس} = لو_{هـ} س + (س + ٣) \times \frac{١}{س}$

$= لو_{هـ} س + \frac{٣}{س} + ١$

⑥ $ص = ٢ س^{٢} لو_{هـ} س^{٣}$

$∴ \frac{ءص}{ءس} = ٤ س لو_{هـ} س^{٣} + ٢ س^{٢} \times \frac{٣ س^{٢}}{س^{٣}}$

$= ٤ س لو_{هـ} س^{٣} + ٦ س$

⑦ $ص = ٢ س + هـ^{س} لو_{هـ} س$

$∴ \frac{ءص}{ءس} = ٢ + هـ^{س} لو_{هـ} س + هـ^{س} \times \frac{١}{س}$

$= ٢ + هـ^{س} لو_{هـ} س + \frac{هـ^{س}}{س}$

$= ٢ + هـ^{س} \left(لو_{هـ} س + \frac{١}{س}\right)$

⑧ $ص = هـ^{س} لو_{هـ} (س^{٢} + ١)$

$∴ \frac{ءص}{ءس} = هـ^{س} لو_{هـ} (س^{٢} + ١) + هـ^{س} \frac{٢ س}{س^{٢} + ١}$

$= هـ^{س} \left(لو_{هـ} (س^{٢} + ١) + \frac{٢ س}{س^{٢} + ١}\right)$

⑨ $ص = ٥ + ٤ جتاس لو_{هـ} س$

$∴ \frac{ءص}{ءس} = -٤ جاس لو_{هـ} س + ٤ جتاس \times \frac{١}{س}$

$= -٤ جاس لو_{هـ} س + \frac{٤ جتاس}{س}$

⑩ $ص = (لو س)^{٣} + \sqrt{س} لو س^{٤}$

$∴ \frac{ءص}{ءس} = ٣ (لو س)^{٢} \times \frac{١}{س} لو_{١٠} هـ$

$+ \frac{١}{٢\sqrt{س}} لو س^{٤} + \sqrt{س} \times \frac{٤ س^{٣}}{س^{٤}} لو_{١٠} هـ$

$= \frac{٣}{س} (لو س)^{٢} لو_{١٠} هـ$

$+ \frac{لو س^{٤}}{٢\sqrt{س}} + \frac{٤}{\sqrt{س}} لو_{١٠} هـ$

⑪ $ص = \frac{س}{لو_{هـ} س}$

$∴ \frac{ءص}{ءس} = \frac{لو_{هـ} س (١) - س \times \frac{١}{س}}{(لو_{هـ} س)^{٢}}$

$= \frac{لو_{هـ} س - ١}{(لو_{هـ} س)^{٢}}$

⑫ $ص = \frac{لو_{هـ} (٥ س)}{س + ١}$

$∴ \frac{ءص}{ءس} = \frac{(س + ١) \frac{٥}{٥ س} - لو_{هـ} ٥ س (١)}{(س + ١)^{٢}}$

$= \frac{س + ١ - س لو_{هـ} ٥ س}{س (س + ١)^{٢}}$

⑬ $ص = \frac{لو_{هـ} س}{جاس}$

$∴ \frac{ءص}{ءس} = \frac{جاس \times \frac{١}{س} - لو_{هـ} س جتاس}{(جاس)^{٢}}$

$= \frac{جاس - س لو_{هـ} س جتاس}{س جا^{٢} س}$

⑭ $ص = \frac{لو_{هـ} س}{ظاس}$

$∴ \frac{ءص}{ءس} = \frac{ظاس \left(\frac{١}{س}\right) - لو_{هـ} س قا^{٢} س}{ظا^{٢} س}$

$= \frac{ظاس - س لو_{هـ} س قا^{٢} س}{س ظا^{٢} س}$

⑮ $ص = \frac{هـ^{٢س}}{لو س}$

$∴ \frac{ءص}{ءس} = \frac{لو س \times هـ^{٢س} \times ٢ - هـ^{٢س} \times \frac{١}{س} لو هـ}{(لو س)^{٢}}$

$= \frac{هـ^{٢س} (٢ لو س - \frac{١}{س} لو هـ)}{(لو س)^{٢}}$

⑯ $ص = \frac{لو س}{١ + لو س}$

$∴ \frac{ءص}{ءس} = \frac{(١ + لو س) \times \frac{١}{س} لو هـ - لو س \times \frac{١}{س} لو هـ}{(١ + لو س)^{٢}}$

$= \frac{لو هـ}{س (١ + لو س)^{٢}}$

⑰ $ص = \frac{(لو_{هـ} س) - ١}{(لو_{هـ} س) + ١}$

$∴ \frac{ءص}{ءس} = \frac{(لو_{هـ} س + ١) \times \frac{١}{س} - (لو_{هـ} س - ١) \times \frac{١}{س}}{(لو_{هـ} س + ١)^{٢}}$

$= \frac{٢}{س (لو_{هـ} س + ١)^{٢}}$

⑱ $ص = \frac{١ - ٢ لو_{هـ} س}{لو_{هـ} س}$

$∴ \frac{ءص}{ءس} = \frac{لو_{هـ} س \times \left(\frac{-٢}{س}\right) - (١ - ٢ لو_{هـ} س) \times \frac{١}{س}}{(لو_{هـ} س)^{٢}}$

$= \frac{-٢ لو_{هـ} س - ١ + ٢ لو_{هـ} س}{س (لو_{هـ} س)^{٢}} = \frac{-١}{س (لو_{هـ} س)^{٢}}$

٧

① $س = هـ^{٢ن}$ ∴ $\frac{ءس}{ءن} = ٢ هـ^{٢ن}$

، $ص = ن^{٣}$ ∴ $\frac{ءص}{ءن} = ٣ ن^{٢}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٣ن^{٢} ÷ ٢ هـ^{٢ن} = \frac{٣ن^{٢}}{٢ هـ^{٢ن}}$

، $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = \frac{ء}{ءس}\left(\frac{٣ن^{٢}}{٢ هـ^{٢ن}}\right)$

$= \left(\frac{٢ هـ^{٢ن}(٦ن) - ٣ن^{٢} × ٤ هـ^{٢ن}}{٤ هـ^{٤ن}}\right) × \frac{ءن}{ءس}$

$= \frac{١٢ ن هـ^{٢ن}(١ - ن)}{٤ هـ^{٤ن}} × \frac{١}{٢ هـ^{٢ن}}$

$= \frac{٣}{٢} ن هـ^{-٤ن}(١ - ن)$

② $س = هـ^{٢ن}$ ∴ $\frac{ءس}{ءن} = ٢ هـ^{٢ن}$

، $ص = هـ^{٣ن}$ ∴ $\frac{ءص}{ءن} = ٣ هـ^{٣ن}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٣ هـ^{٣ن} ÷ ٢ هـ^{٢ن} = \frac{٣}{٢} هـ^{ن}$

∴ $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = \frac{ء}{ءس}\left(\frac{٣}{٢} هـ^{ن}\right)$

$= \frac{٣}{٢} هـ^{ن} \frac{ءن}{ءس} = \frac{٣}{٢} هـ^{ن} × \frac{١}{٢ هـ^{٢ن}}$

$= \frac{٣}{٤} هـ^{-ن}$

③ $س = ٦ لو_{هـ} ن$ ∴ $\frac{ءس}{ءن} = \frac{٦}{ن}$

، $ص = ن^{٢}$ ∴ $\frac{ءص}{ءن} = ٢ن$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٢ن ÷ \frac{٦}{ن} = \frac{١}{٣} ن^{٢}$

∴ $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = \frac{ء}{ءس}\left(\frac{١}{٣} ن^{٢}\right) = \frac{٢}{٣} ن × \frac{ءن}{ءس}$

$= \frac{٢}{٣} ن × \frac{ن}{٦}$

$= \frac{١}{٩} ن^{٢}$

٨

① $ص = لو_{هـ} س$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{س}$

∴ $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = -س^{-٢}$ ∴ $\frac{ء^{٣}ص}{ءس^{٣}} = ٢ س^{-٣}$

② $ص = س^{٣} + هـ^{٢س}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٣س^{٢} + ٢ هـ^{٢س}$

∴ $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ٦س + ٤ هـ^{٢س}$

∴ $\frac{ء^{٣}ص}{ءس^{٣}} = ٦ + ٨ هـ^{٢س}$

③ $ص = س لو س$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = لو س + س × \frac{١}{س} لو هـ$

$= لو س + لو هـ$

∴ $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = \frac{١}{س} × لو هـ + ٠ = \frac{لو هـ}{س} = س^{-١} لو هـ$

∴ $\frac{ء^{٣}ص}{ءس^{٣}} = -س^{-٢} لو هـ$

٩

① $ص = \sqrt{س} - ٢ هـ^{س}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢\sqrt{س}} - ٢ هـ^{س}$

∴ ميل المماس $= \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = \frac{١}{٤}} = ١ - ٢ هـ^{\frac{١}{٤}}$

② $ص = س^{٢} - ٣ لو_{هـ} س$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٢س - ٣ × \frac{١}{س}$

∴ ميل المماس $= \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = ٢}$

$= ٤ - ٣ × \frac{١}{٢} = \frac{٥}{٢}$

③ $ص = \frac{١}{٤} هـ^{٢س} - ٢ لو_{هـ} س$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢} هـ^{٢س} - ٢ × \frac{١}{س}$

∴ ميل المماس $= \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = \frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢} هـ - ٤$

④ $ص = س هـ^{-س}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = هـ^{-س} + س(-هـ^{-س})$

$= هـ^{-س}(١ - س)$

∴ ميل المماس $= \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(١ ، \frac{١}{هـ})} =$ صفر

⑤ $ص = (٢س + ٣) هـ^{٢س}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٢ هـ^{٢س} + ٢ (٢س + ٣) هـ^{٢س}$

$= ٢ هـ^{٢س} (١ + ٢س + ٣)$

$= ٤ (س + ٢) هـ^{٢س}$

∴ ميل المماس $= \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(٠ ، ٣)} = ٨$

⑥ $ص = لو_{٢} ٥س$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٥س} × ٥ لو_{٢} هـ = \frac{لو_{٢} هـ}{س}$

∴ ميل المماس $= \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = ٢} = \frac{لو_{٢} هـ}{٢}$

$= \frac{١}{٢} لو_{٢} هـ$

⑦ $ص = ٤ لو (٣س + ١)$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٤ × \frac{١}{٣س + ١} × ٣ لو هـ$

$= \frac{١٢}{٣س + ١} لو هـ$

∴ ميل المماس $= \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = ١}$

$= \frac{١٢}{٣ × ١ + ١} لو هـ = ٣ لو هـ$

⑧ $ص = لو_{٢} (٢س^{٢} - ٣)^{٤}$

$= ٤ لو_{٢} (٢س^{٢} - ٣)$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٤ × \frac{١}{٢س^{٢} - ٣} × ٤س لو_{٢} هـ$

$= \frac{١٦س}{٢س^{٢} - ٣} لو_{٢} هـ$

∴ ميل المماس $= \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = ١} = -١٦ لو_{٢} هـ$

⑨ $ص = ٣ (لو س)^{٢}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٦ لو س × \frac{١}{س} لو هـ$

$= \frac{٦}{س} لو س لو هـ$

∴ ميل المماس $= \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = ٢} = ٢ لو ٣ لو هـ$

١٠

① $ص = س^{٣} لو_{هـ} س$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٣س^{٢} لو_{هـ} س + س^{٣} × \frac{١}{س}$ حيث $س \neq ٠$

$= س^{٢} (٣ لو_{هـ} س + ١)$

إذا كان المماس يوازى محور السينات

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٠$

∴ $س^{٢} (٣ لو_{هـ} س + ١) = ٠$

فإن $س^{٢} = ٠$ ، منها $س = ٠$ (مرفوض)

أو $٣ لو_{هـ} س + ١ = ٠$ ، منها $لو_{هـ} س = \frac{-١}{٣}$

∴ $س = هـ^{-\frac{١}{٣}}$ ∴ قيم س هى $هـ^{\frac{-١}{٣}}$

② $ص = \frac{١}{س^{٢}} لو_{هـ} س^{٢}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = -٢ س^{-٣} لو_{هـ} س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}} × \frac{٢س}{س^{٢}}$

$= \frac{-٢ لو_{هـ} س^{٢} + ٢}{س^{٣}}$

، ∵ المماس يوازى محور السينات

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٠$ ∴ $-٢ لو_{هـ} س^{٢} + ٢ = ٠$

∴ $لو_{هـ} س^{٢} = ١$ ∴ $س^{٢} = هـ$

∴ $س = \sqrt{هـ}$ (والسالب مرفوض)

③ $ص = س^{٣} - ٨١ لو_{هـ} س$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٣س^{٢} - \frac{٨١}{س} = \frac{٣ (س^{٣} - ٢٧)}{س}$

، ∵ المماس يوازى محور السينات

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٠$ ∴ $س^{٣} - ٢٧ = ٠$

∴ $س^{٣} = ٢٧$ ∴ $س = ٣$

④ $ص = ٢ - \frac{س^٢}{٤} + لو_هـ \frac{س}{٢}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = -\frac{١}{٢} س + \frac{٢}{س} \times \frac{١}{٢}$

$= -\frac{١}{٢} س + \frac{١}{س} = \frac{-س^٢ + ٢}{٢ س}$

∵ المماس يوازى محور السينات

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٠$

∴ $-س^٢ + ٢ = ٠$

∴ $س = \sqrt{٢}$ (والسالب مرفوض)

١١

$ص = س هـ^{٢س}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = هـ^{٢س} + ٢ س هـ^{٢س}$

$= هـ^{٢س} (١ + ٢ س)$

∴ ميل المماس $= \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢} هـ)}$

$= هـ \left(١ + ٢ \times \frac{١}{٢}\right) = ٢ هـ$

∴ معادلة المماس : $\frac{ص - \frac{١}{٢} هـ}{س - \frac{١}{٢}} = ٢ هـ$

منها $٤ هـ س - ٢ ص - هـ = ٠$

١٢

$ص = هـ^{٢س} جتا س$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٢ هـ^{٢س} جتا س + هـ^{٢س} \times - جا س$

$= هـ^{٢س} (٢ جتا س - جا س)$

∴ ميل المماس $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = ٠} = ٢$

، عند س = ٠ فإن ص = ١

∴ النقطة هى (٠ ، ١)

∴ معادلة المماس $= \frac{ص - ١}{س - ٠} = ٢$

∴ $٢ س - ص + ١ = ٠$

١٣

$ص = ٢^{س} + ٢^{-س}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٢^{س} لو_هـ ٢ - ٢^{-س} لو_هـ ٢$

∴ ميل المماس $= \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(٢ ، ٤\frac{١}{٤})} = \frac{١٥}{٤} لو_هـ ٢$

∴ معادلة المماس هى $\frac{ص - ٤\frac{١}{٤}}{س - ٢} = \frac{١٥}{٤} لو_هـ ٢$

أى أن : $١٥ س لو_هـ ٢ - ٤ ص - ٣٠ لو_هـ ٢ + ١٧ = ٠$

١٤

$ص = \frac{هـ^{\frac{س}{٣}}}{س} = س^{-١} هـ^{\frac{س}{٣}}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-هـ^{\frac{س}{٣}}}{س^٢} + \frac{\frac{١}{٣} هـ^{\frac{س}{٣}}}{س}$

∴ ميل المماس $= \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(٣ ، \frac{١}{٣} هـ)} = \frac{-هـ}{٩} + \frac{هـ}{٩} = ٠$

معادلة المماس : $ص = \frac{هـ}{٣}$

١٥

$ص = ٣ هـ^{س}$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٣ هـ^{س}$

∴ ميل المماس $= \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = -١} = ٣ هـ^{-١} = \frac{٣}{هـ}$

∴ ميل العمودى $= \frac{-هـ}{٣}$

، عند س = -١ فإن $ص = \frac{٣}{هـ}$

∴ النقطة هى $\left(-١ ، \frac{٣}{هـ}\right)$

∴ معادلة العمودى هى : $\frac{ص - \frac{٣}{هـ}}{س + ١} = \frac{-هـ}{٣}$

ومنها $هـ^٢ س + ٣ هـ ص + (هـ^٢ - ٩) = ٠$

١٦

$ص = س^٣ - ١٨ لو_هـ س$

، عند س = ٢ فإن ص = ٨ - ١٨ لو$_هـ$ ٢

، $\frac{ءص}{ءس} = ٣ س^٢ - \frac{١٨}{س} = \frac{٣ س^٣ - ١٨}{س}$

∴ ميل المماس $= \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = ٢} = ٣$

∴ معادلة المماس هى : $\frac{ص - ٨ + ١٨ لو_هـ ٢}{س - ٢} = \frac{٣}{١}$

∴ $٣ س - ص - ١٨ لو_هـ ٢ + ٢ = ٠$

∴ معادلة العمودى هى $\frac{ص - ٨ + ١٨ لو_هـ ٢}{س - ٢} = \frac{-١}{٣}$

$س + ٣ ص + ٥٤ لو_هـ ٢ - ٢٦ = ٠$

١٧

$ص = لو_هـ (٢ - \sqrt{٢} جتا س)$

، عند $س = \frac{\pi}{٤}$ فإن ص = ٠

، $\frac{ءص}{ءس} = \frac{\sqrt{٢} جا س}{٢ - \sqrt{٢} جتا س}$

∴ ميل المماس $= \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = \frac{\pi}{٤}} = ١$

∴ معادلة المماس هى : $\frac{ص - ٠}{س - \frac{\pi}{٤}} = ١$

منها $س - ص - \frac{\pi}{٤} = ٠$

١٨

$\frac{ءس}{ءن} = هـ^{ن}$ ، $\frac{ءص}{ءن} = هـ^{ن} + ٢ هـ^{٢ن}$

عند س = ١ تكون ن = ٠ ، ص = ٢

$\frac{ءص}{ءس} = (هـ^{ن} + ٢ هـ^{٢ن}) \div هـ^{ن}$

$= ١ + ٢ هـ^{ن}$

$\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = ١} = ١ + ٢ هـ^{٠} = ٣$

ميل المماس = ٣

∴ ميل العمودى $= \frac{-١}{٣}$

∴ معادلة العمودى هى : $\frac{ص - ٢}{س - ١} = \frac{-١}{٣}$

∴ س + ٣ ص - ٧ = ٠

حل آخر :

$س = هـ^{ن}$

∴ $ص = س + س^٢$

عند س = ١ ∴ ص = ٢

، $\frac{ءص}{ءس} = ١ + ٢ س$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = ١} = ١ + ٢ = ٣$

ميل العمودى $= \frac{-١}{٣}$ عند النقطة (١ ، ٢)

∴ معادلة العمودى هى $\frac{ص - ٢}{س - ١} = \frac{-١}{٣}$

∴ س + ٣ ص - ٧ = ٠

١٩

① (ب)	② (د)	③ (جـ)	④ (ب)
⑤ (جـ)	⑥ (أ)	⑦ (د)	⑧ (ب)
⑨ (أ)	⑩ (د)	⑪ (ب)	⑫ (د)
⑬ (أ)	⑭ (د)	⑮ (أ)	⑯ (د)

٢٠

بفرض $ص = \sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{س^{ن}}{ن!}$

$= ١ + \frac{س}{١} + \frac{س^٢}{٢!} + \frac{س^٣}{٣!} + \dots$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٠ + ١ + \frac{س}{١!} + \frac{س^٢}{٢!} + \frac{س^٣}{٣!} + \dots$

$= ص$

∴ $\frac{ء}{ءس} (هـ^{س}) = هـ^{س}$

٢١

$ص = س^٢ لو_هـ \frac{س}{أ}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٢ س لو_هـ \frac{س}{أ} + س^٢ \times \frac{أ}{س} \times \frac{١}{أ}$

$= ٢ س لو_هـ \frac{س}{أ} + س$

، $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٢ لو_هـ \frac{س}{أ} + ٢ س \times \frac{١}{س} + ١$

$= ٢ لو_هـ \frac{س}{أ} + ٣$

$$\text{،}\ \frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = 2 \times \frac{1}{\text{س}} + 0 = \frac{2}{\text{س}}$$

$$\therefore \left(\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}\right)_{\text{س}=4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

٢٢

$$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(1 + \text{هـ}^{\text{س}}\right)$$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{1 + \text{هـ}^{\text{س}}}$$

$$\text{،}\ \because \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}(1+\text{هـ}^{\text{س}})} \times \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{1 + \text{هـ}^{\text{س}}} = 6$$

$$\therefore \left(1 + \text{هـ}^{\text{س}}\right) \times \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{1 + \text{هـ}^{\text{س}}} = 6$$

$$\therefore \text{هـ}^{\text{س}} = 6 \qquad \therefore \text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}} 6$$

٢٣

$\text{س} = \text{ص}^2 \times \text{هـ}^{\sqrt{\text{ص}}}$ بالاشتقاق بالنسبة إلى ص

$$\therefore \frac{\text{ءس}}{\text{ءص}} = 2\,\text{ص}\,\text{هـ}^{\sqrt{\text{ص}}} + \text{ص}^2\,\text{هـ}^{\sqrt{\text{ص}}} \times \frac{1}{2\sqrt{\text{ص}}}$$

$$= 2\,\text{ص}\,\text{هـ}^{\sqrt{\text{ص}}} + \frac{1}{2}\,\text{ص}\sqrt{\text{ص}}\,\text{هـ}^{\sqrt{\text{ص}}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{ص}\,\text{هـ}^{\sqrt{\text{ص}}}\left(4 + \sqrt{\text{ص}}\right)$$

٢٤

$\text{س} = \text{ص}^2\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$$\therefore 1 = \left(2\,\text{ص}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} + \text{ص}^2 \times \frac{1}{\text{ص}}\right)\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{2\,\text{ص}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} + \text{ص}}$$

٢٥

$$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{قتا س} - \text{ظتا س}\right)$$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-\text{قتا س ظتا س} + \text{قتا}^2\text{س}}{\text{قتا س} - \text{ظتا س}}$$

$$= \frac{\text{قتا س}\left(-\text{ظتا س} + \text{قتا س}\right)}{\text{قتا س} - \text{ظتا س}} = \text{قتا س}$$

٢٦

$$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{ظا}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\text{س}}{2}\right)\right)$$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{قا}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\text{س}}{2}\right)}{\text{ظا}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\text{س}}{2}\right)} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\ \text{ظتا}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\text{س}}{2}\right)\text{قا}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\text{س}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\text{جتا}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\text{س}}{2}\right)}{\text{جا}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\text{س}}{2}\right)} \times \frac{1}{\text{جتا}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\text{س}}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2\,\text{جا}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\text{س}}{2}\right)\text{جتا}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\text{س}}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{\text{جا}\,2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\text{س}}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{\text{جا}\left(\frac{\pi}{2} + \text{س}\right)} = \frac{1}{\text{جتا س}} = \text{قا س}$$

٢٧

$$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظا س}$$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{قا}^2\text{س}}{\text{ظا س}} = \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}} \times \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$$

$$= \frac{1}{\text{جا س جتا س}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\text{جا}\,2\,\text{س}}$$

$$= 2\ \text{قتا}\ 2\,\text{س}$$

٢٨

$$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\sqrt{\text{قا س}}\right)$$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\sqrt{\text{قا س}}} \times \frac{\text{قا س ظا س}}{2\sqrt{\text{قا س}}} = \frac{1}{2}\ \text{ظا س}$$

٢٩

$$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{س} + \sqrt{\text{س}^2 + \text{أ}^2}\right)$$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1 + \frac{2\,\text{س}}{2\sqrt{\text{س}^2 + \text{أ}^2}}}{\text{س} + \sqrt{\text{س}^2 + \text{أ}^2}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{\text{س}^2 + \text{أ}^2} + \text{س}\right)}{\left(\text{س} + \sqrt{\text{س}^2 + \text{أ}^2}\right)\sqrt{\text{س}^2 + \text{أ}^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\text{س}^2 + \text{أ}^2}}$$

٣٠

$$\text{ص} = \text{هـ}^{2\text{س}}\ \text{جا}\ 2\,\text{س}$$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2\,\text{هـ}^{2\text{س}}\ \text{جتا}\ 2\,\text{س} + 2\,\text{هـ}^{2\text{س}}\ \text{جا}\ 2\,\text{س}$$

$$\therefore \frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = 4\,\text{هـ}^{2\text{س}}\ \text{جتا}\ 2\,\text{س} - 4\,\text{هـ}^{2\text{س}}\ \text{جا}\ 2\,\text{س}$$

$$+ 4\,\text{هـ}^{2\text{س}}\ \text{جا}\ 2\,\text{س} + 4\,\text{هـ}^{2\text{س}}\ \text{جتا}\ 2\,\text{س}$$

$$= 8\,\text{هـ}^{2\text{س}}\ \text{جتا}\ 2\,\text{س}$$

$$\text{،}\ \because \text{هـ}^{2\text{س}} = \frac{\text{ص}}{\text{جا}\ 2\,\text{س}}$$

$$\therefore \frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = 8 \times \frac{\text{ص}}{\text{جا}\ 2\,\text{س}} \times \text{جتا}\ 2\,\text{س}$$

$$= 8\,\text{ص}\ \text{ظتا}\ 2\,\text{س}$$

٣١

$$\text{ص} = \text{هـ}^{3\text{س}} + \text{س}^2$$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 3\,\text{هـ}^{3\text{س}} + 2\,\text{س}$$

$$\text{،}\ \frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = 9\,\text{هـ}^{3\text{س}} + 2$$

$$\text{،}\ \because \text{هـ}^{3\text{س}} = \text{ص} - \text{س}^2$$

$$\therefore \frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = 9\left(\text{ص} - \text{س}^2\right) + 2$$

$$\therefore \frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} - 2 = 9\left(\text{ص} - \text{س}^2\right)$$

٣٢

$$\text{ص} = \text{أ}\,\text{هـ}^{\text{س}^2 + 1}$$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2\,\text{أ}\,\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}^2 + 1}$$

$$\therefore \frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = 2\,\text{أ}\,\text{هـ}^{\text{س}^2 + 1} + 4\,\text{أ}\,\text{س}^2\,\text{هـ}^{\text{س}^2 + 1}$$

$$= 2\,\text{أ}\,\text{هـ}^{\text{س}^2 + 1}\left(1 + 2\,\text{س}^2\right)$$

$$\therefore \frac{\text{ء}^3\text{ص}}{\text{ءس}^3} = 4\,\text{أ}\,\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}^2 + 1}\left(1 + 2\,\text{س}^2\right)$$

$$+ 8\,\text{أ}\,\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}^2 + 1}$$

$$= 4\,\text{أ}\,\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}^2 + 1}\left(1 + 2\,\text{س}^2 + 2\right)$$

$$= 4\,\text{س}\,\text{ص}\left(3 + 2\,\text{س}^2\right)$$

٣٣

$$\text{ص} = \text{أ}\,\text{هـ}^{\frac{\text{ب}}{\text{س}}}$$

$$\therefore \text{ص}' = \text{أ}\,\text{هـ}^{\frac{\text{ب}}{\text{س}}} \times \frac{-\text{ب}}{\text{س}^2} = \frac{-\text{أ}\text{ب}}{\text{س}^2}\,\text{هـ}^{\frac{\text{ب}}{\text{س}}}$$

$$\therefore \text{ص}'' = \frac{2\,\text{أ}\text{ب}}{\text{س}^3}\,\text{هـ}^{\frac{\text{ب}}{\text{س}}} + \frac{-\text{أ}\text{ب}}{\text{س}^2} \times \text{هـ}^{\frac{\text{ب}}{\text{س}}} \times \frac{-\text{ب}}{\text{س}^2}$$

$$= \frac{2\,\text{أ}\text{ب}}{\text{س}^3}\,\text{هـ}^{\frac{\text{ب}}{\text{س}}} + \frac{\text{أ}\text{ب}^2}{\text{س}^4}\,\text{هـ}^{\frac{\text{ب}}{\text{س}}}$$

الطرف الأيمن

$$= \text{س}\left(\text{أ}\,\text{هـ}^{\frac{\text{ب}}{\text{س}}}\right) \times \left(\frac{2\,\text{أ}\text{ب}}{\text{س}^3}\,\text{هـ}^{\frac{\text{ب}}{\text{س}}} + \frac{\text{أ}\text{ب}^2}{\text{س}^4}\,\text{هـ}^{\frac{\text{ب}}{\text{س}}}\right)$$

$$+ 2 \times \text{أ}\,\text{هـ}^{\frac{\text{ب}}{\text{س}}} \times \frac{-\text{أ}\text{ب}}{\text{س}^2}\,\text{هـ}^{\frac{\text{ب}}{\text{س}}} - \text{س}\left(\frac{-\text{أ}\text{ب}}{\text{س}^2} \times \text{هـ}^{\frac{\text{ب}}{\text{س}}}\right)^2$$

$$= \frac{2\,\text{أ}^2\text{ب}}{\text{س}^2}\,\text{هـ}^{\frac{2\text{ب}}{\text{س}}} + \frac{\text{أ}^2\text{ب}^2\,\text{هـ}^{\frac{2\text{ب}}{\text{س}}}}{\text{س}^3} - \frac{2\,\text{أ}^2\text{ب}\,\text{هـ}^{\frac{2\text{ب}}{\text{س}}}}{\text{س}^2}$$

$$- \frac{\text{أ}^2\text{ب}^2\,\text{هـ}^{\frac{2\text{ب}}{\text{س}}}}{\text{س}^3} = \text{صفر} = \text{الطرف الأيسر}$$

حل آخر :

$$\because \text{ص}' = \text{أ}\,\text{هـ}^{\frac{\text{ب}}{\text{س}}} \times \frac{-\text{ب}}{\text{س}^2} = \frac{-\text{ب}\,\text{ص}}{\text{س}^2}$$

$\therefore \text{س}^2\,\text{ص}' = -\text{ب}\,\text{ص}$ «وبالاشتقاق بالنسبة لـ س»

$$\therefore \text{س}^2\,\text{ص}'' + 2\,\text{س}\,\text{ص}' = -\text{ب}\,\text{ص}'$$

وبالتعويض عن «$-\text{ب} = \frac{\text{س}^2\,\text{ص}'}{\text{ص}}$»

$$\therefore \text{س}^2\,\text{ص}'' + 2\,\text{س}\,\text{ص}' = \frac{\text{س}^2\,\text{ص}'^2}{\text{ص}}$$

(بالضرب × $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$)

$$\therefore \text{س}\,\text{ص}\,\text{ص}'' + 2\,\text{ص}\,\text{ص}' = \text{س}\,\text{ص}'^2$$

$$\therefore \text{س}\,\text{ص}\,\text{ص}'' + 2\,\text{ص}\,\text{ص}' - \text{س}\,\text{ص}'^2 = 0$$

٣٤

$\text{ص} = \sqrt{\frac{\text{س}^2 + 1}{\text{س}^2 - 1}}$ بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس (هـ)

$$\therefore \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \frac{1}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^2 + 1\right) - \frac{1}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^2 - 1\right)$$

بالاشتقاق بالنسبة إلى س

$$\therefore \frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \frac{1}{2} \times \frac{2\,\text{س}}{\text{س}^2 + 1} - \frac{1}{2} \times \frac{2\,\text{س}}{\text{س}^2 - 1}$$

$\therefore \frac{ص'}{ص} = \frac{س}{س^{٢} + ١} - \frac{س}{س^{٢} - ١}$

$= \frac{س(س^{٢} - ١ - س^{٢} - ١)}{س^{٤} - ١}$

$\therefore \frac{ص'}{ص} = \frac{-٢س}{س^{٤} - ١}$

$\therefore (س^{٤} - ١)\,ص' + ٢س\,ص = ٠$

٣٥

$ص = هـ^{-س}\sqrt{\frac{١ + س}{١ - س}}$

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

$\therefore لو_{هـ} ص = لو_{هـ} هـ^{-س} + \frac{١}{٢} لو_{هـ} \frac{١ + س}{١ - س}$

بالاشتقاق بالنسبة إلى س

$\therefore \frac{١}{ص} \times ص' = -١ + \frac{١}{٢} \times \frac{١ - س}{١ + س}$

$\times \frac{(١ - س)(١) - (١ + س)(-١)}{(١ - س)^{٢}}$

$\therefore \frac{ص'}{ص} = -١ + \frac{١}{١ - س^{٢}}$ بالضرب × ص $(١ - س^{٢})$

$\therefore (١ - س^{٢})\,ص' = -ص + س^{٢}ص + ص$

$= س^{٢}ص$

٣٦

بفرض أن $ص = لو_{هـ}(٩ + س^{٣})$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٣س^{٢} \times \frac{١}{٩ + س^{٣}}$

بفرض أن $ع = س^{٢} + ٣$

$\therefore \frac{ءع}{ءس} = ٢س$

$\therefore \frac{ءص}{ءع} = \frac{ءص}{ءس} \div \frac{ءع}{ءس} = \frac{٣س^{٢}}{٩ + س^{٣}} \times \frac{١}{٢س}$

$= \frac{٣}{٢} \times \frac{س}{٩ + س^{٣}}$

$\therefore \left(\frac{ءص}{ءع}\right)_{س = ١} = \frac{٣}{٢}\left(\frac{١}{١٠}\right) = \frac{٣}{٢٠}$

٣٧

① $ص = هـ^{أس}$ $\qquad \therefore \frac{ءص}{ءس} = أ\,هـ^{أس}$

$\therefore \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = أ^{٢}هـ^{أس}$ $\qquad \therefore \frac{ء^{٣}ص}{ءس^{٣}} = أ^{٣}هـ^{أس}$

$\therefore \frac{ء^{٤}ص}{ءس^{٤}} = أ^{٤}هـ^{أس} = أ^{٤}ص$

$\therefore \frac{ء^{٤}ص}{ءس^{٤}} - أ^{٤}ص = ٠$

② $\because \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} - ٢\frac{ءص}{ءس} + ص = ٠$

$\therefore أ^{٢}هـ^{أس} - ٢أ\,هـ^{أس} + هـ^{أس} = ٠$

$\therefore هـ^{أس}(أ^{٢} - ٢أ + ١) = ٠$

$\therefore هـ^{أس}(أ - ١)^{٢} = ٠$

$\therefore (أ - ١)^{٢} = ٠$ $\qquad \therefore أ = ١$

٣٨

$س\,هـ^{ص} = ٢ - لو_{هـ} ٢ + لو_{هـ} س$

بالاشتقاق بالنسبة إلى ن

$\therefore س\,هـ^{ص}\frac{ءص}{ءن} + هـ^{ص}\frac{ءس}{ءن} = \frac{١}{س} \times \frac{ءس}{ءن}$

$\therefore \frac{ءس}{ءن} = ٦$ عند $س = ٢$ ، $ص = ٠$

$\therefore ٢ \times هـ^{٠} \times \frac{ءص}{ءن} + هـ^{٠} \times ٦ = \frac{١}{٢} \times ٦$

$\therefore ٢\frac{ءص}{ءن} = -٣$ $\qquad \therefore \frac{ءص}{ءن} = \frac{-٣}{٢}$

٣٩

① $ص = قا(هـ^{س})$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = قا(هـ^{س})\,طا(هـ^{س}) \times (هـ^{س})$

$= هـ^{س}\,قا(هـ^{س})\,طا(هـ^{س})$

② $ص\,هـ^{س} = هـ^{٢}$ $\qquad \therefore ص = هـ^{٢ - س}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = -هـ^{٢ - س}$

③ $س\,لو_{هـ} ص = ٥٨$ $\qquad \therefore لو_{هـ} ص = \frac{٥٨}{س}$

$\therefore ص = هـ^{\frac{٥٨}{س}}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = هـ^{\frac{٥٨}{س}} \times \frac{-٥٨}{س^{٢}} = \frac{-٥٨}{س^{٢}}\,هـ^{\frac{٥٨}{س}}$

④ $ص = لو_{هـ}|س^{٣} - ٧س^{٢} - ٢|$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٣س^{٢} - ١٤س}{س^{٣} - ٧س^{٢} - ٢}$

⑤ $ص = ٢^{قا^{٢}س}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٢^{قا^{٢}س} \times لو_{هـ} ٢ \times ٢\,قاس$

$\times\, قاس\,طاس$

$= ٢\,قا^{٢}س\,طاس \times ٢^{قا^{٢}س}\,لو_{هـ} ٢$

⑥ $ص = لو|طاس|$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{قا^{٢}س}{طاس}\,لو\,هـ = قاس\,قتاس\,لو\,هـ$

⑦ $ص = جا(لوس)$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = جتا(لوس) \times \frac{١}{س}\,لو\,هـ$

$= \frac{جتا(لوس) \times لو\,هـ}{س}$

⑧ $ص = لو(جتا\,٥س)$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-٥\,جا\,٥س}{جتا\,٥س} \times لو\,هـ = -٥\,طا\,٥س\,لو\,هـ$

⑨ $ص = هـ^{جاس} \times جا\,هـ^{س}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = هـ^{جاس} \times جتاس \times جا\,هـ^{س} + هـ^{جاس}$

$\times\, جتا\,هـ^{س} \times هـ^{س}$

$= هـ^{جاس}(جتاس \times جا\,هـ^{س} + جتا\,هـ^{س} \times هـ^{س})$

⑩ $ص = \frac{١}{هـ^{س}\,طاس} = هـ^{-س}\,ظتاس$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = -هـ^{-س}\,ظتاس + هـ^{-س} \times -قتا^{٢}س$

$= -هـ^{-س}(ظتاس + قتا^{٢}س)$

⑪ $ص = \sqrt{\frac{١ + هـ^{س}}{١ - هـ^{س}}}$ بأخذ لوغاريتم الطرفين

$\therefore لوص = \frac{١}{٢}لو(١ + هـ^{س}) - \frac{١}{٢}لو(١ - هـ^{س})$

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

$\therefore \frac{ص'}{ص} = \frac{١}{٢}\,\frac{هـ^{س}}{١ + هـ^{س}} - \frac{١}{٢}\,\frac{-هـ^{س}}{١ - هـ^{س}}$

$= \frac{١}{٢}\,\frac{هـ^{س}(١ - هـ^{س} + ١ + هـ^{س})}{١ - هـ^{٢س}}$

$= \frac{هـ^{س}}{١ - هـ^{٢س}}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{هـ^{س}}{١ - هـ^{٢س}} \times \sqrt{\frac{١ + هـ^{س}}{١ - هـ^{س}}}$

⑫ $ص = لو_{هـ} لو_{هـ} س$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{لو_{هـ} س} \times \frac{١}{س} = \frac{١}{س\,لو_{هـ} س}$

⑬ $ص = لو_{هـ} لو_{هـ} لو_{هـ} س$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{لو_{هـ} لو_{هـ} س} \times \frac{١}{لو_{هـ} س} \times \frac{١}{س}$

$= \frac{١}{س\,لو_{هـ} لو_{هـ} س \times لو_{هـ} س}$

⑭ $ص = لو_{هـ}(١ + هـ^{٢س})$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٢\,هـ^{٢س}}{١ + هـ^{٢س}}$

⑮ $ص = لو_{هـ}(هـ^{مس} + هـ^{-مس})$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{م\,هـ^{مس} - م\,هـ^{-مس}}{(هـ^{مس} + هـ^{-مس})}$

⑯ $ص = لو\sqrt{س}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{لو\,هـ}{\sqrt{س}} \times \frac{١}{٢\sqrt{س}} = \frac{لو\,هـ}{٢س}$

⑰ $ص = \sqrt{لوس}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢\sqrt{لوس}} \times \frac{١}{س}\,لو\,هـ = \frac{لو\,هـ}{٢س\sqrt{لوس}}$

⑱ $ص = (س + لو_{هـ}(٢س))^{٣}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٣(س + لو_{هـ} ٢س)^{٢} \times \left(١ + \frac{٢}{٢س}\right)$

$= ٣\left(١ + \frac{١}{س}\right)(س + لو_{هـ} ٢س)^{٢}$

(١٩) ص = لوهـ (جا (هـ$^{\text{س}}$ + ٥ س + ٨))

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{جتا (هـ}^{\text{س}}\text{ + ٥ س + ٨)}}{\text{جا (هـ}^{\text{س}}\text{ + ٥ س + ٨)}}$ × (هـ$^{\text{س}}$ + ٥)

= (هـ$^{\text{س}}$ + ٥) ظتا (هـ$^{\text{س}}$ + ٥ س + ٨)

(٢٠) ص = لو $\sqrt{\frac{\text{س - ١}}{\text{س + ١}}}$

= $\frac{١}{٢}$ لو (س - ١) - $\frac{١}{٢}$ لو (س + ١)

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\left[\frac{١}{\text{٢ (س - ١)}} - \frac{١}{\text{٢ (س + ١)}}\right]$ × $\frac{١}{\text{لوهـ ١٠}}$ = $\left[\frac{١}{\text{س}^{٢}\text{ - ١}}\right]$ × $\frac{١}{\text{لوهـ ١٠}}$

(٢١) ص = $\frac{\text{هـ}^{\text{س}}\text{ لوهـ س}}{\text{س}^{٢}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{س}^{٢}\text{(هـ}^{\text{س}}\text{ لوهـ س + هـ}^{\text{س}}\text{ × }\frac{١}{\text{س}}\text{) - ٢ س هـ}^{\text{س}}\text{ لوهـ س}}{\text{س}^{٤}}$

= $\frac{\text{هـ}^{\text{س}}\text{ (س}^{٢}\text{ لوهـ س + س - ٢ س لوهـ س)}}{\text{س}^{٤}}$

= $\frac{\text{هـ}^{\text{س}}\text{ (س لوهـ س + ١ - ٢ لوهـ س)}}{\text{س}^{٣}}$

(٢٢) ص = لو (جتا س^{٢})

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{- جا س}^{٢}\text{ × ٢ س}}{\text{جتا س}^{٢}}$ لو هـ

= - ٢ س ظا س^{٢} لو هـ

(٢٣) ص = جتا (لو س)^{٢}

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = - جا (لو س)^{٢} × ٢ لو س × $\frac{١}{\text{س لوهـ ١٠}}$

= $\frac{\text{-٢ لو س جا (لو س)}^{٢}}{\text{س لوهـ ١٠}}$

(٢٤) ص^{٢} = هـ$^{\text{٥ س}^{٢}\text{ - ٢}}$

∴ ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ١٠ س هـ$^{\text{٥ س}^{٢}\text{ - ٢}}$

= ١٠ س ص^{٢}

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٥ س ص

(٢٥) ص^{٢} = ٣$^{\text{س}}$ × ٢$^{\text{ص}}$

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ ٢ لوهـ ص = س لوهـ ٣ + ص لوهـ ٢

بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ $\frac{\text{٢ صَ}}{\text{ص}}$ = لوهـ ٣ + لوهـ ٢ صَ

∴ صَ $\left(\frac{٢}{\text{ص}}\text{ - لوهـ ٢}\right)$ = لوهـ ٣

∴ صَ = $\frac{\text{لوهـ ٣}}{\frac{٢}{\text{ص}}\text{ - لوهـ ٢}}$

(٢٦) ص = ٢$^{\text{جتا س + لوهـ س}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢$^{\text{(جتا س + لوهـ س)}}$ × لوهـ ٢

× $\left(\text{- جا س + }\frac{١}{\text{س}}\right)$

(٢٧) ص = ٤$^{\text{٣ جا س - هـ}^{\text{س}}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٤$^{\text{٣ جا س - هـ}^{\text{س}}}$ × لوهـ ٤

× (٣ جتا س - هـ$^{\text{س}}$)

(٢٨) ص = $\pi^{\text{جا س}}$ + هـ$^{\pi}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\pi^{\text{جا س}}$ × لوهـ π × جتا س

= لوهـ π جتا س $\pi^{\text{جا س}}$

(٢٩) ص = هـ$^{\text{٣ س + ٢ لوهـ س}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = هـ$^{\text{٣ س + ٢ لوهـ س}}$ × $\left(\text{٣ + }\frac{٢}{\text{س}}\right)$

(٣٠) ص = لوهـ (قا س + ظا س)

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{قا س ظا س + قا}^{٢}\text{ س}}{\text{قا س + ظا س}}$

= $\frac{\text{قا س (ظا س + قا س)}}{\text{(قا س + ظا س)}}$ = قا س

(٣١) ص = لوهـ $\left(\frac{\text{لوهـ س}}{\text{س}}\right)$ = لوهـ لوهـ س - لوهـ س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{١}{\text{لوهـ س}}$ × $\frac{١}{\text{س}}$ - $\frac{١}{\text{س}}$

= $\frac{١}{\text{س}}$ $\left(\frac{١}{\text{لوهـ س}}\text{ - ١}\right)$

٤٠

(١) ص = س$^{\text{٢ س}}$ بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ لوهـ ص = ٢ س لوهـ س بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ $\frac{\text{صَ}}{\text{ص}}$ = ٢ لوهـ س + ٢ س × $\frac{١}{\text{س}}$ = ٢ لوهـ س + ٢

∴ صَ = ٢ ص (لوهـ س + ١)

= ٢ س$^{\text{٢ س}}$ (لوهـ س + ١)

(٢) ص = (س^{٣} + ٥)$^{\text{س}}$

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ لوهـ ص = س لوهـ (س^{٣} + ٥)

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ $\frac{\text{صَ}}{\text{ص}}$ = لوهـ (س^{٣} + ٥) + س × $\frac{\text{٣ س}^{٢}}{\text{س}^{٣}\text{ + ٥}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ص (لوهـ (س^{٣} + ٥) + $\frac{\text{٣ س}^{٣}}{\text{س}^{٣}\text{ + ٥}}$)

= (س^{٣} + ٥)$^{\text{س}}$ (لوهـ (س^{٣} + ٥) + $\frac{\text{٣ س}^{٣}}{\text{س}^{٣}\text{ + ٥}}$)

(٣) ص = ٣ س$^{\text{س}^{٢}\text{ + ٢}}$

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ لوهـ ص = لوهـ ٣ + (س^{٢} + ٢) لوهـ س

بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ $\frac{\text{صَ}}{\text{ص}}$ = ٢ س لوهـ س + (س^{٢} + ٢) × $\frac{١}{\text{س}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ص (٢ س لوهـ س + $\frac{\text{س}^{٢}\text{ + ٢}}{\text{س}}$)

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣ س$^{\text{س}^{٢}\text{ + ٢}}$ (٢ س لوهـ س + $\frac{\text{س}^{٢}\text{ + ٢}}{\text{س}}$)

(٤) ص = س$^{\frac{١}{\text{س}}}$ بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ لوهـ ص = $\frac{١}{\text{س}}$ لوهـ س

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ $\frac{\text{صَ}}{\text{ص}}$ = $\frac{١}{\text{س}}$ × $\frac{١}{\text{س}}$ + $\frac{-١}{\text{س}^{٢}}$ لوهـ س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\left(\frac{\text{١ - لوهـ س}}{\text{س}^{٢}}\right)$ ص

= س$^{\frac{١}{\text{س}}}$ $\left(\frac{\text{١ - لوهـ س}}{\text{س}^{٢}}\right)$

(٥) ص = س$^{\text{جا س}}$ بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ لوهـ ص = جا س لوهـ س

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ $\frac{\text{صَ}}{\text{ص}}$ = جتا س لوهـ س + جا س × $\frac{١}{\text{س}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = (جتا س لوهـ س + $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$) ص

= س$^{\text{جا س}}$ (جتا س لوهـ س + $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$)

(٦) ص = (جا س)$^{\text{س}}$ بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ لوهـ ص = س لوهـ جا س

بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ $\frac{\text{صَ}}{\text{ص}}$ = لوهـ جا س + س × $\frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ص (لوهـ جا س + س ظتا س)

(٧) ص = (١ - ٣ س)$^{\text{جتا س}}$

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ لوهـ ص = جتا س لوهـ (١ - ٣ س)

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ $\frac{\text{صَ}}{\text{ص}}$ = - جا س لوهـ (١ - ٣ س) + جتا س

× $\frac{-٣}{\text{١ - ٣ س}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = (١ - ٣ س)$^{\text{جتا س}}$

(- جا س لوهـ (١ - ٣ س) - $\frac{\text{٣ جتا ٣ س}}{\text{١ - ٣ س}}$)

(٨) ص = (جا س)$^{\text{ظا س}}$

(بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ)

∴ لوهـ ص = ظا س لوهـ جا س

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ $\frac{\text{صَ}}{\text{ص}}$ = قا^{٢} س لوهـ جا س + ظا س × $\frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$

= قا^{٢} س لوهـ جا س + ١

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = (جا س)$^{\text{ظا س}}$ (قا^{٢} س لوهـ جا س + ١)

⑨ $\text{ص} = \text{س}^{\text{هـ}^{\text{س}}}$ بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ $\frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} + \text{هـ}^{\text{س}} \times \frac{1}{\text{س}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \left(\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} + \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}}\right) \times \text{س}^{\text{هـ}^{\text{س}}}$

⑩ $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}^{\text{هـ}}}$ بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \text{س}^{\text{هـ}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ} = \text{س}^{\text{هـ}}$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ $\frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \text{هـ}\,\text{س}^{\text{هـ}-1}$

∴ $\text{ص}' = \text{هـ}\,\text{س}^{\text{هـ}-1} \times \text{هـ}^{\text{س}^{\text{هـ}}}$

⑪ $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{هـ}^{\text{س}}}$ بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ} = \text{هـ}^{\text{س}}$

بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ $\frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \text{هـ}^{\text{س}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{\text{س}} \times \text{هـ}^{\text{هـ}^{\text{س}}} = \text{هـ}^{\text{هـ}^{\text{س}} + \text{س}}$

⑫ $\text{ص} = (\text{لو س})^{\text{لو س}}$

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \text{لو س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{لو س}$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ $\frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \frac{1}{\text{س}}\,\text{لو هـ}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{لو س} + \text{لو س} \times \frac{1}{\text{لو س}} \times \frac{1}{\text{س}}\,\text{لو هـ}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ص لو هـ}}{\text{س}}\left[\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{لو س} + 1\right]$

⑬ $\text{ص} = (\text{لو س})^{\text{ظا س}}$

∴ $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \text{ظا س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{لو س}$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ $\frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \text{قا}^2\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{لو س} + \text{ظا س}\,\frac{1}{\text{لو س}} \times \frac{1}{\text{س}}\,\text{لو هـ}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (\text{لو س})^{\text{ظا س}}\left(\text{قا}^2\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{لو س} + \frac{\text{ظا س لو هـ}}{\text{س لو س}}\right)$

⑭ $\text{ص} = (\text{س}^2 + 3)^{\text{لو س}}$ بأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \text{لو س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,(\text{س}^2 + 3)$

∴ $\frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \frac{1}{\text{س}}\,\text{لو هـ}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,(\text{س}^2 + 3) + \text{لو س} \times \frac{2\text{س}}{\text{س}^2 + 3}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ص}\left(\frac{1}{\text{س}}\,\text{لو هـ}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,(\text{س}^2 + 3) + \frac{2\text{س لو س}}{\text{س}^2 + 3}\right)$

⑮ $\text{ص} = (\text{لو س})^{\text{س}}$

∴ $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{لو س}$

∴ $\frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{لو س} + \text{س} \times \frac{1}{\text{لو س}} \times \frac{1}{\text{س}}\,\text{لو هـ}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (\text{لو س})^{\text{س}}\left[\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{لو س} + \frac{\text{لو هـ}}{\text{لو س}}\right]$

⑯ $\text{ص} = \text{س}^{\text{س}^{\text{س}}}$

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \text{س}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$

بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ $\frac{1}{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص}} \times \frac{1}{\text{ص}} \times \text{ص}'$

$= \left(\text{س} \times \frac{1}{\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\right) + \left(\frac{1}{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}} \times \frac{1}{\text{س}}\right)$

∴ $\frac{1}{\text{ص}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص}} \times \text{ص}' = (1 + \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}) + \frac{1}{\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ص}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص}\left[(1 + \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}) + \frac{1}{\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}}\right]$

٤١

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{س}}$

∴ ميل المماس $= \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س}=1} = 1$

∴ عند $\text{س} = 1$ فإن $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\frac{1}{2} = -\text{لو}_{\text{هـ}}\,2$

∴ نقطة التماس هي $(1 ، -\text{لو}_{\text{هـ}}\,2)$

∴ معادلة المماس هي $\frac{\text{ص} + \text{لو}_{\text{هـ}}\,2}{\text{س} - 1} = 1$

∴ $\text{س} - \text{ص} = 1 + \text{لو}_{\text{هـ}}\,2 = \text{لو}_{\text{هـ}}\,2\text{هـ}$

بالقسمة على $\text{لو}_{\text{هـ}}\,2\text{هـ}$

∴ $\frac{\text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\,2\text{هـ}} + \frac{\text{ص}}{-\text{لو}_{\text{هـ}}\,2\text{هـ}} = 1$

∴ نقط تقاطع المماس مع المحاور هي :

أ $(\text{لو}_{\text{هـ}}\,2\text{هـ} ، 0)$ ، ب $(0 ، -\text{لو}_{\text{هـ}}\,2\text{هـ})$

∴ طول $\overline{\text{أب}} = \sqrt{(\text{لو}_{\text{هـ}}\,2\text{هـ})^2 + (-\text{لو}_{\text{هـ}}\,2\text{هـ})^2}$

$= \sqrt{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,2\text{هـ}$ وحدة طول.

٤٢

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,2\text{س}$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{س}}$

، ميل المماس $= \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(1 ، \text{لو}_{\text{هـ}}\,2)} = 1$

∴ ميل العمودي $= -1$

∴ معادلة العمودي هي $\frac{\text{ص} - \text{لو}_{\text{هـ}}\,2}{\text{س} - 1} = -1$

∴ $\text{س} + \text{ص} = 1 + \text{لو}_{\text{هـ}}\,2 = \text{لو}_{\text{هـ}}\,2\text{هـ}$

بالقسمة على $\text{لو}_{\text{هـ}}\,2\text{هـ}$

∴ $\frac{\text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\,2\text{هـ}} + \frac{\text{ص}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\,2\text{هـ}} = 1$

∴ المستقيم يقطع محور السينات في النقطة ب $(\text{لو}_{\text{هـ}}\,2\text{هـ} ، 0)$

∴ طول $\overline{\text{أب}} = \sqrt{(1 - \text{لو}_{\text{هـ}}\,2\text{هـ})^2 + (\text{لو}_{\text{هـ}}\,2 - 0)^2}$

$= \sqrt{(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ} - \text{لو}_{\text{هـ}}\,2\text{هـ})^2 + (\text{لو}_{\text{هـ}}\,2)^2}$

$= \sqrt{\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\frac{\text{هـ}}{2\text{هـ}}\right)^2 + (\text{لو}_{\text{هـ}}\,2)^2}$

$= \sqrt{\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\frac{1}{2}\right)^2 + (\text{لو}_{\text{هـ}}\,2)^2}$

$= \sqrt{(\text{لو}_{\text{هـ}}\,2)^2 + (\text{لو}_{\text{هـ}}\,2)^2}$

$= \sqrt{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,2 \simeq 0.98$ وحدة طولية.

٤٣

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{\text{س}}$

∴ ميل المماس $= \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(2 ، \text{هـ}^2)} = \text{هـ}^2$

معادلة المماس : $\frac{\text{ص} - \text{هـ}^2}{\text{س} - 2} = \text{هـ}^2$

∴ $\text{هـ}^2\text{س} - \text{ص} = 2\text{هـ}^2 - \text{هـ}^2 = \text{هـ}^2$ (بالقسمة على هـ^2)

∴ $\frac{\text{س}}{1} + \frac{\text{ص}}{-\text{هـ}^2} = 1$

∴ أ $(1 ، 0)$ ، ب $(0 ، -\text{هـ}^2)$

∴ $\text{أب} = \sqrt{(1 - 0)^2 + (0 + \text{هـ}^2)^2} = \sqrt{1 + \text{هـ}^4}$

$\simeq 7.46$ وحدة طول.

٤٤

$ص = ٤٠٠ (١ - هـ^{-٠,٠٣ ن})$

∴ $\frac{ءص}{ءن} = ٤٠٠ (- هـ^{-٠,٠٣ ن} \times -٠,٠٣) = ١٢٠ هـ^{-٠,٠٣ ن}$

∴ معدل التغير فى اليوم العاشر

$= \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{ن = ١٠} = ١٢٠ هـ^{-٠,٠٣ \times ١٠} = ١٢٠ هـ^{-٣}$

٤٥

$ص = (ن + ١٠٠) لو_{هـ} (ن + ٥)$

∴ $\frac{ءص}{ءن} = لو_{هـ} (ن + ٥) + (ن + ١٠٠) \times \frac{١}{ن + ٥}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءن}\right)_{ن = ٥} = لو_{هـ} ١٠ + \frac{١٠٥}{١٠} \simeq ١٢,٨$

، $\left(\frac{ءص}{ءن}\right)_{ن = ١٥} = لو_{هـ} ٢٠ + \frac{١١٥}{٢٠} \simeq ٨,٧$

، $\left(\frac{ءص}{ءن}\right)_{ن = ٢٠} = لو_{هـ} ٢٥ + \frac{١٢٠}{٢٥} \simeq ٨,٠٢$

∴ إنتاج العسل يتناقص.

٤٦

① (جـ) ② (جـ) ③ (أ) ④ (د)
⑤ (ب) ⑥ (أ) ⑦ (د) ⑧ (ب)
⑨ (ب) ⑩ (ب) ⑪ (جـ) ⑫ (جـ)
⑬ (د) ⑭ (ب) ⑮ (ب) ⑯ (أ)
⑰ (أ) ⑱ (جـ)

٤٧

$هـ^{س} ص = س هـ^{ص}$ بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ $لو_{هـ} هـ^{س} + لو_{هـ} ص = لو_{هـ} س + لو_{هـ} هـ^{ص}$

∴ $س + لو_{هـ} ص = لو_{هـ} س + ص$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ $١ + \frac{صَ}{ص} = \frac{١}{س} + صَ$

∴ $صَ \left(\frac{١}{ص} - ١\right) = \left(\frac{١}{س} - ١\right)$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{\frac{١}{س} - ١}{\frac{١}{ص} - ١} = \frac{ص - س ص}{س - س ص}$

٤٨

$هـ^{٢س} لو_{هـ} ص = س + ص - ٢$

∴ $٢ هـ^{٢س} لو_{هـ} ص + هـ^{٢س} \times \frac{صَ}{ص} = ١ + صَ$

، عند (١ ، ١)

∴ $٢ هـ^{٢} لو_{هـ} ١ + هـ^{٢} \times \frac{صَ}{١} = ١ + صَ$

∴ $صَ (هـ^{٢} - ١) = ١$

∴ $صَ = \frac{١}{هـ^{٢} - ١}$

٤٩

$س هـ^{س ص} = ص + جا^{٢} س$ (١)

عند س = ٠

∴ $٠ = ص + ٠$ ∴ $ص = ٠$

، باشتقاق (١) بالنسبة إلى س

∴ $هـ^{س ص} + س هـ^{س ص} (ص + س صَ)$

$= صَ + ٢ جا س جتا س$

، عند (٠ ، ٠)

∴ $١ + ٠ = صَ + ٠$ ∴ $صَ = ١$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = ٠} = ١$

٥٠

$هـ^{س ص} - س^{٢} + ص^{٣} = ٠$ (١)

، عند س = ٠

∴ $١ - ٠ + ص^{٣} = ٠$ ∴ $ص^{٣} = -١$

∴ $ص = -١$

باشتقاق (١) بالنسبة إلى س

∴ $هـ^{س ص} (ص + س صَ) - ٢ س + ٣ ص^{٢} صَ = ٠$

، عند (٠ ، -١)

∴ $١ (-١ + ٠) - ٠ + ٣ (-١)^{٢} صَ = ٠$

∴ $-١ + ٣ صَ = ٠$

∴ $صَ = \frac{١}{٣}$ ∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = ٠} = \frac{١}{٣}$

٥١

$س هـ^{-\frac{١}{٢} ص} + ص هـ^{\frac{-س}{٢}} = ٢$ (١)

، عند س = ٠

∴ $٠ + ص = ٢$ ∴ $ص = ٢$

باشتقاق (١) بالنسبة إلى س

∴ $هـ^{-\frac{١}{٢} ص} - \frac{١}{٢} س هـ^{-\frac{١}{٢} ص} صَ + صَ هـ^{\frac{-س}{٢}}$

$- \frac{١}{٢} ص هـ^{\frac{-س}{٢}} = ٠$

، عند (٠ ، ٢)

∴ $هـ^{-١} - ٠ + صَ - \frac{١}{٢} \times ٢ \times ١ = ٠$

∴ $صَ = ١ - \frac{١}{هـ} = \frac{هـ - ١}{هـ}$

٥٢

$س^{٢} ص = أب لو_{هـ} س$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ $س^{٢} صَ + ٢ س ص = \frac{أب}{س}$ (١)

بالاشتقاق مرة أخرى

∴ $س^{٢} صً + ٢ س صَ + ٢ س صَ + ٢ ص = \frac{-أب}{س^{٢}}$

∴ $س^{٢} صً + ٤ س صَ + ٢ ص + \frac{أب}{س^{٢}} = ٠$ (٢)

بالتعويض عن قيمة أب من (١) فى (٢) :

∴ $س^{٢} صً + ٤ س صَ + ٢ ص + \frac{س^{٢} صَ + ٢ س^{٢} ص}{س^{٢}} = ٠$

∴ $س^{٢} صً + ٤ س صَ + ٢ ص + س صَ + ٢ ص = ٠$

∴ $س^{٢} صً + ٥ س صَ + ٤ ص = ٠$

٥٣

$ص لو_{هـ} (س ص) = س$ (١)

∴ $ص لو_{هـ} س + ص لو_{هـ} ص = س$

∴ $صَ لو_{هـ} س + \frac{ص}{س} + صَ لو_{هـ} ص + \frac{ص}{ص} صَ = ١$

∴ $صَ (لو_{هـ} س + لو_{هـ} ص + ١) = ١ - \frac{ص}{س}$

∴ $صَ (لو_{هـ} س ص + ١) = \frac{س - ص}{س}$ (٢)

، من (١) فإن $لو_{هـ} س ص = \frac{س}{ص}$ وبالتعويض فى (٢)

∴ $صَ \left(\frac{س}{ص} + ١\right) = \frac{س - ص}{س}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{س - ص}{س} \times \frac{ص}{س + ص} = \frac{ص (س - ص)}{س (س + ص)}$

٥٤

① (د) ② (د) ③ (أ) ④ (د)

إرشادات لحل رقم **٥٤**

① ∵ $ص = ١ + \frac{س}{\underline{|١}} + \frac{س^{٢}}{\underline{|٢}} + \frac{س^{٣}}{\underline{|٣}} + ...$

$= \sum_{ن = ١}^{\infty} \frac{س^{ن}}{\underline{|ن}}$

∴ $ص = هـ^{س}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = هـ^{س}$ ، $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = هـ^{س}$

، $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = هـ^{س} = ص$

② ∵ $دَ (س) = هـ^{س} جا س + هـ^{س} جتا س$

$= د (س) + ى (س)$

∴ العبارة (أ) صحيحة.

، $ىَ (س) = هـ^{س} جتا س - هـ^{س} جا س$

$= ى (س) - د (س)$

∴ العبارة (ب) صحيحة.

، $دً (س) = دَ (س) + ىَ (س)$

$= ٢ هـ^{س} جتا س = ٢ ى (س)$

∴ العبارة (جـ) صحيحة.

، $ىً (س) = ىَ (س) - دَ (س)$

$= -٢ هـ^{س} جا س = -٢ د (س)$

∴ العبارة (د) خطأ.

③ ∵ د(س) = $ه^{ظاس}$

∴ دَ(س) = قا² س $ه^{ظاس}$ = قا² س × د(س)

، ∵ قا² س ≥ ١ لجميع قيم س ∈ ح

∴ دَ(س) ≥ د(س)

④ ∵ ر هي الدالة العكسية للدالة د

∴ ر[د(س)] = س

∴ رَ(د(س)) × دَ(س) = ١

بوضع س = صفر

∴ رَ(د(٠)) × دَ(٠) = ١

، ∵ د(٠) = ١ ، دَ(س) = ٢س + ٣ + $ه^{س}$

∴ دَ(٠) = ٤   ∴ رَ(١) × دَ(٠) = ١

∴ رَ(١) × ٤ = ١   ∴ رَ(١) = $\frac{1}{4}$

٥٥

س = $ه^{جتا ٢ن}$ ∴ لو_ه س = جتا ٢ن (١)

، ص = $ه^{جا ٢ن}$ ∴ لو_ه ص = جا ٢ن (٢)

باشتقاق المعادلة (١) بالنسبة إلى ن

∴ $\frac{1}{س} \times \frac{دس}{دن}$ = −٢ جا ٢ن = −٢ لو_ه ص (٣)

، باشتقاق المعادلة (٢) بالنسبة إلى ن

∴ $\frac{1}{ص} \times \frac{دص}{دن}$ = ٢ جتا ٢ن = ٢ لو_ه س (٤)

بقسمة (٤) على (٣)

∴ $\frac{\frac{1}{ص} \times \frac{دص}{دن}}{\frac{1}{س} \times \frac{دس}{دن}} = \frac{٢ لو_ه س}{-٢ لو_ه ص}$

∴ $\frac{س}{ص} \times \frac{دص}{دس} = \frac{-لو_ه س}{لو_ه ص}$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{-ص لو_ه س}{س لو_ه ص}$

حل آخر :

∵ س = $ه^{جتا ٢ن}$ ∴ لو_ه س = جتا ٢ن

، ص = $ه^{جا ٢ن}$ ∴ لو_ه ص = جا ٢ن

بالتربيع والجمع :

(لو_ه س)² + (لو_ه ص)² = (جتا ٢ن)² + (جا ٢ن)² = ١

بالتفاضل بالنسبة لـ س

∴ $\frac{٢ لو_ه س}{س} + \frac{٢ لو_ه ص}{ص} \times$ صَ = ٠

∴ صَ = $\frac{-ص لو_ه س}{س لو_ه ص}$

٥٦

ص = أ جتا (لو_ه س) + ب جا (لو_ه س)

بالتفاضل بالنسبة لـ س

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{-أ جا (لو_ه س)}{س} + \frac{ب جتا (لو_ه س)}{س}$

(بالضرب × س)

∴ س $\frac{دص}{دس}$ = −أ جا (لو_ه س) + ب جتا (لو_ه س)

بالتفاضل بالنسبة لـ س

∴ س $\frac{د^2ص}{دس^2} + \frac{دص}{دس}$

= $\frac{-أ جتا (لو_ه س)}{س} - \frac{ب جا (لو_ه س)}{س}$ (بالضرب × س)

∴ س² $\frac{د^2ص}{دس^2}$ + س . $\frac{دص}{دس}$

= −(أ جتا (لو_ه س) + ب جا (لو_ه س)) = −ص

∴ س² $\frac{د^2ص}{دس^2}$ + س $\frac{دص}{دس}$ + ص = صفر

٥٧

∵ ص = $س^{س}$

∴ لو_ه ص = س لو_ه س

باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

∴ $\frac{1}{ص}$ × صَ = س × $\frac{1}{س}$ + لو_ه س

∴ $\frac{1}{ص}$ × صَ = ١ + لو_ه س

∴ صَ = ص (١ + لو_ه س)

∴ صَ = $س^{س}$ (١ + لو_ه س)

باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

∴ صً = $س^{س}$ $(\frac{1}{س})$ + (١ + لو_ه س)

× $س^{س}$ × (١ + لو_ه س)

∴ صً = $س^{س}$ × (١ + لو_ه س)² + $س^{س-١}$

٥٨

ص = $\frac{1}{2}$ لو_ه $\left[\left(\frac{١ - جتا ٢س}{١ + جتا ٢س}\right)\right]$ = $\frac{1}{2}$ لو_ه $\frac{٢ جا^2 س}{٢ جتا^2 س}$

= $\frac{1}{2}$ لو_ه ظا² س

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{ظا^2 س}$ × ٢ ظاس × قا² س

= $\frac{جتا^2 س}{جا^2 س} \times \frac{جاس}{جتاس} \times \frac{1}{جتا^2 س}$

= $\frac{1}{جاس جتاس} = \frac{1}{\frac{1}{2} جا ٢س}$ = ٢ قتا ٢س

٥٩

ص = لو_ه $\left(\frac{\sqrt{س^2+١} - ١}{\sqrt{س^2+١} + ١}\right)$

= لو_ه $(\sqrt{س^2+١} - ١)$ − لو_ه $(\sqrt{س^2+١} + ١)$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{\frac{٢س}{٢\sqrt{س^2+١}}}{\sqrt{س^2+١} - ١} - \frac{\frac{٢س}{٢\sqrt{س^2+١}}}{\sqrt{س^2+١} + ١}$

= $\frac{س}{\sqrt{س^2+١}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{س^2+١} - ١} - \frac{1}{\sqrt{س^2+١} + ١}\right)$

= $\frac{س}{\sqrt{س^2+١}} \times \left(\frac{\sqrt{س^2+١} + ١ - \sqrt{س^2+١} + ١}{س^2 + ١ - ١}\right)$

= $\frac{س}{\sqrt{س^2+١}} \times \left(\frac{٢}{س^2}\right) = \frac{٢}{س\sqrt{س^2+١}}$

٦٠

ص = $س^{س^{س^{...}}}$ بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس ه

∴ لو_ه ص = $س^{س^{س^{...}}}$ لو_ه س

∴ لو_ه ص = ص لو_ه س

بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ $\frac{صَ}{ص}$ = صَ لو_ه س + $\frac{ص}{س}$ (بالضرب × ص س)

∴ س صَ = س ص صَ لو_ه س + ص²

∴ س صَ (١ − ص لو_ه س) = ص²

∴ س صَ = $\frac{ص^2}{١ - ص لو_ه س}$

٦١

ص = $\sqrt{لو_ه س + \sqrt{لو_ه س + \sqrt{لو_ه س + ...}}}$

(بتربيع الطرفين)

∴ ص² = لو_ه س + $\sqrt{لو_ه س + \sqrt{لو_ه س + ...}}$

∴ ص² = لو_ه س + ص (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ ص صَ = $\frac{1}{س}$ + صَ

∴ ٢ ص صَ − صَ = $\frac{1}{س}$

∴ (٢ ص − ١) صَ = $\frac{1}{س}$

إجابات تمارين 8

١

① $\int هـ^{٤س} \, ءس = \frac{هـ^{٤س}}{٤} + ث = \frac{١}{٤} هـ^{٤س} + ث$

② $\int هـ^{-س} \, ءس = - هـ^{-س} + ث$

③ $\int هـ^{-\frac{٣}{٤}ص} \, ءص = \frac{هـ^{-\frac{٣}{٤}ص}}{-\frac{٣}{٤}} + ث = -\frac{٤}{٣} هـ^{-\frac{٣}{٤}ص} + ث$

④ $\int -٦ هـ^{٠,٢ص} \, ءص = \frac{-٦ هـ^{٠,٢ص}}{٠,٢} + ث$

$= -٣٠ هـ^{٠,٢ص} + ث$

⑤ $\int ٣\sqrt{٢} هـ^{-\sqrt{٢}ن} \, ءن = \frac{٣\sqrt{٢} هـ^{-\sqrt{٢}ن}}{-\sqrt{٢}} + ث$

$= -٣ هـ^{-\sqrt{٢}ن} + ث$

⑥ $\int - هـ^{-٥ع} \, ءع = \frac{-هـ^{-٥ع}}{-٥} + ث$

$= \frac{١}{٥} هـ^{-٥ع} + ث$

⑦ $\int \pi هـ^{س} \, ءس = \pi هـ^{س} + ث$

⑧ $\int هـ^{١-٣س} \, ءس = \frac{هـ^{١-٣س}}{-٣} + ث$

$= \frac{-١}{٣} هـ^{١-٣س} + ث$

⑨ $\int \frac{٧}{٢} هـ^{٣س-٤} \, ءس = \frac{٧}{٢} \frac{هـ^{٣س-٤}}{٣} + ث$

$= \frac{٧}{٦} هـ^{٣س-٤} + ث$

⑩ $\int هـ^{٧-٤س} \, ءس = \frac{هـ^{٧-٤س}}{-٤} + ث$

$= -\frac{١}{٤} هـ^{٧-٤س} + ث$

⑪ $\int ٥^{س} \, ءس = \frac{٥^{س}}{لو_{هـ} ٥} + ث$

⑫ $\int ٢^{٥-٢س} \, ءس = \frac{٢^{٥-٢س}}{-٢ \times لو_{هـ} ٢} + ث$

$= \frac{-١}{٢ لو_{هـ} ٢} \times ٢^{٥-٢س} + ث$

٢

① $\int (٤ س - ٢ هـ^{س}) \, ءس$

$= \frac{٤ س^{٢}}{٢} - ٢ هـ^{س} + ث$

$= ٢ س^{٢} - ٢ هـ^{س} + ث$

② $\int (٣ س^{٢} - ٤ هـ^{٢س}) \, ءس$

$= \frac{٣ س^{٣}}{٣} - ٤ \frac{هـ^{٢س}}{٢} + ث$

$= س^{٣} - ٢ هـ^{٢س} + ث$

③ $\int (١ + ٤ هـ^{-٢م}) \, ءس = (١ + ٤ هـ^{-٢م}) س + ث$

④ $\int (هـ^{٢ك} + ٤ ك) \, ءك = \frac{هـ^{٢ك}}{٢} + \frac{٤ ك^{٢}}{٢} + ث$

$= \frac{١}{٢} هـ^{٢ك} + ٢ ك^{٢} + ث$

⑤ $\int (٢ س^{٢} + ٢ جا ٢ س - ٤ هـ^{٣س}) \, ءس$

$= \frac{٢ س^{٣}}{٣} + \left(\frac{- جتا ٢ س}{٢}\right) - \frac{٤ هـ^{٣س}}{٣} + ث$

$= \frac{٢}{٣} س^{٣} - \frac{١}{٢} جتا ٢ س - \frac{٤}{٣} هـ^{٣س} + ث$

⑥ $\int (هـ^{٣س} + ٣ جتا س - ٤ س^{٣} + ٢) \, ءس$

$= \frac{هـ^{٣س}}{٣} + ٣ جا س - \frac{٤ س^{٤}}{٤} + ٢ س + ث$

$= \frac{١}{٣} هـ^{٣س} + ٣ جا س - س^{٤} + ٢ س + ث$

⑦ $\int \left(\frac{هـ^{س} + هـ^{-س}}{٢}\right) ءس$

$= \int \left(\frac{١}{٢} هـ^{س} + \frac{١}{٢} هـ^{-س}\right) ءس$

$= \frac{١}{٢} هـ^{س} - \frac{١}{٢} هـ^{-س} + ث$

⑧ $\int \left(\frac{هـ^{س} + ٣}{هـ^{س}}\right) ءس = \int (١ + ٣ هـ^{-س}) \, ءس$

$= س - ٣ هـ^{-س} + ث$

⑨ $\int \left(\frac{هـ^{س} + هـ^{-س}}{هـ^{س}}\right) ءس = \int (١ + هـ^{-٢س}) \, ءس$

$= س + \frac{هـ^{-٢س}}{-٢} + ث = س - \frac{١}{٢} هـ^{-٢س} + ث$

⑩ $\int \left(\frac{٣ هـ^{س} - ٢ هـ^{٢س}}{٢ هـ^{س}}\right) ءس = \int \left(\frac{٣}{٢} - هـ^{س}\right) ءس$

$= \frac{٣}{٢} س - هـ^{س} + ث$

⑪ $\int \left(\frac{هـ^{٣س} + ٢ هـ^{٢س} + ٤}{هـ^{س}}\right) ءس$

$= \int (هـ^{٢س} + ٢ هـ^{س} + ٤ هـ^{-س}) \, ءس$

$= \frac{١}{٢} هـ^{٢س} + ٢ هـ^{س} - ٤ هـ^{-س} + ث$

⑫ $\int \left(هـ^{س} + \frac{١}{هـ^{س}}\right)^{٢} ءس$

$= \int (هـ^{٢س} + ٢ + هـ^{-٢س}) \, ءس$

$= \frac{١}{٢} هـ^{٢س} + ٢ س - \frac{١}{٢} هـ^{-٢س} + ث$

⑬ $\int ٢ هـ^{س} (هـ^{س} + ١)^{٢} \, ءس$

$= \int ٢ هـ^{س} (هـ^{٢س} + ٢ هـ^{س} + ١) \, ءس$

$= \int (٢ هـ^{٣س} + ٤ هـ^{٢س} + ٢ هـ^{س}) \, ءس$

$= \frac{٢}{٣} هـ^{٣س} + ٢ هـ^{٢س} + ٢ هـ^{س} + ث$

⑭ $\int \left(\frac{(هـ^{س} - ٤)(هـ^{س} + ٢)}{(هـ^{س} - ٤)}\right) ءس$

$= \int (هـ^{س} + ٢) \, ءس = هـ^{س} + ٢ س + ث$

⑮ $\int (س^{٢هـ} + هـ^{٢س}) \, ءس$

$= \frac{س^{٢هـ + ١}}{٢هـ + ١} + \frac{١}{٢} هـ^{٢س} + ث$

⑯ $\int (\pi^{٤} + \pi^{س}) \, ءس = \pi^{٤} س + \frac{\pi^{س}}{لو_{هـ} \pi} + ث$

٣

① بفرض أن : $د(س) = س^{٢} + ١٥$

$\therefore دَ(س) = ٢ س$

$\therefore \int ٢ س هـ^{س^{٢} + ١٥} \, ءس = هـ^{س^{٢} + ١٥} + ث$

② بفرض أن : $د(س) = س^{٢} + ١$

$\therefore دَ(س) = ٢ س$

$\therefore \int ٤ س هـ^{س^{٢} + ١} \, ءس = ٢ \int ٢ س هـ^{س^{٢} + ١} \, ءس$

$= ٢ هـ^{س^{٢} + ١} + ث$

③ بفرض أن : $د(س) = س^{٣} + ١$

$\therefore دَ(س) = ٣ س^{٢}$

$\therefore \int س^{٢} هـ^{س^{٣} + ١} \, ءس = \frac{١}{٣} \int ٣ س^{٢} هـ^{س^{٣} + ١} \, ءس$

$= \frac{١}{٣} هـ^{س^{٣} + ١} + ث$

④ بفرض أن : $د(س) = س^{٢} - ٦ س - ٥$

$\therefore دَ(س) = ٢ س - ٦ = ٢ (س - ٣)$

$\therefore \int (س - ٣) هـ^{س^{٢} - ٦س - ٥} \, ءس$

$= \frac{١}{٢} \int ٢ (س - ٣) هـ^{س^{٢} - ٦س - ٥} \, ءس$

$= \frac{١}{٢} هـ^{س^{٢} - ٦س - ٥} + ث$

⑤ بفرض أن : $د(س) = س^{٤} - س^{٣}$

$\therefore دَ(س) = ٤ س^{٣} - ٣ س^{٢}$

$\therefore \int س^{٢} (٤ س - ٣) هـ^{س^{٤} - س^{٣}} \, ءس$

$= \int (٤ س^{٣} - ٣ س^{٢}) هـ^{س^{٤} - س^{٣}} \, ءس$

$= هـ^{س^{٤} - س^{٣}} + ث$

⑥ بفرض أن : $د(س) = س - جتا س$

$\therefore دَ(س) = ١ + جا س$

$\therefore \int (١ + جا س) هـ^{س - جتا س} \, ءس$

$= هـ^{س - جتا س} + ث$

⑦ بفرض أن : $د(س) = جتا س$

$\therefore دَ(س) = - جا س$

$\therefore \int جا س \times هـ^{جتا س} \, ءس$

$= - \int (- جا س) هـ^{جتا س} \, ءس = - هـ^{جتا س} + ث$

⑧ بفرض أن : $د(س) = جا س$

$\therefore دَ(س) = جتا س$

$\therefore \int (جتا س هـ^{جا س} + ٣ س^{٢}) \, ءس$

$= هـ^{جا س} + س^{٣} + ث$

⑨ بفرض أن : $د(س) = \sqrt{س}$

$\therefore د'(س) = \frac{1}{2\sqrt{س}}$

$\int \frac{هـ^{\sqrt{س}}}{\sqrt{س}}\, ءس = 2 \int \frac{1}{2\sqrt{س}}\, هـ^{\sqrt{س}}\, ءس$

$= 2\, هـ^{\sqrt{س}} + ث$

⑩ بفرض أن : $د(س) = -\sqrt{س}$

$\therefore د'(س) = \frac{-1}{2\sqrt{س}}$

$\therefore \int \frac{ءس}{\sqrt{س}\, هـ^{\sqrt{س}}} = -2 \int \frac{-1}{2\sqrt{س}}\, هـ^{-\sqrt{س}}\, ءس$

$= -2\, هـ^{-\sqrt{س}} + ث$

⑪ بفرض أن : $د(س) = 1 + 2هـ^{س}$

$\therefore د'(س) = 2هـ^{س}$

$\int \frac{هـ^{س}}{\sqrt{1 + 2هـ^{س}}}\, ءس$

$= \frac{1}{2} \int 2هـ^{س} (1 + 2هـ^{س})^{-\frac{1}{2}}\, ءس$

$= \frac{1}{2} \times \frac{(1 + 2هـ^{س})^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + ث = (1 + 2هـ^{س})^{\frac{1}{2}} + ث$

⑫ بفرض أن : $د(س) = هـ^{س} + 1$

$\therefore د'(س) = هـ^{س}$

$\therefore \int 9(هـ^{س} + 1)^{8} \times هـ^{س}\, ءس = (هـ^{س} + 1)^{9} + ث$

⑬ بفرض أن : $د(س) = جاس$

$\therefore د'(س) = جتاس$

$\int 2^{جاس}\, جتاس\, ءس = \int (جتاس) \times 2^{جاس}\, ءس$

$= \frac{2^{جاس}}{لو_{هـ} 2} + ث$

⑭ بفرض أن : $د(س) = جتاس$

$\therefore د'(س) = -جاس$

$\therefore \int 7^{جتاس}\, جاس\, ءس = -\int -جاس \times 7^{جتاس}\, ءس$

$= \frac{-7^{جتاس}}{لو_{هـ} 7} + ث$

٤

① $\int \frac{2}{س}\, ءس = 2\, لو_{هـ}|س| + ث$

② $\int \frac{1}{3س}\, ءس = \frac{1}{3} لو_{هـ}|س| + ث$

③ $\int \frac{1}{س + 1}\, ءس = لو_{هـ}|س + 1| + ث$

④ $\int (س + \frac{1}{س})\, ءس = \frac{س^{2}}{2} + لو_{هـ}|س| + ث$

⑤ $\int (\frac{4}{س} - هـ^{-س})\, ءس$

$= 4\, لو_{هـ}|س| + هـ^{-س} + ث$

⑥ $\int (\frac{3}{س} + 4هـ^{-2س})\, ءس$

$= 3\, لو_{هـ}|س| + \frac{4هـ^{-2س}}{-2} + ث$

$= 3\, لو_{هـ}|س| - 2هـ^{-2س} + ث$

⑦ $\int \frac{4}{3س\, لو_{هـ} 5}\, ءس = \frac{4}{3\, لو_{هـ} 5} لو_{هـ}|س| + ث$

⑧ $\int \frac{لو_{هـ} 3}{س}\, ءس = لو_{هـ} 3 \,.\, لو_{هـ}|س| + ث$

⑨ $\int \frac{لو_{هـ} س^{2}}{س\, لو_{هـ} س^{3}}\, ءس = \int \frac{2\, لو_{هـ} س}{3س\, لو_{هـ} س}\, ءس$

$= \int \frac{2}{3س}\, ءس = \frac{2}{3} لو_{هـ}|س| + ث$

⑩ $\int \frac{لو_{هـ} س}{س\, لو_{هـ}\sqrt{س}}\, ءس = \int \frac{لو_{هـ} س}{\frac{1}{2} س\, لو_{هـ} س}\, ءس$

$= \int \frac{2}{س}\, ءس = 2\, لو_{هـ}|س| + ث$

⑪ $\int (\frac{2هـ}{س} + \frac{س}{هـ})\, ءس$

$= 2هـ\, لو_{هـ}|س| + \frac{1}{2هـ} س^{2} + ث$

⑫ $\int (\frac{هـ^{2}}{س} + س\, لو_{هـ} 2)\, ءس$

$= هـ^{2}\, لو_{هـ}|س| + \frac{1}{2} س^{2}\, لو_{هـ} 3 + ث$

⑬ $\int (3هـ^{-س} + \frac{\pi}{س})\, ءس$

$= -3هـ^{-س} + \pi\, لو_{هـ}|س| + ث$

⑭ $\int (3س^{2} + \frac{5}{س})\, ءس$

$= س^{3} + 5\, لو_{هـ}|س| + ث$

⑮ $\int (س^{6} + 5هـ^{س} + \frac{1}{س})\, ءس$

$= \frac{1}{7} س^{7} + 5هـ^{س} + لو_{هـ}|س| + ث$

⑯ $\int (جاس - \frac{2}{س} + هـ^{س})\, ءس$

$= -جتاس - 2\, لو_{هـ}|س| + هـ^{س} + ث$

⑰ $\int (هـ^{س} + 3^{س} + \frac{1}{س})\, ءس$

$= هـ^{س} + \frac{3^{س}}{لو_{هـ} 3} + لو_{هـ}|س| + ث$

⑱ $\int (\frac{5س + 7}{س} + هـ^{س})\, ءس$

$= \int (5 + \frac{7}{س} + هـ^{س})\, ءس$

$= 5س + 7\, لو_{هـ}|س| + هـ^{س} + ث$

⑲ $\int (\frac{-3}{س} + 4هـ^{-0.4س} + هـ^{0.1})\, ءس$

$= -3\, لو_{هـ}|س| + \frac{4هـ^{-0.4س}}{-0.4} + هـ^{0.1} س + ث$

$= -3\, لو_{هـ}|س| - 10هـ^{-0.4س} + هـ^{0.1} س + ث$

⑳ $\int \frac{6س^{2} - 5}{3س}\, ءس = \int (2س - \frac{5}{3س})\, ءس$

$= س^{2} - \frac{5}{3} لو_{هـ}|س| + ث$

㉑ $\int \frac{س^{2} - 4}{س^{2} - 2س}\, ءس = \int \frac{(س - 2)(س + 2)}{س(س - 2)}\, ءس$

$\int \frac{س + 2}{س}\, ءس = \int (1 + \frac{2}{س})\, ءس$

$= س + 2\, لو_{هـ}|س| + ث$

㉒ $\int (\sqrt{س} - \frac{3}{\sqrt{س}})^{2}\, ءس = \int (س - 6 + \frac{9}{س})\, ءس$

$= \frac{1}{2} س^{2} - 6س + 9\, لو_{هـ}|س| + ث$

㉓ $\int \frac{(2س - 1)^{2}}{3س}\, ءس = \int \frac{4س^{2} - 4س + 1}{3س}\, ءس$

$= \int (\frac{4}{3}س - \frac{4}{3} + \frac{1}{3س})\, ءس$

$= \frac{2}{3} س^{2} - \frac{4}{3} س + \frac{1}{3} لو_{هـ}|س| + ث$

㉔ $\int (\frac{4هـ^{س} + س\, هـ^{2س}}{س\, هـ^{س}})\, ءس$

$= \int (\frac{4}{س} + هـ^{س})\, ءس$

$= 4\, لو_{هـ}|س| + هـ^{س} + ث$

٥

① $\int \frac{4}{1 + 2س}\, ءس = 2 \int \frac{2}{1 + 2س}\, ءس$

$= 2\, لو_{هـ}|1 + 2س| + ث$

② $\int \frac{ءس}{4س - 1} = \frac{1}{4} \int \frac{4}{4س - 1}\, ءس$

$= \frac{1}{4} لو_{هـ}|4س - 1| + ث$

③ بفرض أن : $د(س) = س^{2} + 1$

$\therefore د'(س) = 2س$

$\int \frac{س}{س^{2} + 1}\, ءس = \frac{1}{2} \int \frac{2س}{س^{2} + 1}\, ءس$

$= \frac{1}{2} لو_{هـ}|س^{2} + 1| + ث$

④ بفرض أن : $د(س) = س^{2} - 1$

$\therefore د'(س) = 2س$

$\therefore \int \frac{3س}{س^{2} - 1}\, ءس = \frac{3}{2} \int \frac{2س}{س^{2} - 1}\, ءس$

$= \frac{3}{2} لو_{هـ}|س^{2} - 1| + ث$

⑤ بفرض أن : $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٣\text{س}$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = ٢\text{س} + ٣$

$\int \frac{٦\text{س} + ٩}{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}}\,\text{ءس} = ٣\int \frac{٢\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}}\,\text{ءس}$

$= ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٢} + ٣\text{س}| + \text{ث}$

⑥ بفرض أن : $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٧$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = ٢\text{س} + ٢$

$\int \frac{\text{س} + ١}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٧}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٢}\int \frac{٢\text{س} + ٢}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٧}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٧| + \text{ث}$

⑦ بفرض أن : $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ٢$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = ٢\text{س} + ٣$

$\therefore \int \frac{٢\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ٢}\,\text{ءس}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ٢| + \text{ث}$

⑧ بفرض أن : $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - ٥\text{س} + ١$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢} - ٥$

$\therefore \int \frac{٣\text{س}^{٢} - ٥}{\text{س}^{٣} - ٥\text{س} + ١}\,\text{ءس}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٣} - ٥\text{س} + ١| + \text{ث}$

⑨ بفرض أن : $\text{د}(\text{س}) = ٢\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ١$

$\text{د}'(\text{س}) = ٦\text{س}^{٢} + ٢\text{س}$

$\int \frac{٣\text{س}^{٢} + \text{س}}{٢\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ١}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٢}\int \frac{٦\text{س}^{٢} + ٢\text{س}}{٢\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ١}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}|٢\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ١| + \text{ث}$

⑩ بفرض أن : $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + ٦\text{س} + ١$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢} + ٦$

$\therefore \int \frac{\text{س}^{٢} + ٢}{\text{س}^{٣} + ٦\text{س} + ١}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٣}\int \frac{٣\text{س}^{٢} + ٦}{\text{س}^{٣} + ٦\text{س} + ١}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٣}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٣} + ٦\text{س} + ١| + \text{ث}$

⑪ $\int \frac{٢\text{س} - ١}{\text{س} - ١}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{٢\text{س} - ٢ + ١}{\text{س} - ١}\,\text{ءس}$

$= \int \left(\frac{٢\text{س} - ٢}{\text{س} - ١} + \frac{١}{\text{س} - ١}\right)\text{ءس}$

$= \int \left(٢ + \frac{١}{\text{س} - ١}\right)\text{ءس}$

$= ٢\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س} - ١| + \text{ث}$

⑫ $\int \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س} + ١}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{\text{س}^{٢} - ١ + ١}{\text{س} + ١}\,\text{ءس}$

$= \int \left(\frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} + ١} + \frac{١}{\text{س} + ١}\right)\text{ءس}$

$= \int \left(\frac{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)}{\text{س} + ١} + \frac{١}{\text{س} + ١}\right)\text{ءس}$

$= \int \left(\text{س} - ١ + \frac{١}{\text{س} + ١}\right)\text{ءس}$

$= \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} - \text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س} + ١| + \text{ث}$

⑬ بفرض أن : $\text{د}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}} + ٣$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} + ٣}\,\text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}} + ٣| + \text{ث}$

⑭ بالضرب بسطًا ومقامًا في $\text{هـ}^{-\text{س}}$

$\therefore$ التكامل $= \int \frac{\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{-\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{-\text{س}}}\,\text{ءس}$

وبفرض $\text{د}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{-\text{س}}$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{-\text{س}}$

$\therefore$ التكامل $= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{-\text{س}}| + \text{ث}$

٦

① $\int \text{ظاس}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}\,\text{ءس}$

$= -\int \frac{(-\text{جاس})}{\text{جتاس}}\,\text{ءس} = -\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتاس}| + \text{ث}$

② $\int \text{ظتاس}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}\,\text{ءس}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جاس}| + \text{ث}$

③ $\int \text{قاس}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{قاس}(\text{قاس} + \text{ظاس})}{\text{قاس} + \text{ظاس}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{(\text{قا}^{٢}\text{س} + \text{قاس ظاس})}{\text{قاس} + \text{ظاس}}\,\text{ءس}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{قاس} + \text{ظاس}| + \text{ث}$

④ $\int \text{قتاس}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{قتاس}(\text{قتاس} + \text{ظتاس})}{\text{قتاس} + \text{ظتاس}}\,\text{ءس}$

$= -\int \frac{-(\text{قتا}^{٢}\text{س} + \text{قتاس ظتاس})}{\text{قتاس} + \text{ظتاس}}\,\text{ءس}$

$= -\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{قتاس} + \text{ظتاس}| + \text{ث}$

⑤ بفرض أن : $\text{د}(\text{س}) = ٢ + \text{جاس}$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \text{جتاس}$

$\int \frac{\text{جتاس}}{٢ + \text{جاس}}\,\text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|٢ + \text{جاس}| + \text{ث}$

⑥ بفرض أن : $\text{د}(\text{س}) = ١ + \text{جتاس}$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = -\text{جاس}$

$\therefore \int \frac{\text{جاس}}{١ + \text{جتاس}}\,\text{ءس} = -\int \frac{-\text{جاس}}{١ + \text{جتاس}}\,\text{ءس}$

$= -\text{لو}_{\text{هـ}}|١ + \text{جتاس}| + \text{ث}$

⑦ بفرض أن : $\text{د}(\text{س}) = \text{ظاس}$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \text{قا}^{٢}\text{س}$

$\int \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{\text{ظاس}}\,\text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ظاس}| + \text{ث}$

⑧ بفرض أن : $\text{د}(\text{س}) = \text{ظتاس}$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = -\text{قتا}^{٢}\text{س}$

$\therefore \int \frac{\text{قتا}^{٢}\text{س}}{\text{ظتاس}}\,\text{ءس} = -\int \frac{-\text{قتا}^{٢}\text{س}}{\text{ظتاس}}\,\text{ءس}$

$= -\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ظتاس}| + \text{ث}$

⑨ بفرض أن : $\text{د}(\text{س}) = \text{جاس} - \text{جتاس}$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \text{جتاس} + \text{جاس}$

$\therefore \int \frac{\text{جاس} + \text{جتاس}}{\text{جاس} - \text{جتاس}}\,\text{ءس}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جاس} - \text{جتاس}| + \text{ث}$

⑩ $\int \frac{١ - \text{ظاس}}{١ + \text{ظاس}} \times \left(\frac{\text{جتاس}}{\text{جتاس}}\right)\text{ءس}$

$= \int \frac{\text{جتاس} - \text{جاس}}{\text{جتاس} + \text{جاس}}\,\text{ءس}$

بفرض أن : $\text{د}(\text{س}) = \text{جتاس} + \text{جاس}$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = -\text{جاس} + \text{جتاس}$

$\therefore$ التكامل $= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتاس} + \text{جاس}| + \text{ث}$

⑪ بفرض أن : $\text{د}(\text{س}) = \text{قاس} - ١$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \text{قاس ظاس}$

$\int \frac{\text{قاس ظاس}}{\text{قاس} - ١}\,\text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{قاس} - ١| + \text{ث}$

⑫ بفرض أن : $\text{د}(\text{س}) = \text{جا}^{٢}\text{س} + ٢\,\text{جاس} - ١$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = ٢\,\text{جاس جتاس} + ٢\,\text{جتاس}$

$= \text{جا}\,٢\text{س} + ٢\,\text{جتاس}$

$\therefore \int \frac{\text{جا}\,٢\text{س} + ٢\,\text{جتاس}}{\text{جا}^{٢}\text{س} + ٢\,\text{جاس} - ١}\,\text{ءس}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جا}^{٢}\text{س} + ٢\,\text{جاس} - ١| + \text{ث}$

⑬ $\int \text{ظا}\,٦\text{س}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{جا}\,٦\text{س}}{\text{جتا}\,٦\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \frac{-١}{٦}\int \frac{(-٦\,\text{جا}\,٦\text{س})}{\text{جتا}\,٦\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \frac{-١}{٦}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتا}\,٦\text{س}| + \text{ث}$

(14) $\int \text{ظا}^3 \text{س} \, \text{ء س} = \int \text{ظا س ظا}^2 \text{س} \, \text{ء س}$

$= \int \text{ظا س} (\text{قا}^2 \text{س} - 1) \, \text{ء س}$

$= \int \left(\text{ظا س قا}^2 \text{س} - \frac{\text{حا س}}{\text{حتا س}}\right) \text{ء س}$

∵ $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}} (\text{ظا س}) = \text{قا}^2 \text{س}$ ، $\frac{\text{ء (حتا س)}}{\text{ء س}} = - \text{حا س}$

∴ التكامل $= \frac{1}{2} \text{ظا}^2 \text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{حتا س}| + \text{ث}$

حل آخر :

∵ $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}} (\text{قا س}) = \text{قا س ظا س}$

∴ التكامل $= \frac{1}{2} \text{قا}^2 \text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{حتا س}| + \text{ث}$

(15) بفرض أن : $\text{د(س)} = \text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{قا س}$

∴ $\text{د}'(\text{س}) = 1 + \frac{\text{قا س ظا س}}{\text{قا س}} = 1 + \text{ظا س}$

∴ $\int \frac{(1 + \text{ظا س})}{\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{قا س}} \, \text{ء س}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{قا س}| + \text{ث}$

(16) بفرض أن : $\text{د(س)} = \text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{حا س}$

∴ $\text{د}'(\text{س}) = 1 + \frac{\text{حتا س}}{\text{حا س}} = 1 + \text{ظتا س}$

$\int \frac{1 + \text{ظتا س}}{\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{حا س}} \, \text{ء س}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{حا س}| + \text{ث}$

(17) $\frac{\text{حا 2س}}{\text{حا 4س}} = \frac{\text{حا 2س}}{\text{2 حا 2س حتا 2س}} = \frac{1}{2} \text{قا 2س}$

$= \frac{1}{2} \, \frac{\text{قا 2س (قا 2س + ظا 2س)}}{\text{قا 2س + ظا 2س}}$

بفرض أن : $\text{د(س)} = \text{قا 2س} + \text{ظا 2س}$

∴ $\text{د}'(\text{س}) = \text{2 قا 2س ظا 2س} + 2 \, \text{قا}^2 \, \text{2س}$

$= \text{2 قا 2س (قا 2س + ظا 2س)}$

∴ $\int \frac{\text{حا 2س}}{\text{حا 4س}} \, \text{ء س}$

$= \frac{1}{4} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{قا 2س} + \text{ظا 2س}| + \text{ث}$

(18) بفرض أن : $\text{د(س)} = \text{س}^{\text{هـ}} + \text{هـ}^{\text{س}}$

∴ $\text{د}'(\text{س}) = \text{هـ س}^{\text{هـ} - 1} + \text{هـ}^{\text{س}}$

$= \text{هـ} (\text{س}^{\text{هـ} - 1} + \text{هـ}^{\text{س} - 1})$

∴ $\int \frac{\text{س}^{\text{هـ} - 1} + \text{هـ}^{\text{س} - 1}}{\text{س}^{\text{هـ}} + \text{هـ}^{\text{س}}} \, \text{ء س}$

$= \frac{1}{\text{هـ}} \int \frac{\text{هـ} (\text{س}^{\text{هـ} - 1} + \text{هـ}^{\text{س} - 1})}{\text{س}^{\text{هـ}} + \text{هـ}^{\text{س}}} \, \text{ء س}$

$= \frac{1}{\text{هـ}} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}^{\text{هـ}} + \text{هـ}^{\text{س}}| + \text{ث}$

7

(1) (جـ)   (2) (أ)   (3) (جـ)   (4) (د)

(5) (أ)   (6) (جـ)   (7) (ب)   (8) (د)

(9) (جـ)   (10) (د)

8

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = 7 - 2 \, \text{هـ}^{\text{س}}$ (بتكامل الطرفين بالنسبة إلى س)

$\text{ص} = \int (7 - 2 \, \text{هـ}^{\text{س}}) \, \text{ء س} = 7 \text{س} - 2 \, \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$

∵ $\text{د} (\text{لو}_{\text{هـ}} 2) = 3$

$3 = 7 \, \text{لو}_{\text{هـ}} 2 - 2 \, \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}} 2} + \text{ث}$

$3 = 7 \, \text{لو}_{\text{هـ}} 2 - 2 \times 2 + \text{ث}$

$\text{ث} = 7 - 7 \, \text{لو}_{\text{هـ}} 2 = 7 (1 - \text{لو}_{\text{هـ}} 2) = 7 \left(\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{هـ}}{2}\right)$

∴ $\text{د(س)} = 7 \text{س} - 2 \, \text{هـ}^{\text{س}} + 7 \, \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{هـ}}{2}$

9

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = 2 \, \text{هـ}^{-\frac{1}{2} \text{س}}$ (بتكامل الطرفين بالنسبة إلى س)

∴ $\text{ص} = \frac{2 \, \text{هـ}^{-\frac{1}{2} \text{س}}}{-\frac{1}{2}} + \text{ث} = -4 \, \text{هـ}^{-\frac{1}{2} \text{س}} + \text{ث}$

∵ $\text{د}(0) = 1$ $1 = -4 \, \text{هـ}^{-\frac{1}{2}(0)} + \text{ث}$

∴ $\text{ث} = 5$ ∴ $\text{ص} = -4 \, \text{هـ}^{-\frac{1}{2} \text{س}} + 5$

∴ $\text{د(س)} = -4 \, \text{هـ}^{-\frac{1}{2} \text{س}} + 5$

∴ $\text{د}(3) = -4 \, \text{هـ}^{-\frac{1}{2}(3)} + 5 = 5 - 4 \, \text{هـ}^{-\frac{3}{2}}$

10

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{1}{2\text{س} - \text{هـ}}$

$\text{ص} = \int \frac{1}{2\text{س} - \text{هـ}} \, \text{ء س} = \frac{1}{2} \int \frac{2}{2\text{س} - \text{هـ}} \, \text{ء س}$

$= \frac{1}{2} \text{لو}_{\text{هـ}} |2\text{س} - \text{هـ}| + \text{ث}$

∴ $\text{د(س)} = \frac{1}{2} \text{لو}_{\text{هـ}} |2\text{س} - \text{هـ}| + \text{ث}$

، ∵ $\text{د(هـ)} = \frac{1}{2}$

∴ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{لو}_{\text{هـ}} |2\text{هـ} - \text{هـ}| + \text{ث}$

∴ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{هـ}| + \text{ث}$ ∴ ث = صفر

∴ $\text{د(س)} = \frac{1}{2} \text{لو}_{\text{هـ}} |2\text{س} - \text{هـ}|$

∴ $\text{د(2هـ)} = \frac{1}{2} \text{لو}_{\text{هـ}} |4\text{هـ} - \text{هـ}| = \frac{1}{2} \text{لو}_{\text{هـ}} |3\text{هـ}|$

$= \frac{1}{2} [\text{لو}_{\text{هـ}} \text{هـ} + \text{لو}_{\text{هـ}} 3] = \frac{1}{2} (1 + \text{لو}_{\text{هـ}} 3)$

11

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{3\text{س} + 2}{\text{س}} = 3 + \frac{2}{\text{س}}$

(بتكامل الطرفين بالنسبة إلى س)

$\text{ص} = \int \left(3 + \frac{2}{\text{س}}\right) \text{ء س} = 3\text{س} + 2 \, \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| + \text{ث}$

∵ (هـ ، 3هـ + 5) تقع على المنحنى

∴ $3\text{هـ} + 5 = 3\text{هـ} + 2 + \text{ث}$ ∴ ث = 3

∴ $\text{ص} = 3\text{س} + 2 \, \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| + 3$

12

$\frac{\text{ء م}}{\text{ء ن}} = \text{هـ}^{-0.1 \text{ن}}$ (بتكامل الطرفين بالنسبة إلى ن)

$\text{م} = \frac{\text{هـ}^{-0.1 \text{ن}}}{-0.1} + \text{ث} = -10 \, \text{هـ}^{-0.1 \text{ن}} + \text{ث}$

في البداية ن = ٠ ، م = ٨٠ سم^2

∴ $80 = -10 \times 1 + \text{ث}$ ∴ ث = 90

∴ $\text{م} = 90 - 10 \, \text{هـ}^{-0.1 \text{ن}}$ بعد ١٠ ثوان

$(\text{م})_{\text{ن}=10} = (90 - 10 \, \text{هـ}^{-1})$ سم^2

13

$\frac{\text{ء م}}{\text{ء ن}} \propto \frac{1}{\text{ن}}$ حيث م هى مبيعات المصنع

∴ $\frac{\text{ء م}}{\text{ء ن}} = \frac{\text{ك}}{\text{ن}}$ حيث ك ثابت بالتكامل بالنسبة إلى ن

$\text{م} = \text{ك} \, \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ن}| + \text{ث}$

∵ ن ≥ ٠   ∴ $\text{م} = \text{ك} \, \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ن} + \text{ث}$

بعد أسبوعين كانت م = ٢٠٠

$200 = \text{ك} \, \text{لو}_{\text{هـ}} 2 + \text{ث}$ (1)

بعد ٤ أسابيع كانت م = ٣٠٠

$300 = \text{ك} \, \text{لو}_{\text{هـ}} 4 + \text{ث}$ (2)

بطرح (2) − (1)

$100 = \text{ك} (\text{لو}_{\text{هـ}} 4 - \text{لو}_{\text{هـ}} 2) = \text{ك} \, \text{لو}_{\text{هـ}} 2$

∴ $\text{ك} = \frac{100}{\text{لو}_{\text{هـ}} 2}$ بالتعويض فى (2)

∴ $300 = \frac{100}{\text{لو}_{\text{هـ}} 2} \times 2 \, \text{لو}_{\text{هـ}} 2 + \text{ث}$ ∴ ث = ١٠٠

∴ $\text{م} = \frac{100 \, \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ن}}{\text{لو}_{\text{هـ}} 2} + 100 = 100 \, \text{لو}_2 \text{ن} + 100$

$= 100 (1 + \text{لو}_2 \text{ن})$

∴ $(\text{م})_{\text{ن}=8} = 100 (1 + \text{لو}_2 8) = 400$

14

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} \propto \frac{1}{\text{س}}$ ∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{ك}}{\text{س}}$ حيث ك ثابت

عند س = ٤ فإن $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = 2$

∴ $2 = \frac{\text{ك}}{4}$ ∴ ك = ٨

∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{8}{\text{س}}$ (بتكامل الطرفين بالنسبة إلى س)

∴ $\text{ص} = \int \frac{8}{\text{س}} \, \text{ء س}$

∴ $\text{ص} = 8 \, \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| + \text{ث}$

، ∵ عند س = ٤   ∴ ص = ٢

∴ $2 = 8 \, \text{لو}_{\text{هـ}} 4 + \text{ث}$ ∴ $\text{ث} = 2 - 8 \, \text{لو}_{\text{هـ}} 4$

∴ $\text{ص} = 8 \, \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| + 2 - 8 \, \text{لو}_{\text{هـ}} 4$

١٥

① $\int \frac{١}{س\, لو_{هـ} س} \, ءس = \int \left(\frac{١}{س}\right) \frac{١}{لو_{هـ} س} \, ءس$

$= لو_{هـ} |لو_{هـ} س| + ث$

② $\int \frac{٤}{س\, لو_{هـ} ٣س} \, ءس$

$= ٤ \int \left(\frac{١}{س}\right) \frac{١}{لو_{هـ} ٣س} \, ءس$

$= ٤ \, لو_{هـ} |لو_{هـ} ٣س| + ث$

③ $\int \frac{(لو_{هـ} س)^٢}{س} \, ءس = \int \left(\frac{١}{س}\right) (لو_{هـ} س)^٢ \, ءس$

$= \frac{١}{٣} (لو_{هـ} س)^٣ + ث$

④ $\int \frac{(لو\, س)^٢}{س} \, ءس$

$= \int \frac{١}{س} \left(\frac{لو_{هـ} س}{لو_{هـ} ١٠}\right)^٢ ءس$

$= \frac{١}{(لو_{هـ} ١٠)^٢} \int \frac{١}{س} (لو_{هـ} س)^٢ \, ءس$

$= \frac{١}{(لو_{هـ} ١٠)^٢} \times \frac{١}{٣} (لو_{هـ} س)^٣ + ث$

$= \frac{لو_{هـ} ١٠}{٣} \times \left(\frac{لو_{هـ} س}{لو_{هـ} ١٠}\right)^٣ + ث$

$= \frac{لو_{هـ} ١٠}{٣} (لو\, س)^٣ + ث$

$= \frac{١}{٣\, لو\, هـ} (لو\, س)^٣ + ث$

⑤ $\int \frac{(١ + لو_{هـ} س)^٢}{س} \, ءس$

$= \int \left(\frac{١}{س}\right) (١ + لو_{هـ} س)^٢ \, ءس$

$= \frac{(١ + لو_{هـ} س)^٣}{٣} + ث$

⑥ $\int \frac{٢س}{(س + ١)^٢} \, ءس = \int ٢س \, (س + ١)^{-٢} \, ءس$

$= ٢ \int (س + ١ - ١)(س + ١)^{-٢} \, ءس$

$= ٢ \int [(س + ١)^{-١} - (س + ١)^{-٢}] \, ءس$

$= ٢ \left(لو_{هـ} |س + ١| - \frac{(س + ١)^{-١}}{-١}\right) + ث$

$= ٢ \, لو_{هـ} |س + ١| + \frac{٢}{س + ١} + ث$

⑦ $\int \frac{\sqrt{١ + لو_{هـ} س}}{س} \, ءس$

$= \int \left(\frac{١}{س}\right) (١ + لو_{هـ} س)^{\frac{١}{٢}} \, ءس$

$= \frac{(١ + لو_{هـ} س)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ث = \frac{٢}{٣} (١ + لو_{هـ} س)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

⑧ بفرض أن : $د(س) = س + لو_{هـ} س$

$\therefore د'(س) = ١ + \frac{١}{س} = \frac{س + ١}{س}$

$\therefore \int \frac{س + ١}{س \sqrt{س + لو_{هـ} س}} \, ءس$

$= \int \left(\frac{س + ١}{س}\right) (س + لو_{هـ} س)^{-\frac{١}{٢}} \, ءس$

$= \frac{(س + لو_{هـ} س)^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + ث$

$= ٢ (س + لو_{هـ} س)^{\frac{١}{٢}} + ث$

١٦ ① (جـ) ② (ب)

إرشادات لحل رقم ١٦

① $\because \int \frac{د(س)}{س} \, ءس = لو_{هـ} |س| + س^٢ + ث$

$\therefore \frac{ء}{ءس} \int \frac{د(س)}{س} \, ءس$

$= \frac{ء}{ءس} [لو_{هـ} |س| + س^٢ + ث]$

$\therefore \frac{د(س)}{س} = \frac{١}{س} + ٢س$

$\therefore د(س) = ١ + ٢س^٢$

② $\int \frac{١}{س^٢} (لو_{هـ} س^{س})^٢ \, ءس$

$= \int \frac{١}{س^٢} (س \, لو_{هـ} س)^٢ \, ءس$

$= \int \frac{١}{س} (لو_{هـ} س)^٢ \, ءس = \frac{١}{٣} (لو_{هـ} س)^٣ + ث$

١٧

① بفرض أن : $د(س) = لو_{هـ} س$

$\therefore د'(س) = \frac{١}{س}$

$\int \left(\frac{١}{س}\right) جتا(لو_{هـ} س) \, ءس = جا(لو_{هـ} س) + ث$

② $\int أ^{٣ لو_{أ} س} \, ءس = \int أ^{لو_{أ} س^٣} \, ءس$

$= \int س^٣ \, ءس = \frac{١}{٤} س^٤ + ث$

③ $\int \left(\frac{٣}{س} - \frac{٢س - ١}{س^٢ - س + ٢}\right) ءس$

$= ٣ \, لو_{هـ} |س| - لو_{هـ} |س^٢ - س + ٢| + ث$

④ $\int \frac{٣س^٢ + (س^٢ + س + ١)}{س^٣ - ١} \, ءس$

$= \int \frac{٣س^٢}{س^٣ - ١} \, ءس$

$+ \int \frac{س^٢ + س + ١}{(س - ١)(س^٢ + س + ١)} \, ءس$

$= لو_{هـ} |س^٣ - ١| + \int \frac{١}{س - ١} \, ءس$

$= لو_{هـ} |س^٣ - ١| + لو_{هـ} |س - ١| + ث$

⑤ بفرض أن : $د(س) = لو_{هـ} (جا \, لو_{هـ} س)$

$\therefore د'(س) = \frac{١}{جا (لو_{هـ} س)} \times جتا (لو_{هـ} س) \times \frac{١}{س}$

$= \frac{١}{س} ظتا (لو_{هـ} س)$

$\int \frac{١}{س} لو_{هـ} (جا \, لو_{هـ} س) \, ظتا (لو_{هـ} س) \, ءس$

$= \int \left(\frac{١}{س} ظتا \, لو_{هـ} س\right) لو_{هـ} (جا \, لو_{هـ} س) \, ءس$

$= \frac{١}{٢} \left(لو_{هـ} (جا \, لو_{هـ} س)\right)^٢ + ث$

⑥ $\int (س^٣ + أ^س + هـ^س أ^س + جا \, أ) \, ءس$

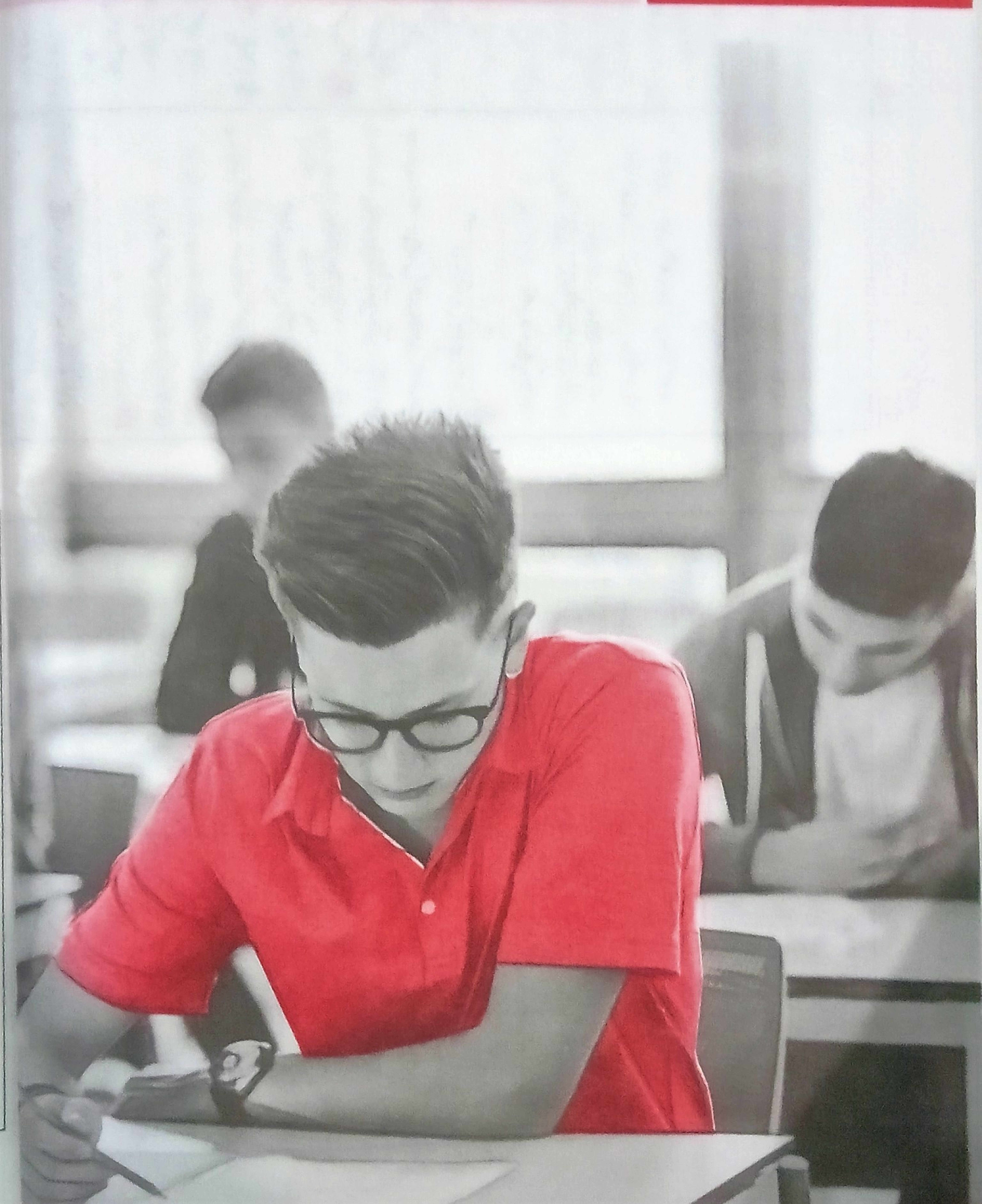
$= \frac{١}{٤} س^٤ + \frac{أ^س}{لو_{هـ} أ} + \frac{(هـ أ)^س}{لو_{هـ} أ هـ} + (جا \, أ) \, س + ث$

⑦ $\int (هـ^{س \, لو_{هـ} أ} + هـ^{أ \, لو_{هـ} س} + هـ^{أ \, لو \, أ}) \, ءس$

$= \frac{هـ^{س \, لو_{هـ} أ}}{لو_{هـ} أ} + \frac{س^{أ + ١}}{أ + ١} + هـ^{أ \, لو \, أ} \, س + ث$

إجابات الوحدة 3

سلوك الدالة ورسم المنحنيات



١

① (ب)	② (د)	③ (ب)
④ (أ)	⑤ (ب)	⑥ (ب)
⑦ (ب)	⑧ (ب)	⑨ (ب)
⑩ (جـ)	⑪ (جـ)	⑫ (أ)
⑬ (د)	⑭ (د)	⑮ (جـ)
⑯ (ب)	⑰ (د)	⑱ (جـ)
⑲ (د)	⑳ (أ)	

٢

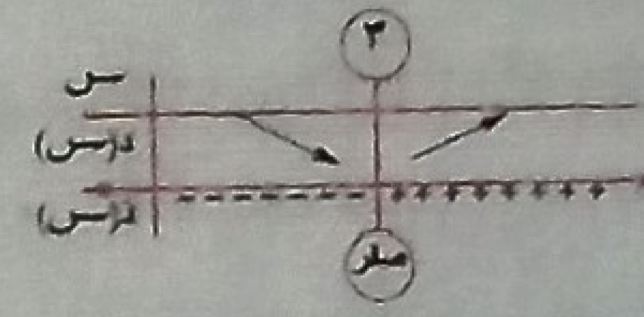
① ∵ ص = $س^{٢}$ − ٦ س + ٧

، $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س − ٦

∵ ص = $س^{٢}$ − ٦ س + ٧

، بوضع $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ ∴ س = ٣

∴ النقطة الحرجة هى : (٣ ، −٢)



∴ الدالة متناقصة فى]− ∞ ، ٣[

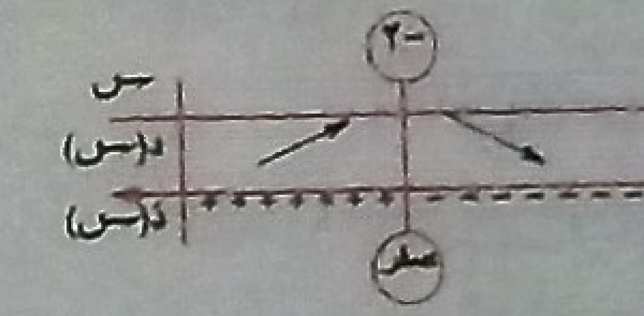
، متزايدة فى]٣ ، ∞[

② ∵ ص = ١ − ٤ س − $س^{٢}$

∴ المجال = ح ، $\frac{ءص}{ءس}$ = −٤ − ٢ س

، بوضع $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ ∴ س = −٢

∴ النقطة الحرجة هى : (−٢ ، ٥)



∴ الدالة متزايدة فى]− ∞ ، −٢[

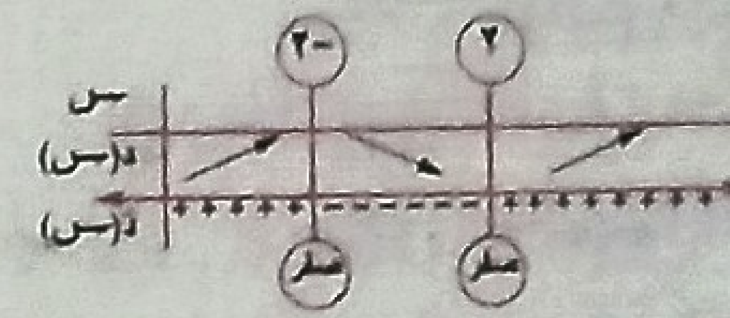
، متناقصة فى]−٢ ، ∞[

③ ∵ د (س) = $س^{٣}$ − ١٢ س + ٧

∴ المجال = ح ، دَ (س) = ٣ $س^{٢}$ − ١٢

، بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = ± ٢

∴ النقط الحرجة هى : (٢ ، −٩) ، (−٢ ، ٢٣)



∴ الدالة متزايدة فى كل من]− ∞ ، −٢[

،]٢ ، ∞[، متناقصة فى]−٢ ، ٢[

④ ∵ د (س) = $س^{٣}$ − ٦ $س^{٢}$ + ٥

∴ المجال = ح

، دَ (س) = ٣ $س^{٢}$ − ١٢ س

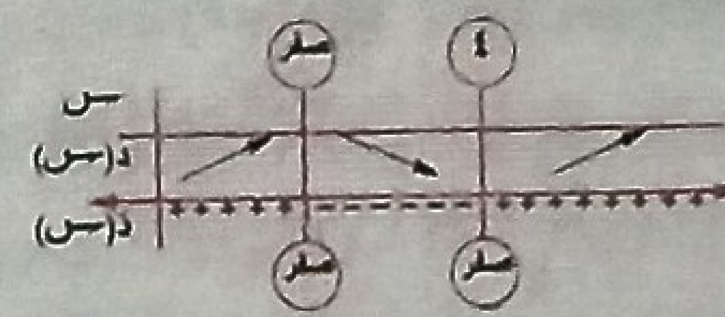
، بوضع دَ (س) = ٠

فإن : ٣ $س^{٢}$ − ١٢ س = ٠

∴ ٣ س (س − ٤) = ٠

∴ س = ٠ أ، ٤

∴ النقط الحرجة هى : (٠ ، ٥) ، (٤ ، −٢٧)



∴ الدالة متزايدة فى كل من]− ∞ ، ٠[

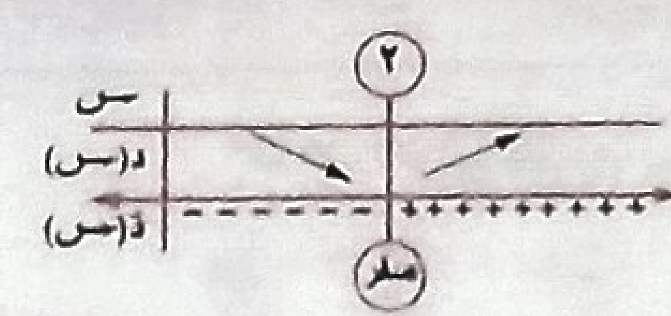
،]٤ ، ∞[، متناقصة فى]٠ ، ٤[

⑤ ∵ ص = $(س − ٢)^{٢}$ ∴ مجالها = ح

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ (س − ٢)

، بوضع $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ فإن : س = ٢

∴ النقطة الحرجة هى : (٢ ، ٠)



∴ الدالة متناقصة فى]− ∞ ، ٢[

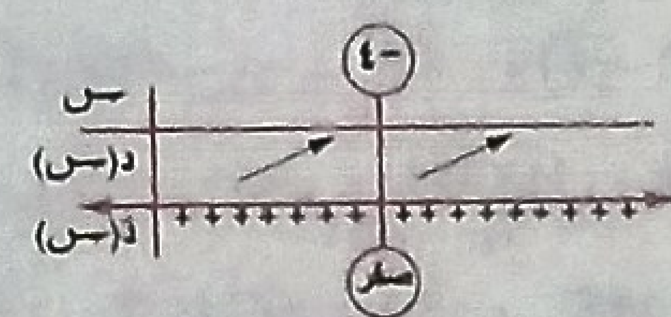
، متزايدة فى]٢ ، ∞[

⑥ ∵ د (س) = $(س + ٤)^{٣}$ ∴ المجال = ح

، دَ (س) = ٣ $(س + ٤)^{٢}$

، بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = −٤

∴ النقطة الحرجة هى : (−٤ ، ٠)



∴ الدالة متزايدة فى ح

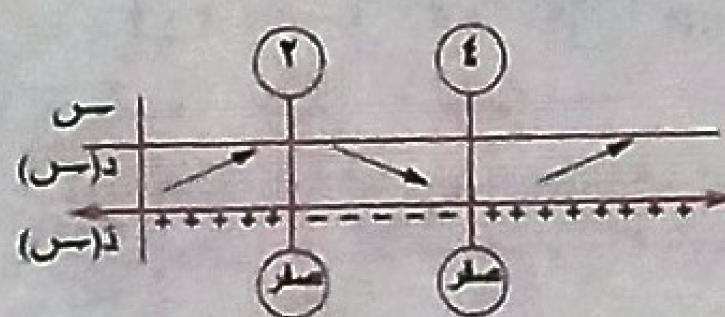
⑦ ∵ د (س) = $س^{٣}$ − ٩ $س^{٢}$ + ٢٤ س − ٤

∴ مجالها = ح

، دَ (س) = ٣ $س^{٢}$ − ١٨ س + ٢٤

، بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = ٤ أ، ٢

∴ النقط الحرجة : (٤ ، ١٢) ، (٢ ، ١٦)



∴ الدالة متزايدة فى كل من :]− ∞ ، ٢[

،]٤ ، ∞[، متناقصة فى]٢ ، ٤[

⑧ ∵ د (س) = ٩ س − $س^{٣}$ ∴ المجال = ح

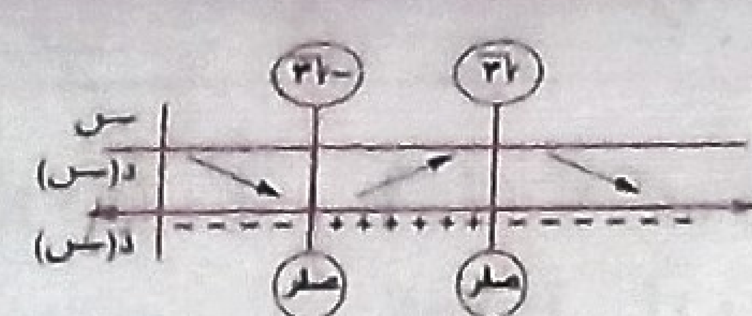
، دَ (س) = ٩ − ٣ $س^{٢}$

، بوضع دَ (س) = ٠ ∴ ٩ − ٣ $س^{٢}$ = ٠

∴ س = ± $\sqrt{٣}$ ∴ س = $\sqrt{٣}$ أ، − $\sqrt{٣}$

∴ النقط الحرجة هى :

($\sqrt{٣}$ ، ٦ $\sqrt{٣}$) ، (− $\sqrt{٣}$ ، −٦ $\sqrt{٣}$)



∴ الدالة تناقصية فى كل من :]− ∞ ، − $\sqrt{٣}$ [

،] $\sqrt{٣}$ ، ∞[، تزايدية فى]− $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٣}$ [

⑨ د (س) = س $(س − ٣)^{٢}$ ∴ مجالها = ح

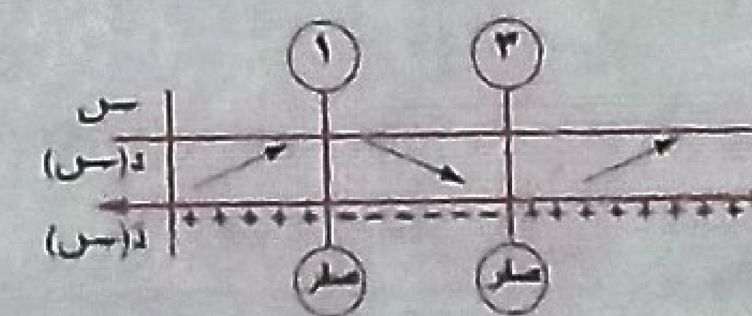
، د (س) = س ($س^{٢}$ − ٦ س + ٩)

= $س^{٣}$ − ٦ $س^{٢}$ + ٩ س

∴ دَ (س) = ٣ $س^{٢}$ − ١٢ س + ٩

، بوضع دَ (س) = ٠ فإن : س = ٣ أ، ١

∴ النقط الحرجة هى : (١ ، ٤) ، (٣ ، ٠)



∴ الدالة متزايدة فى كل من :]− ∞ ، ١[

،]٣ ، ∞[، متناقصة فى]١ ، ٣[

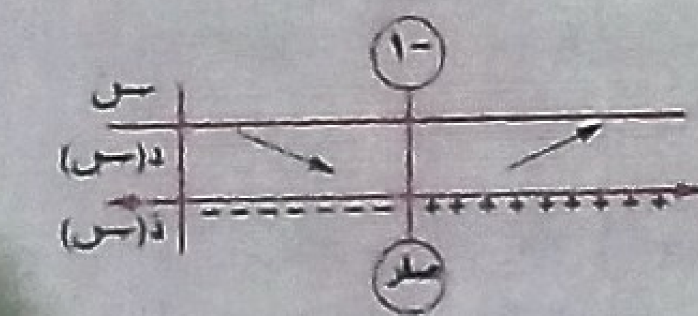
⑩ ∵ د (س) = $س^{٤}$ + ٤ س ∴ المجال = ح

، دَ (س) = ٤ $س^{٣}$ + ٤

، بوضع دَ (س) = ٠ ∴ ٤ $س^{٣}$ + ٤ = ٠

∴ س = −١

∴ النقطة الحرجة هى : (−١ ، −٣)



∴ الدالة متناقصة فى]− ∞ ، −١[

، متزايدة فى]−١ ، ∞[

⑪ د (س) = $س^{٤}$ − ٨ $س^{٢}$ + ١٦ ∴ المجال = ح

، دَ (س) = ٤ $س^{٣}$ − ١٦ س

، بوضع دَ (س) = ٠

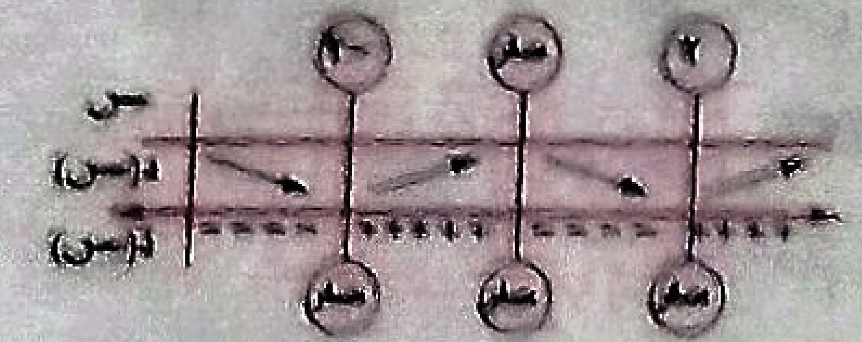
$\therefore$ $٤ س^{٣} - ١٦ س = ٠$

$\therefore$ $٤ س (س^{٢} - ٤) = ٠$

$\therefore$ س = ٠ أ، ٢ أ، -٢

$\therefore$ النقط الحرجة هى :

(٠ ، ١٦) ، (٢ ، ٠) ، (-٢ ، ٠)



$\therefore$ الدالة متناقصة فى كل من :

]- ∞ ، -٢[،]٠ ، ٢[

، متزايدة فى كل من :]-٢ ، ٠[،]٢ ، ∞[

⑫ $\because$ $د (س) = س^{٥} - ٥ س^{٤} + ١$

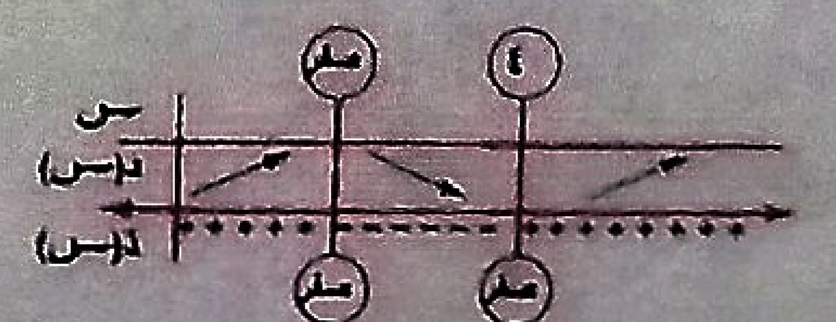
$\therefore$ المجال = ح ، $دَ (س) = ٥ س^{٤} - ٢٠ س^{٣}$

، بوضع دَ (س) = ٠

$\therefore$ $٥ س^{٤} - ٢٠ س^{٣} = ٠$

$\therefore$ $٥ س^{٣} (س - ٤) = ٠$ $\therefore$ س = ٠ أ، ٤

$\therefore$ النقط الحرجة هى : (٠ ، ١) ، (٤ ، -٢٥٥)



$\therefore$ الدالة متزايدة فى كل من :]- ∞ ، ٠[

،]٤ ، ∞[، متناقصة فى]٠ ، ٤[

⑬ $\because$ $د (س) = (س^{٢} - ٩)^{٢}$ $\therefore$ المجال = ح

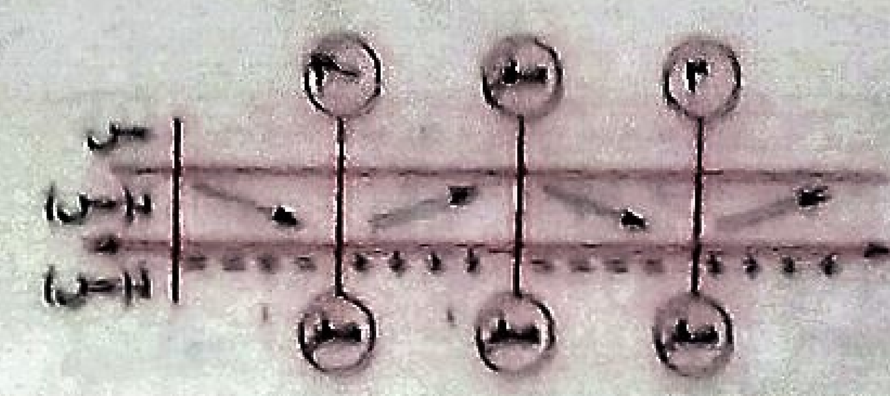
، $دَ (س) = ٢ (س^{٢} - ٩) \times ٢ س$

$= ٤ س (س^{٢} - ٩)$

، بوضع دَ (س) = ٠ $\therefore$ س = ٠ أ، ٣ أ، -٣

$\therefore$ النقط الحرجة هى :

(٠ ، ٨١) ، (٣ ، ٠) ، (-٣ ، ٠)



$\therefore$ الدالة متناقصة فى كل من :

]- ∞ ، -٣[،]٠ ، ٣[

، ومتزايدة فى كل من :]-٣ ، ٠[،]٣ ، ∞[

⑭ $\because$ $د (س) = س^{٣} (س - ١)^{٢}$ $\therefore$ المجال = ح

، $دَ (س) = ٣ س^{٢} (س - ١)^{٢} + ٢ (س^{٣}) (س - ١)$

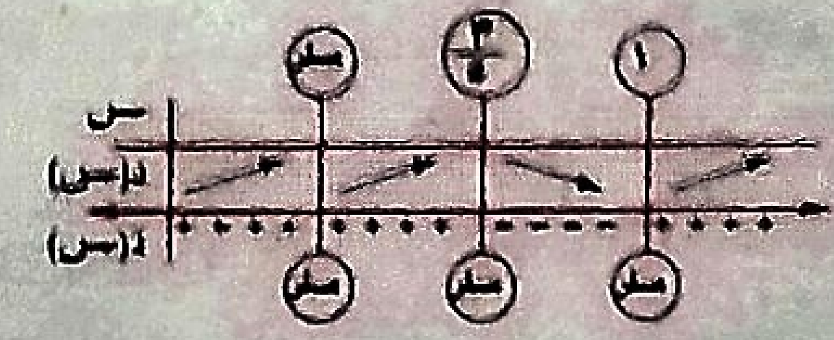
$= س^{٢} (س - ١) (٣ س - ٣ + ٢ س)$

$= س^{٢} (س - ١) (٥ س - ٣)$

، بوضع دَ (س) = ٠ فإن : س = ٠ أ، ١ أ، $\frac{٣}{٥}$

$\therefore$ النقط الحرجة هى : (٠ ، ٠) ، (١ ، ٠)

، $\left(\frac{٣}{٥} ، \frac{١٠٨}{٣١٢٥}\right)$



$\therefore$ الدالة متزايدة فى كل من :

]- ∞ ، $\frac{٣}{٥}$[،]١ ، ∞[

، متناقصة فى]$\frac{٣}{٥}$ ، ١[

⑮ $د (س) = (س + ٢) (س - ١)^{٢}$ $\therefore$ المجال = ح

، $دَ (س) = (س - ١)^{٢} + ٢ (س + ٢) (س - ١)$

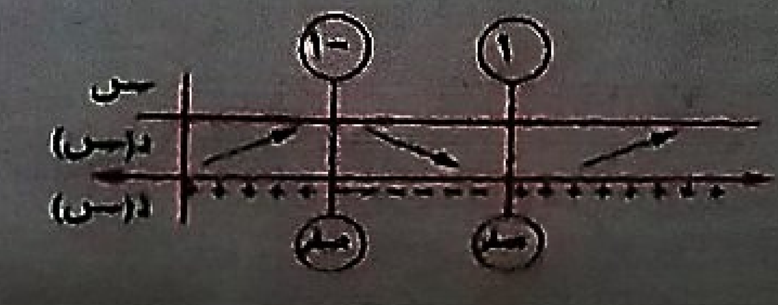
$= (س - ١) (س - ١ + ٢ س + ٤)$

$= (س - ١) (٣ س + ٣)$

، بوضع دَ (س) = ٠

فإن : س = ١ أ، -١

$\therefore$ النقط الحرجة هى : (١ ، ٠) ، (-١ ، ٤)



$\therefore$ الدالة متزايدة فى كل من :

]- ∞ ، -١[،]١ ، ∞[

، متناقصة فى]-١ ، ١[

⑯ $\because$ $د (س) = ٥ س^{٦} - ٦ س^{٥} + ١$

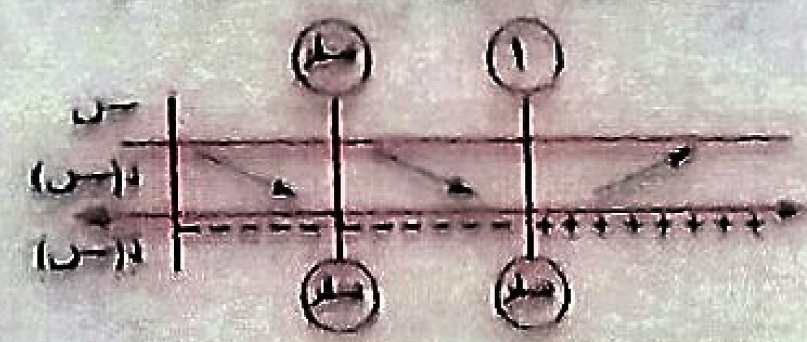
$\therefore$ المجال = ح

، $دَ (س) = ٣٠ س^{٥} - ٣٠ س^{٤}$

$= ٣٠ س^{٤} (س - ١)$

، بوضع دَ (س) = ٠ فإن : س = ٠ أ، ١

$\therefore$ النقط الحرجة هى : (٠ ، ١) ، (١ ، ٠)



$\therefore$ الدالة متناقصة فى]- ∞ ، ١[

، متزايدة فى]١ ، ∞[

⑰ $د (س) = س^{٤} + ٢ س^{٣} - ٣ س^{٢} - ٤ س$

$\therefore$ المجال = ح

، $دَ (س) = ٤ س^{٣} + ٦ س^{٢} - ٦ س - ٤$

، بوضع دَ (س) = ٠

فإن : $٤ (س^{٣} - ١) + ٦ س (س - ١) = ٠$

$\therefore$ $(س - ١) (٤ س^{٢} + ٤ س + ٤ + ٦ س) = ٠$

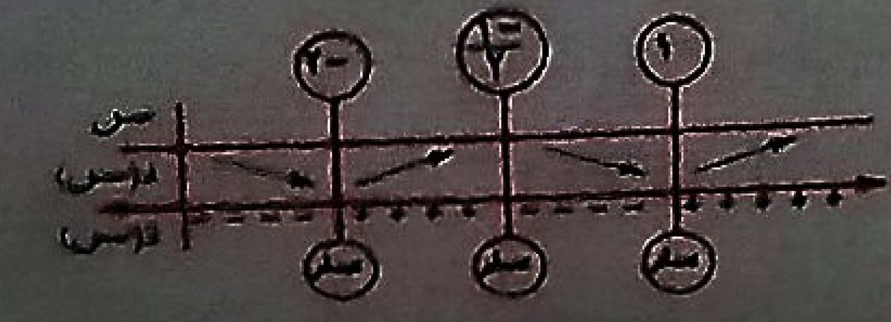
$\therefore$ $(س - ١) (٤ س^{٢} + ١٠ س + ٤) = ٠$

$\therefore$ $٢ (س - ١) (٢ س + ١) (س + ٢) = ٠$

$\therefore$ س = ١ أ، $-\frac{١}{٢}$ أ، -٢

$\therefore$ النقط الحرجة هى : (١ ، -٤) ، $\left(-\frac{١}{٢} ، \frac{١٧}{١٦}\right)$

، (-٢ ، -٤)



$\therefore$ الدالة متناقصة فى كل من :

]- ∞ ، -٢[،]$-\frac{١}{٢}$ ، ١[

، متزايدة فى كل من :]-٢ ، $-\frac{١}{٢}$[،]١ ، ∞[

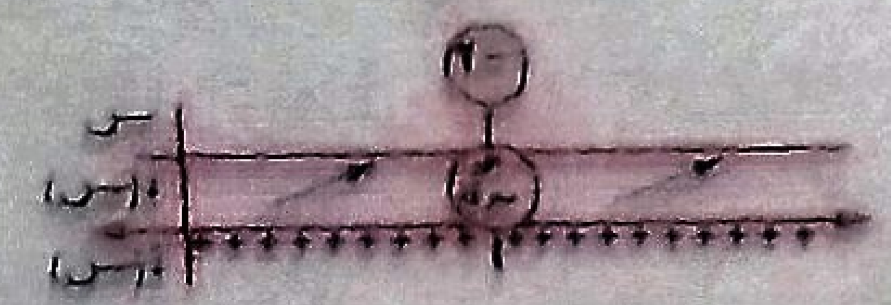
٣

① $د (س) = \frac{س}{س + ٢}$ $\therefore$ المجال = ح - {-٢}

، $دَ (س) = \frac{(س + ٢) (١) - س (١)}{(س + ٢)^{٢}} = \frac{٢}{(س + ٢)^{٢}}$

، $\because$ دَ (س) غير معرفة عند س = -٢ $\not\in$ للمجال

$\therefore$ لا توجد نقط حرجة



$\therefore$ الدالة متزايدة فى كل من :

]- ∞ ، -٢[،]-٢ ، ∞[

② $د (س) = \frac{س^{٢}}{س - ٢}$ $\therefore$ المجال = ح - {٢}

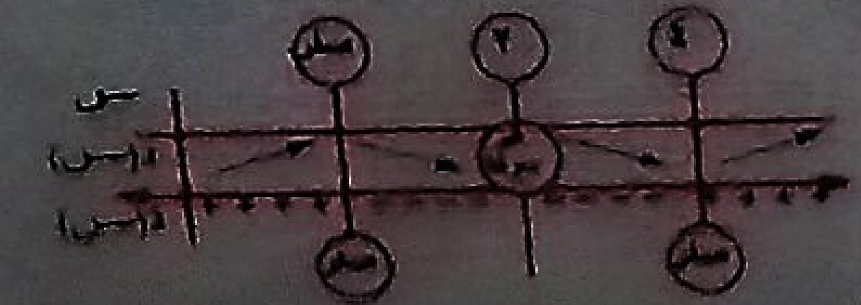
، $دَ (س) = \frac{(س - ٢) (٢ س) - (س^{٢}) (١)}{(س - ٢)^{٢}}$

$= \frac{س^{٢} - ٤ س}{(س - ٢)^{٢}}$

، بوضع دَ (س) = ٠ $\therefore$ س = ٠ أ، ٤

، دَ (س) غير معرفة عند س = ٢ $\not\in$ للمجال

$\therefore$ النقط الحرجة هى : (٠ ، ٠) ، (٤ ، ٨)



$\therefore$ الدالة متزايدة فى كل من :

]- ∞ ، ٠[،]٤ ، ∞[

ومتناقصة فى كل من :]٠ ، ٢[،]٢ ، ٤[

(٣) د(س) = $\frac{١}{س - ٣}$ ∴ المجال = ح − {٣}

، دَ(س) = $\frac{-١}{(س - ٣)^٢}$

، ∵ دَ(س) غير معرفة عند س = ٣ ∉ للمجال

∴ لا توجد نقط حرجة

∴ الدالة متناقصة فى كل من :
]−∞ ، ٣[،]٣ ، ∞[

(٤) د(س) = $\sqrt{٢س - ٣}$ ∴ المجال = [$\frac{٣}{٢}$ ، ∞[

، دَ(س) = $\frac{٢}{٢\sqrt{٢س - ٣}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢س - ٣}}$

، دَ(س) غير معرفة عند س = $\frac{٣}{٢}$

∴ النقطة ($\frac{٣}{٢}$ ، ٠) هى نقطة حرجة حدية

∴ الدالة متزايدة فى]$\frac{٣}{٢}$ ، ∞[

(٥) د(س) = $\sqrt{٤ - س}$ ∴ المجال =]−∞ ، ٤]

، دَ(س) = $\frac{-١}{٢\sqrt{٤ - س}}$

، ∵ دَ(س) غير معرفة عند س = ٤

∴ النقطة (٤ ، ٠) هى نقطة حرجة حدية

الدالة متناقصة فى]−∞ ، ٤[

(٦) د(س) = $\sqrt[٣]{س - ١}$ ∴ المجال = ح

، دَ(س) = $\frac{١}{٣\sqrt[٣]{(س - ١)^٢}}$

، ∵ دَ(س) غير معرفة عند س = ١

∴ النقطة الحرجة (١ ، ٠)

∴ الدالة متزايدة فى ح

(٧) د(س) = $\sqrt[٣]{٢ - س}$ ∴ المجال = ح

، دَ(س) = $\frac{-١}{٣\sqrt[٣]{(٢ - س)^٢}}$

، ∵ دَ(س) غير معرفة عند س = ٢

∴ النقطة الحرجة هى : (٢ ، ٠)

∴ الدالة متناقصة فى ح

(٨) ص = $\frac{١}{٢}$ س − $\sqrt[٣]{س}$ ∴ المجال = ح

، $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٣\sqrt[٣]{س^٢}}$ = $\frac{\sqrt[٣]{س^٢} - ١}{٣\sqrt[٣]{س^٢}}$

، بوضع $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ نجد $\sqrt[٣]{س^٢}$ = ١

∴ س = ١ أ، −١

، $\frac{ءص}{ءس}$ كمية غير معرفة عند س = ٠

∴ النقط الحرجة هى : (١ ، $\frac{-٢}{٢}$) ، (−١ ، $\frac{٢}{٢}$)
، (٠ ، ٠)

∴ الدالة متزايدة فى كل من :
]−∞ ، −١[،]١ ، ∞[

، متناقصة فى كل من :]−١ ، ٠[،]٠ ، ١[

(٩) د(س) = $س^{\frac{٢}{٣}}$ ∴ المجال = ح

، دَ(س) = $\frac{٢}{٣\sqrt[٣]{س}}$

، ∵ دَ(س) غير معرفة عند س = ٠

∴ النقطة الحرجة هى : (٠ ، ٠)

∴ الدالة متناقصة فى]−∞ ، ٠[

، ومتزايدة فى]٠ ، ∞[

(١٠) د(س) = $\sqrt[٣]{(س - ٢)^٢}$ ∴ المجال = ح

، دَ(س) = $\frac{٢}{٣\sqrt[٣]{س - ٢}}$

∴ دَ(س) غير معرفه عند س = ٢

∴ النقطة الحرجة (٢ ، ٠)

∴ الدالة متناقصة فى]−∞ ، ٢[

، متزايدة فى]٢ ، ∞[

(١١) د(س) = $\sqrt[٣]{(س^٢ - ١)^٢}$ ∴ المجال = ح

، دَ(س) = $\frac{٤س}{٣\sqrt[٣]{س^٢ - ١}}$

، دَ(س) = ٠ فإن س = ٠

، دَ(س) غير معرفة عند س = ١ أ، −١

∴ النقط الحرجة هى : (٠ ، ١) ، (١ ، ٠) ، (−١ ، ٠)

∴ الدالة متزايدة فى كل من :]−١ ، ٠[،]١ ، ∞[

، متناقصة فى كل من :]−∞ ، −١[،]٠ ، ١[

(١٢) د(س) = ٢ − ٣ $(س - ٢)^{\frac{٤}{٣}}$ ∴ المجال = ح

، دَ(س) = −٣ × $\frac{٤}{٣}$ $(س - ٢)^{\frac{١}{٣}}$ × ١

= −٤ $(س - ٢)^{\frac{١}{٣}}$

، بوضع دَ(س) = ٠ ∴ س = ٢

∴ النقطة الحرجة هى : (٢ ، ٢)

∴ الدالة متزايدة فى]−∞ ، ٢[

، متناقصة فى]٢ ، ∞[

(١٣) د(س) = ١ − $\frac{١}{س}$ = ١ − $س^{-١}$

∴ المجال = ح − {٠}

، دَ(س) = $س^{-٢}$ = $\frac{١}{س^٢}$

، دَ(س) غير معرفة عند $س^٢$ = ٠

∴ س = ٠ ∉ المجال

∴ لا توجد نقطة حرجة

∴ الدالة متزايدة فى كل من :
]−∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

(١٤) د(س) = س + $\frac{١}{س}$ ∴ المجال = ح − {٠}

، دَ(س) = ١ − $\frac{١}{س^٢}$ = $\frac{س^٢ - ١}{س^٢}$

، بوضع دَ(س) = ٠ فإن س = ١ أ، −١

، دَ(س) غير معرفة عند س = ٠ ∉ المجال

∴ النقط الحرجة : (١ ، ٢) ، (−١ ، −٢)

∴ الدالة متزايدة فى كل من :

]-∞ ، -١[،]١ ، ∞[

، متناقصة فى كل من]-١ ، ٠[،]٠ ، ١[

(١٥) د(س) = √س − ١/√س

∴ المجال =]٠ ، ∞[

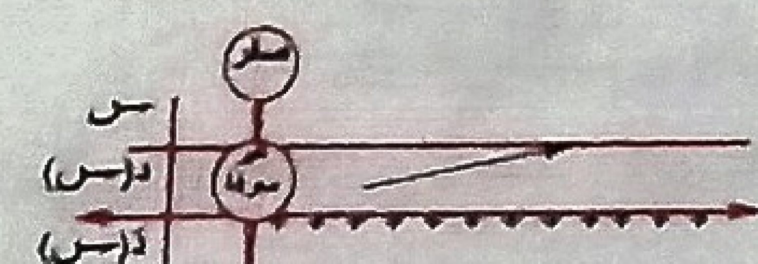
∴ دَ(س) = ½ س^(-½) + ½ س^(-٣/٢)

= ½ س^(-٣/٢) [س + ١] = (س + ١)/(٢ √س٣)

، بوضع دَ(س) = ٠ فإن س = -١ ∉ المجال

، ∵ دَ(س) غير معرفة عند س = ٠ ∉ المجال

∴ النقط الحرجة غير موجودة



∴ الدالة متزايدة فى]٠ ، ∞[

(١٦) د(س) = (س² + س − ٢)/(س² − ١)

= ((س + ٢)(س − ١))/((س + ١)(س − ١))

∴ المجال = ع − {١ ، -١}

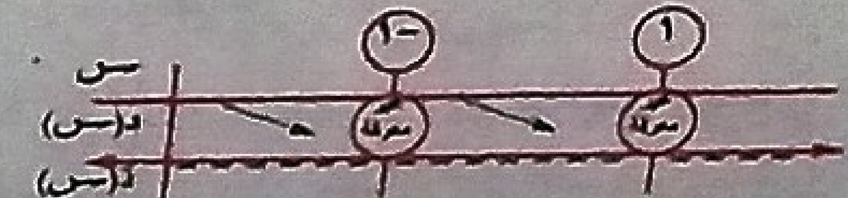
، د(س) = (س + ٢)/(س + ١)

∴ دَ(س) = ((س + ١)(١) − (س + ٢)(١))/(س + ١)²

= -١/(س + ١)²

، ∵ دَ(س) غير معرفة عند س = -١ ∉ المجال

∴ لا توجد نقط حرجة



∴ الدالة متناقصة فى كل من :

]-∞ ، -١[،]-١ ، ١[،]١ ، ∞[

(١٧) د(س) = س/(س² + ١)   ∴ المجال = ع

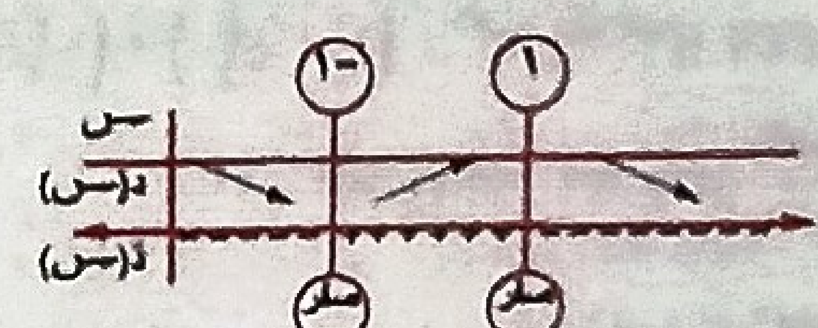
، دَ(س) = ((س² + ١)(١) − س(٢س))/(س² + ١)²

= (١ − س²)/(س² + ١)²

، بوضع دَ(س) = ٠

∴ س = ١ أ، -١

∴ النقط الحرجة هى (١ ، ½) ، (-١ ، -½)



∴ الدالة متناقصة فى كل من :

]-∞ ، -١[،]١ ، ١[،]١ ، ∞[

، الدالة متزايدة فى]-١ ، ١[

(١٨) د(س) = √(٩ − س²)

∴ المجال = [-٣ ، ٣]

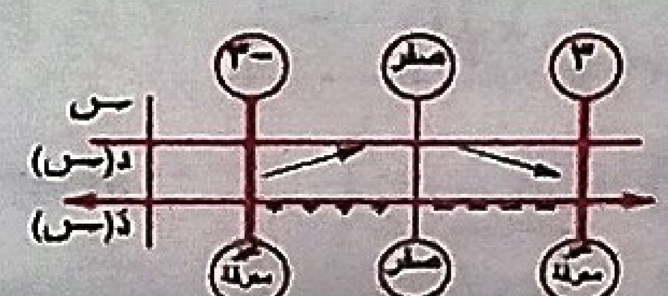
∴ دَ(س) = -س/√(٩ − س²) ، بوضع دَ(س) = ٠

∴ س = ٠

، دَ(س) غير معرفة عند س = ٣ أ، -٣

∴ النقطة (٠ ، ٣) هى نقطة حرجة

، النقط (٣ ، ٠) ، (-٣ ، ٠) هى نقط حرجة حدية



∴ الدالة متزايدة فى]-٣ ، ٠[

ومتناقصة فى]٠ ، ٣[

(١٩) د(س) = √(س² − ٤س + ٣)

∴ المجال = ع −]١ ، ٣[

، دَ(س) = (س − ٢)/√(س² − ٤س + ٣)

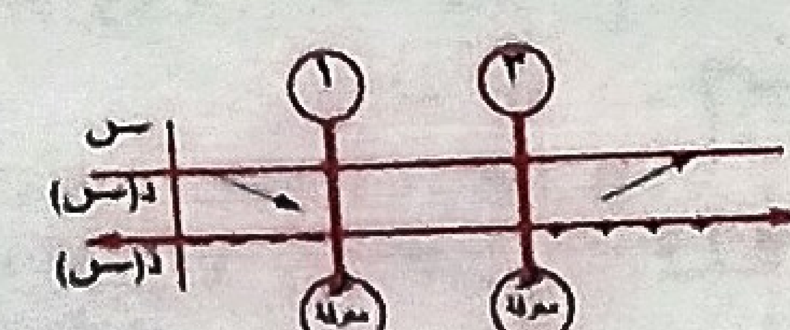
، بوضع دَ(س) = ٠   ∴ س = ٢ ∉ المجال

، ∵ دَ(س) غير معرفة عند س² − ٤س + ٣ = ٠

∴ (س − ٣)(س − ١) = ٠

س = ٣ أ، ١

∴ النقط (٣ ، ٠) ، (١ ، ٠) هى نقط حرجة حدية



∴ الدالة متناقصة فى]-∞ ، ١[

، ومتزايدة فى]٣ ، ∞[

(٢٠) د(س) = |س − ٣| + ٢

∴ المجال = ع

، د(س) = { س − ٣ + ٢ ، س ≥ ٣ ؛ -س + ٣ + ٢ ، س < ٣ }

= { س − ١ ، س ≥ ٣ ؛ -س + ٥ ، س < ٣ }

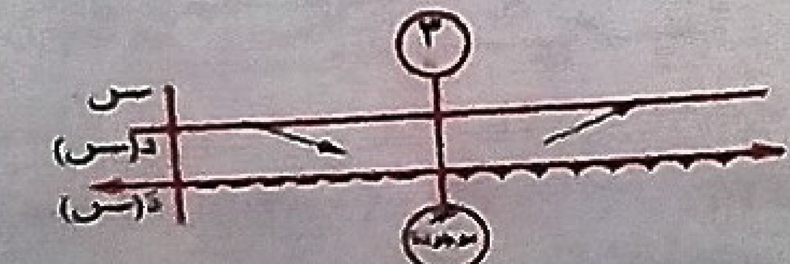
∴ دَ(س) = { ١ ، س > ٣ ؛ -١ ، س < ٣ }

، ∵ دَ(٣⁺) ≠ دَ(٣⁻)

∴ دَ(س) = { ١ ، س > ٣ ؛ غير موجودة ، س = ٣ ؛ -١ ، س < ٣ }

دَ(س) غير موجودة عند س = ٣

∴ النقطة الحرجة هى (٣ ، ٢)



الدالة متناقصة فى]-∞ ، ٣[

(٢١) د(س) = ٣ − |س − ٢| ∴ المجال = ع

، د(س) = { ٣ − (س − ٢) ، س ≥ ٢ ؛ ٣ + (س − ٢) ، س < ٢ }

∴ د(س) = { -س + ٥ ، س ≥ ٢ ؛ س + ١ ، س < ٢ }

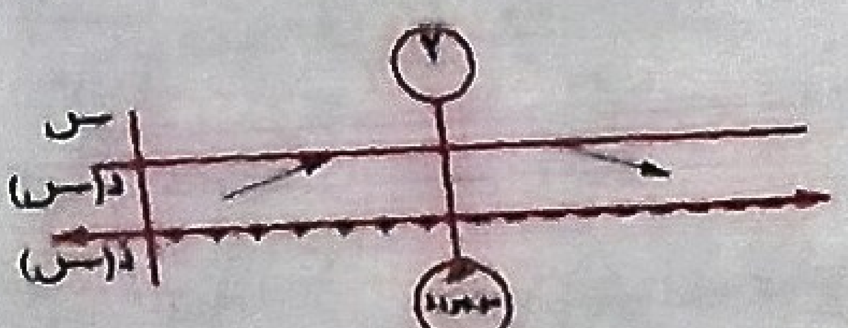
، دَ(س) = { -١ ، س > ٢ ؛ ١ ، س < ٢ }

، دَ(٢⁺) ≠ دَ(٢⁻)

∴ دَ(س) = { -١ ، س > ٢ ؛ غير معرفة ، س = ٢ ؛ ١ ، س < ٢ }

∴ دَ(س) غير موجودة عند س = ٢

∴ النقطة الحرجة هى (٢ ، ٣)



∴ الدالة متزايدة فى]-∞ ، ٢[

، متناقصة فى]٢ ، ∞[

(٢٢) د(س) = ٢ − √(س² − ٦س + ٩)

∴ المجال = ع

، د(س) = ٢ − |س − ٣|

∴ د(س) = { ٢ − (س − ٣) ، س ≥ ٣ ؛ ٢ + (س − ٣) ، س < ٣ }

∴ د(س) = { -س + ٥ ، س ≥ ٣ ؛ س − ١ ، س < ٣ }

∴ دَ(س) = { -١ ، س > ٣ ؛ ١ ، س < ٣ }

، ∵ دَ(٣⁺) ≠ دَ(٣⁻)

∴ دَ(س) = { -١ ، س > ٣ ؛ غير موجودة ...

، ∵ $د'(س)$ غير موجودة عند س = ٣

∴ النقطة الحرجة هي (٣ ، ٢)

∴ الدالة متزايدة في]-∞ ، ٣[

، متناقصة في]٣ ، ∞[

(٢٣) د (س) = س |س| ∴ المجال = ح

∴ د (س) = $\begin{cases} س^{٢} & ، س \geq ٠ \\ -س^{٢} & ، س < ٠ \end{cases}$

∴ $د'(س)$ = $\begin{cases} ٢س & ، س > ٠ \\ -٢س & ، س < ٠ \end{cases}$

، ∵ $د'(٠^{-}) = د'(٠^{+}) = ٠$ فإن :

$د'(س)$ = $\begin{cases} ٢س & ، س > ٠ \\ صفر & ، س = ٠ \\ -٢س & ، س < ٠ \end{cases}$

∴ النقطة الحرجة هي (٠ ، ٠)

∴ الدالة متزايدة في ح

(٢٤) د (س) = $س^{٢}$ |س|

∴ المجال = ح

∴ د (س) = $\begin{cases} س^{٣} & ، س > ٠ \\ ٠ & ، س = ٠ \\ -س^{٣} & ، س < ٠ \end{cases}$

∴ $د'(س)$ = $\begin{cases} ٣س^{٢} & ، س > ٠ \\ -٣س^{٢} & ، س < ٠ \end{cases}$

، ∵ $د'(٠^{-}) = د'(٠^{+}) = ٠$

فإن : $د'(س)$ = $\begin{cases} ٣س^{٢} & ، س > ٠ \\ ٠ & ، س = ٠ \\ -٣س^{٢} & ، س < ٠ \end{cases}$

∴ النقطة الحرجة هي (٠ ، ٠)

∴ الدالة متناقصة في]-∞ ، ٠[

، ومتزايدة في]٠ ، ∞[

(٢٥) د (س) = س |س - ٢|

∴ المجال = ح

∴ د (س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٢س & ، س > ٢ \\ ٠ & ، س = ٢ \\ -س^{٢} + ٢س & ، س < ٢ \end{cases}$

∴ $د'(س)$ = $\begin{cases} ٢س - ٢ & ، س > ٢ \\ -٢س + ٢ & ، س < ٢ \end{cases}$

، ∵ $د'(٢^{-}) \neq د'(٢^{+})$

∴ $د'(س)$ = $\begin{cases} ٢س - ٢ & ، س > ٢ \\ غير\ موجودة & ، س = ٢ \\ -٢س + ٢ & ، س < ٢ \end{cases}$

وبوضع $د'(س)$ = ٠ عند س > ٢

∴ س = ١ (مرفوض)

وبوضع $د'(س)$ = ٠ عند س < ٢

∴ س = ١

، ∵ $د'(س)$ غير موجودة عند س = ٢

∴ النقطة الحرجة هي (١ ، ١) ، (٢ ، ٠)

∴ الدالة متزايدة في كل من :]-∞ ، ١[،]٢ ، ∞[

، متناقصة في]١ ، ٢[

(٢٦) د (س) = $\frac{\sqrt{س - ١}}{س}$ ∴ المجال = [١ ، ∞[

، $د'(س)$ = $\frac{س \times \frac{١}{٢\sqrt{س - ١}} - \sqrt{س - ١}}{س^{٢}}$

= $\frac{س - ٢س + ٢}{٢س^{٢}\sqrt{س - ١}}$

= $\frac{٢ - س}{٢س^{٢}\sqrt{س - ١}}$

، $د'(س)$ = ٠ ∴ س = ٢

، $د'(س)$ غير معرفة عند س = ٠ ∉ المجال

أ، عند س = ١

∴ النقطة $(٢ ، \frac{١}{٢})$ هي نقطة حرجة

، النقطة (١ ، ٠) هي نقطة حرجة حدية

∴ الدالة متزايدة في]١ ، ٢[

، متناقصة في]٢ ، ∞[

(٢٧) د (س) = $|س^{٢} - ٥س + ٦|$

∴ د (س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٥س + ٦ & ، س < ٢ \\ -س^{٢} + ٥س - ٦ & ، ٢ \leq س \leq ٣ \\ س^{٢} - ٥س + ٦ & ، س > ٣ \end{cases}$

، ∵ $د'(٢^{-}) \neq د'(٢^{+})$ ، $د'(٣^{-}) \neq د'(٣^{+})$

$د'(س)$ = $\begin{cases} ٢س - ٥ & ، س < ٢ \\ غير\ موجودة & ، س = ٢ \\ -٢س + ٥ & ، ٢ < س < ٣ \\ غير\ موجودة & ، س = ٣ \\ ٢س - ٥ & ، س > ٣ \end{cases}$

، بوضع $د'(س)$ = ٠ ∴ س = $\frac{٥}{٢}$

∴ النقط الحرجة هي :

(٢ ، ٠) ، (٣ ، ٠) ، $(\frac{٥}{٢} ، \frac{١}{٤})$

∴ الدالة متناقصة في كل من :

]-∞ ، ٢[،]$\frac{٥}{٢}$ ، ٣[

، متزايدة في كل من :]٢ ، $\frac{٥}{٢}$[،]٣ ، ∞[

(٢٨) د (س) = $س^{٢}\sqrt{٧ - س^{٢}}$

∴ المجال = [$-\sqrt{٧}$ ، $\sqrt{٧}$]

∴ $د'(س)$ = $٢س\sqrt{٧ - س^{٢}} + \frac{س^{٢} \times -٢س}{٢\sqrt{٧ - س^{٢}}}$

= $\frac{٢س(٧ - س^{٢}) - س^{٣}}{\sqrt{٧ - س^{٢}}}$

= $\frac{١٤س - ٣س^{٣}}{\sqrt{٧ - س^{٢}}}$

، بوضع $د'(س)$ = ٠ ∴ س = ٠

أ، $س^{٢} = \frac{١٤}{٣}$ ∴ س = $\pm\sqrt{\frac{١٤}{٣}}$

، $د'(س)$ غير معرفة عند س = $\pm\sqrt{٧}$

∴ النقط الحرجة هي :

$(\frac{\sqrt{٤٢}}{٣} ، \frac{١٤\sqrt{٢١}}{٩})$ ، $(\frac{-\sqrt{٤٢}}{٣} ، \frac{١٤\sqrt{٢١}}{٩})$

، النقطتين $(\sqrt{٧} ، ٠)$ ، $(-\sqrt{٧} ، ٠)$ هي نقط حرجة حدية

∴ الدالة متزايدة في كل من

]$-\sqrt{٧}$ ، $\frac{-\sqrt{٤٢}}{٣}$[،]٠ ، $\frac{\sqrt{٤٢}}{٣}$[

، متناقصة في كل من

]$\frac{-\sqrt{٤٢}}{٣}$ ، ٠[،]$\frac{\sqrt{٤٢}}{٣}$ ، $\sqrt{٧}$[

٤

① د (س) = ١ − جا س

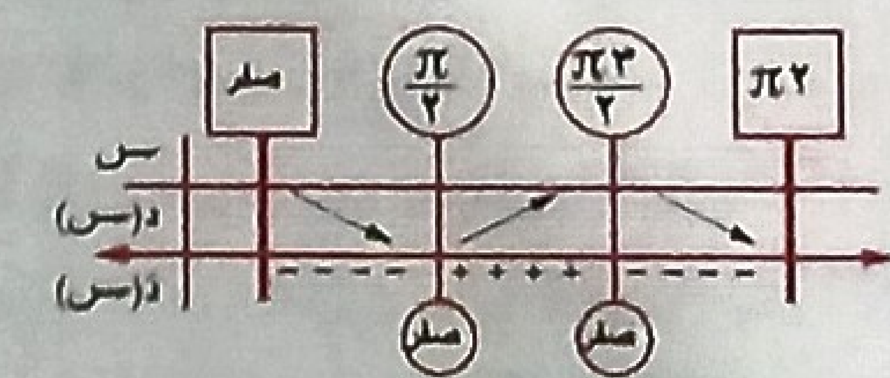
، ∵ المجال =]٠ ، ٢π[

، د̄ (س) = − جتا س

، بوضع د̄ (س) = ٠ ∴ جتا س = ٠

منها س = $\frac{\pi}{٢}$ أ، $\frac{٣\pi}{٢}$

∴ النقط الحرجة هى : ($\frac{\pi}{٢}$ ، ٠) ، ($\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٢)



∴ الدالة متناقصة فى كل من :

]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[،]$\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٢π[

، متزايدة فى]$\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$[

② د (س) = س + ٢ جا س

∵ المجال =]٠ ، ٢π[

، د̄ (س) = ١ + ٢ جتا س

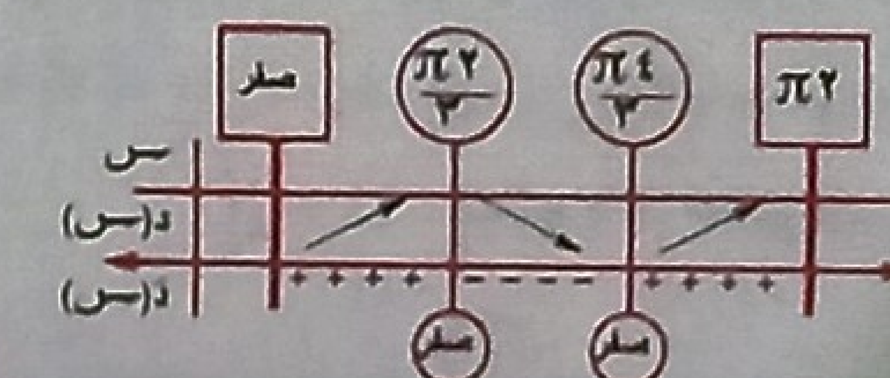
، بوضع د̄ (س) = ٠ نجد أن ١ + ٢ جتا س = ٠

منها جتا س = $-\frac{١}{٢}$

∴ س = $\frac{٢\pi}{٣}$ أ، $\frac{٤\pi}{٣}$

∴ النقط الحرجة هى :

($\frac{٢\pi}{٣}$ ، ٣,٨٣) ، ($\frac{٤\pi}{٣}$ ، ٢,٤٦)



∴ الدالة متزايدة فى كل من :

]٠ ، $\frac{٢\pi}{٣}$[،]$\frac{٤\pi}{٣}$ ، ٢π[

، متناقصة فى]$\frac{٢\pi}{٣}$ ، $\frac{٤\pi}{٣}$[

③ د (س) = س − ٢ جتا س ، المجال]٠ ، ٢π[

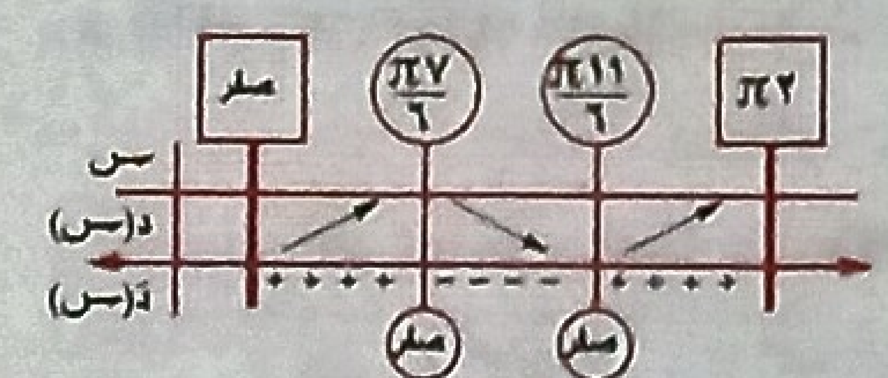
∴ د̄ (س) = ١ + ٢ جا س

، بوضع د̄ (س) = ٠ ∴ جا س = $-\frac{١}{٢}$

∴ س = $\frac{٧\pi}{٦}$ أ، $\frac{١١\pi}{٦}$

∴ النقط الحرجة هى : ($\frac{٧\pi}{٦}$ ، $\frac{٧\pi}{٦}$ + $\sqrt{٣}$)

، ($\frac{١١\pi}{٦}$ ، $\frac{١١\pi}{٦}$ − $\sqrt{٣}$)



∴ الدالة متزايدة فى كل من :

]٠ ، $\frac{٧\pi}{٦}$[،]$\frac{١١\pi}{٦}$ ، ٢π[

، متناقصة فى]$\frac{٧\pi}{٦}$ ، $\frac{١١\pi}{٦}$[

④ د (س) = جا ٢ س ، المجال]٠ ، π[

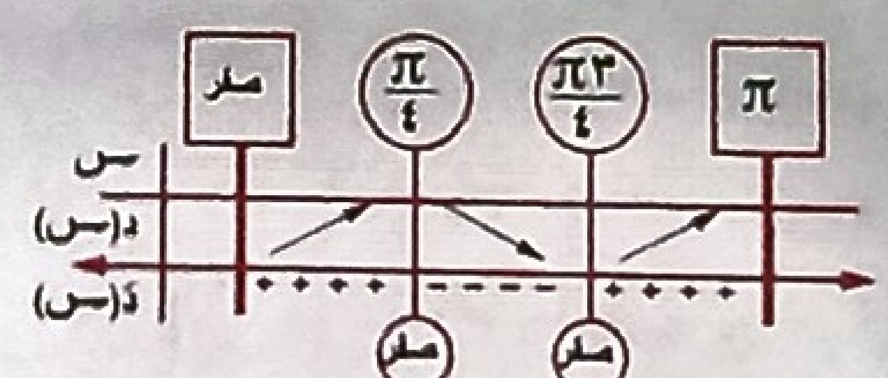
∴ د̄ (س) = ٢ جتا ٢ س

، بوضع د̄ (س) = ٠ ∴ جتا ٢ س = ٠

أى أن : ٢ س = $\frac{\pi}{٢}$ ∴ س = $\frac{\pi}{٤}$

أ، ٢ س = $\frac{٣\pi}{٢}$ ∴ س = $\frac{٣\pi}{٤}$

∴ النقط الحرجة هى : ($\frac{\pi}{٤}$ ، ١) ، ($\frac{٣\pi}{٤}$ ، −١)



∴ الدالة متزايدة فى كل من :

]٠ ، $\frac{\pi}{٤}$[،]$\frac{٣\pi}{٤}$ ، π[

، متناقصة فى :]$\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٣\pi}{٤}$[

⑤ د (س) = جا س + جا² س ، المجال]٠ ، ٢π[

∴ د̄ (س) = جتا س + ٢ جا س جتا س

، بوضع د̄ (س) = ٠

∴ جتا س (١ + ٢ جا س) = ٠

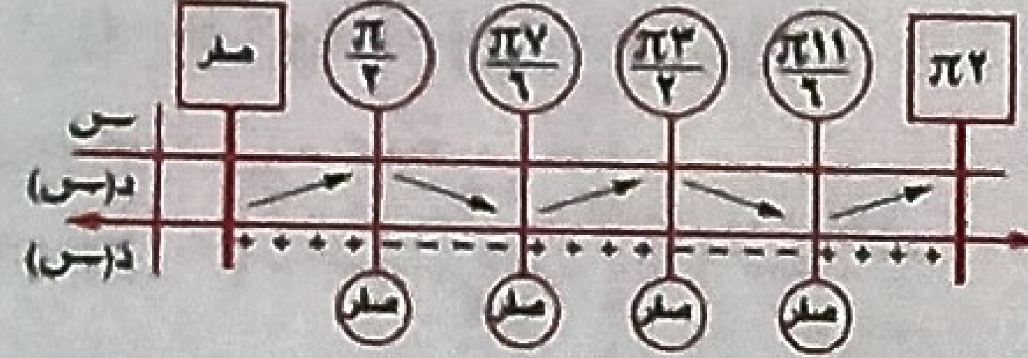
∴ جتا س = ٠ ∴ س = $\frac{\pi}{٢}$ أ، $\frac{٣\pi}{٢}$

أ، (١ + ٢ جا س) = ٠ ∴ جا س = $-\frac{١}{٢}$

∴ س = $\frac{٧\pi}{٦}$ أ، $\frac{١١\pi}{٦}$

∴ النقط الحرجة هى : ($\frac{\pi}{٢}$ ، ٢) ، ($\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٠)

، ($\frac{٧\pi}{٦}$ ، $-\frac{١}{٤}$) ، ($\frac{١١\pi}{٦}$ ، $-\frac{١}{٤}$)



∴ الدالة متزايدة فى كل من :

]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[،]$\frac{٧\pi}{٦}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$[،]$\frac{١١\pi}{٦}$ ، ٢π[

، متناقصة فى]$\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٧\pi}{٦}$[،]$\frac{٣\pi}{٢}$ ، $\frac{١١\pi}{٦}$[

⑥ د (س) = ٤ س − ظا س ، المجال]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

∴ د̄ (س) = ٤ − قا² س = $\frac{٤ \text{ جتا}^٢ \text{ س} - ١}{\text{جتا}^٢ \text{ س}}$

، بوضع د̄ (س) = ٠ ، ٤ جتا² س − ١ = ٠

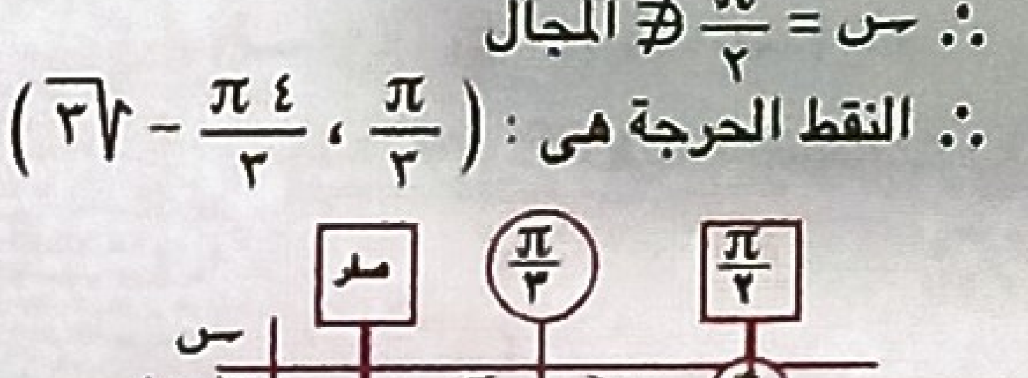
∴ جتا س = $\frac{١}{٢}$ ∴ س = $\frac{\pi}{٣}$

أ، جتا س = $-\frac{١}{٢}$ ∴ س = $\frac{٢\pi}{٣}$ ∉ المجال

، د̄ (س) غير معرفة عند جتا² س = ٠

∴ س = $\frac{\pi}{٢}$ ∉ المجال

∴ النقط الحرجة هى : ($\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{٤\pi}{٣}$ − $\sqrt{٣}$)



∴ الدالة متزايدة فى]٠ ، $\frac{\pi}{٣}$[

، متناقصة فى]$\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{\pi}{٢}$[

٥

① (أ)	② (د)	③ (د)
④ (ب)	⑤ (ب)	⑥ (أ)
⑦ (أ)	⑧ (جـ)	⑨ (أ)
⑩ (جـ)	⑪ (جـ)	

٦

∵ د (س) = ظا س − س

∴ د̄ (س) = قا² س − ١ = ظا² س

∵ لكل س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٤}$[فإن : ظا س > ٠

∴ لكل س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٤}$[فإن : د̄ (س) > ٠

∴ د (س) متزايدة على الفترة]٠ ، $\frac{\pi}{٤}$[

٧

ع (س) = د (س) − ر (س) لكل س ∈ ح

بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ ع̄ (س) = د̄ (س) − ر̄ (س)

، ∵ د̄ (س) < ر̄ (س) لكل س ∈ ح

د̄ (س) − ر̄ (س) < ٠

∴ ع̄ (س) < ٠ لكل س ∈ ح

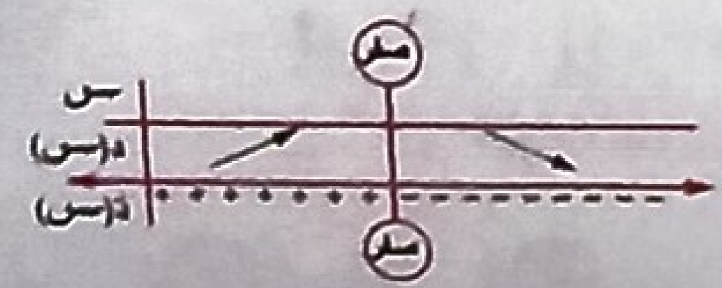
∴ الدالة ع متناقصة لكل س ∈ ح

٨

① د (س) = س − هـ^س ∴ د̄ (س) = ١ − هـ^س

، بوضع د̄ (س) = ٠ ∴ ١ − هـ^س = ٠

∴ هـ^س = ١ ∴ س = صفر



∴ الدالة متزايدة فى]−∞ ، ٠[

، ومتناقصة فى]٠ ، ∞[

② د(س) = ٥ - ٢ هـ^{٢س}
∴ دَ(س) = -٤ هـ^{٢س} ، دَ(س) = ٠
∴ -٤ هـ^{٢س} = ٠ ليس لها حل
∴ دَ(س) < ٠ لجميع قيم س
∴ الدالة متناقصة على ح

③ د(س) = س + لو_هـ س
، المجال]٠ ، ∞[
، دَ(س) = ١ + $\frac{١}{س}$
∴ لكل س > ٠ فإن: دَ(س) > ٠
∴ د(س) متزايدة على]٠ ، ∞[

④ د(س) = ٢ س - لو_هـ س
، المجال]٠ ، ∞[، دَ(س) = ٢ - $\frac{١}{س}$
∴ دَ(س) = $\frac{٢ س - ١}{س}$
، دَ(س) = ٠ ∴ س = $\frac{١}{٢}$
، دَ(س) غير معرفة عند س = ٠ ∉ المجال

∴ الدالة متناقصة في]٠ ، $\frac{١}{٢}$[
، متزايدة في]$\frac{١}{٢}$ ، ∞[

⑤ د(س) = ٣ - لو_هـ س²
∴ المجال = ح - {٠}
∴ دَ(س) = $\frac{-٢ س}{س^٢}$ = $\frac{-٢}{س}$
، دَ(س) غير معرفة عند س = ٠ ∉ المجال

∴ الدالة متزايدة في]-∞ ، ٠[
، متناقصة في]٠ ، ∞[

⑥ ر(س) = ٢ لو_هـ س - س²
∴ المجال =]٠ ، ∞[
، رَ(س) = $\frac{٢}{س}$ - ٢ س = $\frac{٢ - ٢ س^٢}{س}$
، بوضع رَ(س) = ٠ منها ٢ - ٢ س² = ٠
∴ س = ١ أ، -١ ∉ المجال
، رَ(س) غير معرفة عند س = ٠ ∉ المجال

∴ الدالة متزايدة في]٠ ، ١[
، متناقصة في]١ ، ∞[

٩

① د(س) = { س² + ٢ ، س ≤ ١ ؛ ٢ س + ١ ، س > ١ }
، ∵ د(١⁻) = د(١⁺) = د(١) ، دَ(١⁻) = دَ(١⁺)
فإن: دَ(س) = { ٢ س ، س < ١ ؛ ٢ ، س = ١ ؛ ٢ ، س > ١ }
، بوضع دَ(س) = ٠ عند س < ١
فإن: ٢ س = ٠ ∴ س = ٠
، عند س ≥ ١ فإن: دَ(س) ≠ ٠

∴ النقطة الحرجة هي (٠ ، ٢)
∴ الدالة متناقصة في]-∞ ، ٠[
، متزايدة في]٠ ، ∞[

② د(س) = { ٧ - ٢ س ، س < ٣ ؛ ٣ س - ٨ ، س ≥ ٣ }
، ∵ د(٣⁺) = د(٣⁻) = د(٣)
، دَ(٣⁺) ≠ دَ(٣⁻)
∴ دَ(س) = { -٢ ، س < ٣ ؛ غير موجودة ، س = ٣ ؛ ٣ ، س > ٣ }
∴ النقطة الحرجة هي (٣ ، ١)

∴ الدالة متناقصة في]-∞ ، ٣[
، متزايدة في]٣ ، ∞[

③ د(س) = { ٣ - ٤ س - س² ، س ≤ ١ ؛ ٢ س - ٤ ، س > ١ }
، ∵ د(١⁺) = د(١⁻) = د(١)
، دَ(١⁻) ≠ دَ(١⁺)
∴ دَ(س) = { -٤ - ٢ س ، س < ١ ؛ غير موجودة ، س = ١ ؛ ٢ ، س > ١ }
، بوضع دَ(س) = ٠ نجد س = -٢

∴ النقطة الحرجة هي (-٢ ، ٧) (١ ، -٢)
∴ الدالة متزايدة في كل من:
]-∞ ، -٢[،]١ ، ∞[
، متناقصة في]-٢ ، ١[

④ د(س) = { ٢ س + ١ ، س ≤ ١ ؛ ٥ - س² ، س > ١ }
، ∵ د(١⁺) = د(١⁻) = د(١)
، دَ(١⁻) ≠ دَ(١⁺)
∴ دَ(س) = { ٢ ، س < ١ ؛ غير موجودة ، س = ١ ؛ -٢ س ، س > ١ }
، بوضع دَ(س) = ٠ -٢ س = ٠
س = ٠ (مرفوضة) ∴ النقط الحرجة (١ ، ٤)

الدالة متزايدة في]-∞ ، ١[، متناقصة في]١ ، ∞[

⑤ د(س) = { ٣ س + ٥ ، س < -١ ؛ س² + ١ ، -١ ≤ س < ٢ ؛ ٩ - س² ، س ≥ ٢ }
∵ د(-١⁺) = د(-١⁻) = د(-١)
، د(٢⁺) = د(٢⁻) = د(٢)
، ∵ دَ(-١⁻) ≠ دَ(-١⁺) ، دَ(٢⁻) ≠ دَ(٢⁺)
دَ(س) = { ٣ ، س < -١ ؛ غير موجودة ، س = -١ ؛ ٢ س ، -١ < س < ٢ ؛ غير موجودة ، س = ٢ ؛ -٢ س ، س > ٢ }
، بوضع دَ(س) = ٠
∴ ٢ س = ٠ ، منها س = ٠
∴ النقطة الحرجة هي: (٠ ، ١)

∴ الدالة متزايدة في]-∞ ، -١[،]٠ ، ٢[
، متناقصة في]-١ ، ٠[،]٢ ، ∞[

١٠

د(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ء

∵ المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٠)   ∴ ء = ٠

، د′(س) = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س + جـ

، ∵ عند س = ١ توجد نقطة حرجة [د′(١) = ٠]

∴ ٣ أ + ٢ ب + جـ = ٠   (١)

، المستقيم ٩ س + ص = ٢٠

يمس المنحنى عند النقطة (٢ ، د(٢))

∴ د′(٢) = −٩

∴ ١٢ أ + ٤ ب + جـ = −٩   (٢)

، د(٢) = −٩ × ٢ + ٢٠ = ٢

∴ ٨ أ + ٤ ب + ٢ جـ = ٢

أى أن : ٤ أ + ٢ ب + جـ = ١   (٣)

من (١) ، (٣) : ∴ أ = ١

، من (١) : ٢ ب + جـ = −٣

من (٢) : ٤ ب + جـ = −٢١   ∴ ب = −٩ ، جـ = ١٥

١١

① د(س) =
- ٣ − (س − ٢)^{٢} ، −٤ ≤ س ≤ ٢
- ٣ ، ٢ < س < ٤
- ٧ − س ، ٤ ≤ س ≤ ٨

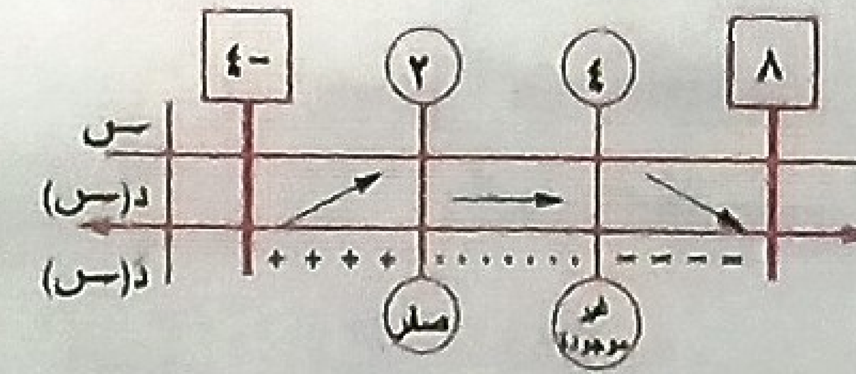
∵ د(٢$^{+}$) = د(٢$^{-}$) = د(٢)

، د(٤$^{+}$) = د(٤$^{-}$) = د(٤)

، د′(٢$^{-}$) = د′(٢$^{+}$) ، د′(٤$^{-}$) ≠ د′(٤$^{+}$)

د′(س) =
- −٢ (س − ٢) ، −٤ ≤ س < ٢
- ٠ ، س = ٢
- ٠ ، ٢ < س < ٤
- غير موجودة ، س = ٤
- −١ ، ٤ < س ≤ ٨

، بوضع د′(س) = ٠   ∴ س ∈]٢ ، ٤[



∴ الدالة متزايدة فى]-٤ ، ٢[

، متناقصة فى]٤ ، ٨[

② د(س) =
- ٢ س − س^{٢} ، س ≤ ١
- ١ ، ١ < س ≤ ٤
- س^{٢} − ٨ س + ١٧ ، س > ٤

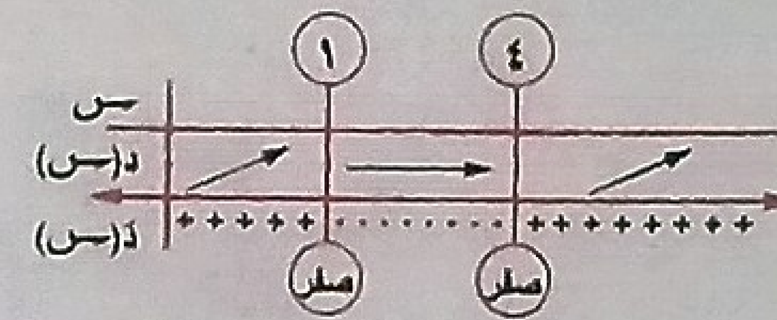
∵ د(١$^{+}$) = د(١$^{-}$) = د(١)

، د(٤$^{+}$) = د(٤$^{-}$) = د(٤)

، د′(١$^{-}$) = د′(١$^{+}$) ، د′(٤$^{-}$) = د′(٤$^{+}$)

د′(س) =
- ٢ − ٢ س ، س < ١
- ٠ ، س = ١
- ٠ ، ١ < س < ٤
- ٠ ، س = ٤
- ٢ س − ٨ ، س > ٤

، بوضع د′(س) = ٠   ∴ س ∈ [١ ، ٤]



∴ الدالة متزايدة فى كل من :

]-∞ ، ١[،]٤ ، ∞[

---

١٢   ① (جـ)   ② (جـ)   ③ (ب)

④ (جـ)   ⑤ (جـ)   ⑥ (جـ)

إرشادات لحل رقم ١٢

① ∵ د′(س) < ٠   ∴ الدالة د متناقصة.

، ∵ س > س − ١

∴ د(س) < د(س − ١)

② ∵ د متناقصة.   ∴ د′(س) ≤ ٠

∴ أ س^{٢} + ب س + جـ ≤ ٠

وذلك يتحقق إذا كان : أ < ٠

، المميز = ب^{٢} − ٤ أ جـ ≤ ٠

③ ∵ د′(س) = ٣ س^{٢} + ٢ أ س + ٣

، ∵ د تزايدية على ح وكثيرة حدود

∴ د′(س) ≥ ٠

∴ المميز = (٢ أ)^{٢} − ٤ (٣) (٣) ≤ ٠

∴ ٤ أ^{٢} ≤ ٣٦   ∴ أ^{٢} ≤ ٩

∴ |أ| ≤ ٣   ∴ −٣ ≤ أ ≤ ٣

∴ أ ∈ [−٣ ، ٣]

④ ∵ د′(س) = ٣ ك س^{٢} + ٥

وبوضع د′(س) = ٠

∴ ٣ ك س^{٢} + ٥ = ٠   ∴ س^{٢} = $\frac{-٥}{٣ ك}$

حتى يكون للمعادلة حلان لابد أن تكون ك < ٠

∴ ك ∈]−∞ ، ٠[

⑤ ∵ ع(س) = $\frac{د(س)}{ر(س)}$ = $\frac{موجب}{موجب}$ = موجب

، ع′(س) = $\frac{ر(س) × د′(س) − د(س) × ر′(س)}{[ر(س)]^{٢}}$

= $\frac{موجب × موجب − موجب × سالب}{(موجب)^{٢}}$

= موجب

∴ ع تكون موجبة وتزايدية.

⑥ ∵ د′(س) تكون تزايدية

∴ د″(س) > ٠

ومن الرسم :

∵ د″(س) > ٠ لكل س ∈]٠ ، ٤[

∴ د′(س) تزايدية فى الفترة]٠ ، ٤[

إجابات تمارين 10

١

① ص = س^{٢} + ٤ س + ٦

، ص′ = ٢ س + ٤   وبوضع ص′ = ٠

∴ س = −٢   ، ص″ = ٢ (موجب)

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = −٢

د(−٢) = ٢

② ص = ٤ − ٦ س − س^{٢}

∴ ص′ = −٦ − ٢ س ، بوضع ص′ = ٠

∴ س = −٣ ، ص″ = −٢ (سالب)

∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند س = −٣

د(−٣) = ١٣

③ ص = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − ٩ س + ٢

، ص′ = س^{٢} − ٩   ، عندما ص′ = ٠

∴ س = ٣   أ، س = −٣

، ص″ = ٢ س   عند س = ٣

ص″ = ٦ (موجب)

∴ للدالة قيمة صغرى محلية ، د(٣) = −١٦

، عند س = −٣   ص″ = −٦ (سالب)

∴ للدالة قيمة عظمى محلية ، د(−٣) = ٢٠

④ د(س) = ٤ س − س^{٣}

∴ د′(س) = ٤ − ٣ س^{٢}

، بوضع د′(س) = ٠   ∴ ٤ − ٣ س^{٢} = ٠

∴ س^{٢} = $\frac{٤}{٣}$ ∴ س = ± $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

، د″(س) = −٦ س   ∴ د″($\frac{٢}{\sqrt{٣}}$) < ٠ سالب

يوجد قيمة عظمى محلية د($\frac{٢}{\sqrt{٣}}$) = $\frac{١٦ \sqrt{٣}}{٩}$

، د″($\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$) > ٠ موجبة

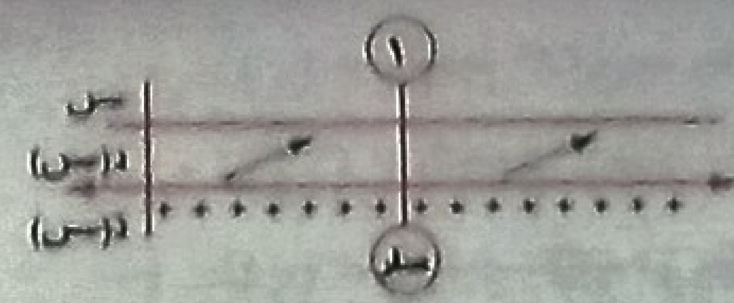
يوجد قيمة صغرى محلية د($\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$) = $\frac{-١٦ \sqrt{٣}}{٩}$

(٥) ∵ د(س) = س^{٣} − ٩ س^{٢} + ١٥
∴ دَ(س) = ٣ س^{٢} − ١٨ س
= ٣ س (س − ٦)
∴ دَ(س) = ٠ عندما س = ٠ أ، س = ٦
، ∵ دً(س) = ٦ س − ١٨
∴ عند س = ٠ فإن : دً(٠) < ٠
∴ توجد قيمة عظمى محلية هي : د(٠) = ١٥
، عند س = ٦ فإن : دً(٦) > ٠
∴ توجد قيمة صغرى محلية هي : د(٦) = −٩٣

(٦) ∵ د(س) = ٢ س^{٣} + ٣ س^{٢} − ١٢ س + ٥
∴ دَ(س) = ٦ س^{٢} + ٦ س − ١٢
= ٦ (س^{٢} + س − ٢)
= ٦ (س + ٢) (س − ١)
∴ دَ(س) = ٠ عندما س = −٢ أ، س = ١
، ∵ دً(س) = ١٢ س + ٦ ∴ دً(−٢) < ٠
∴ توجد قيمة عظمى محلية = د(−٢) = ٢٥
، ∵ دً(١) > ٠
∴ توجد قيمة صغرى محلية = د(١) = −٢

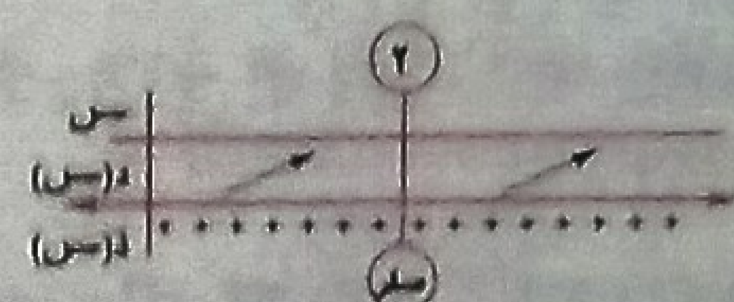
(٧) د(س) = س^{٣} + ٣ س^{٢} − ٩ س − ٧
دَ(س) = ٣ س^{٢} + ٦ س − ٩
دَ(س) = ٠ ∴ ٣ س^{٢} + ٦ س − ٩ = ٠
∴ س^{٢} + ٢ س − ٣ = ٠
∴ س = ١ أو س = −٣ دً(س) = ٦ س + ٦
دً(١) > ٠ موجب ، يوجد قيمة صغرى محلية.
د(١) = −١٢
دً(−٣) < ٠ سالب ، يوجد قيمة عظمى محلية.
د(−٣) = ٢٠

(٨) ص = س^{٣} − ٣ س^{٢} + ٣ س + ٢
صَ = ٣ س^{٢} − ٦ س + ٣
= ٣ (س^{٢} − ٢ س + ١) = ٣ (س − ١)^{٢}
، عندما صَ = ٠ ∴ س = ١



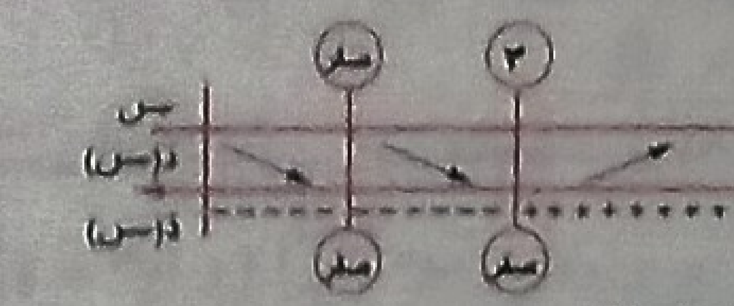
∴ عند س = ١
لا توجد قيمة عظمى أ، صغرى محلية.

(٩) د(س) = (س − ٢)^{٣} + ٥
دَ(س) = ٣ (س − ٢)^{٢}
، دَ(س) = ٠ عند س = ٢



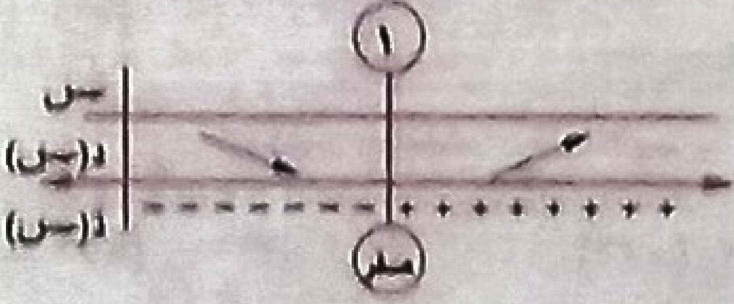
∴ عند س = ٢
لا توجد قيمة عظمى أ، صغرى محلية.

(١٠) د(س) = $\frac{١}{٤}$ س^{٤} − س^{٣}
∴ دَ(س) = س^{٣} − ٣ س^{٢} = س^{٢} (س − ٣)
، دَ(س) = ٠ عندما س = ٠ أ، س = ٣



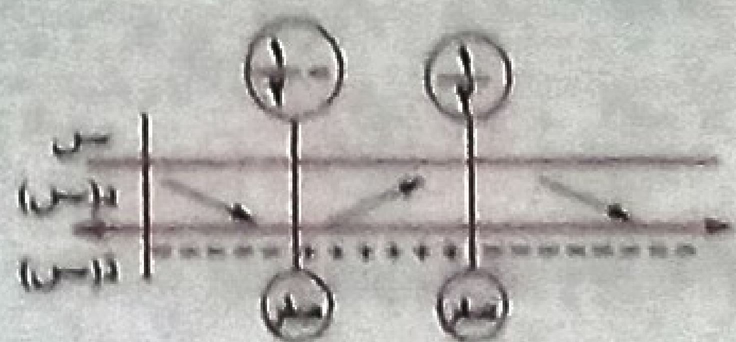
∴ عند س = ٠
لا توجد قيمة عظمى أ، صغرى محلية.
، للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٣
، د(٣) = $\frac{-٢٧}{٤}$

(١١) د(س) = (س − ١)^{٤} + ٢
∴ دَ(س) = ٤ (س − ١)^{٣}
، دَ(س) = ٠ عندما س = ١



∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ١
، د(١) = ٢

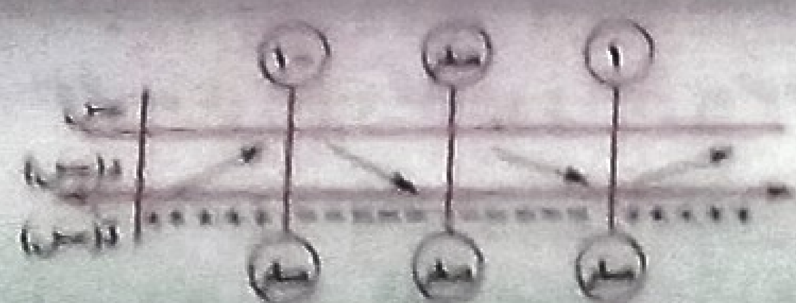
(١٢) د(س) = س (١ − $\frac{٤}{٣}$ س^{٢}) = س − $\frac{٤}{٣}$ س^{٣}
دَ(س) = ١ − ٤ س^{٢}
دَ(س) = ٠ عندما س = $\frac{١}{٢}$ أ، −$\frac{١}{٢}$



∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند س = $\frac{١}{٢}$
، د($\frac{١}{٢}$) = $\frac{١}{٣}$
للدالة قيمة صغرى محلية عند س = −$\frac{١}{٢}$
، د(−$\frac{١}{٢}$) = −$\frac{١}{٣}$

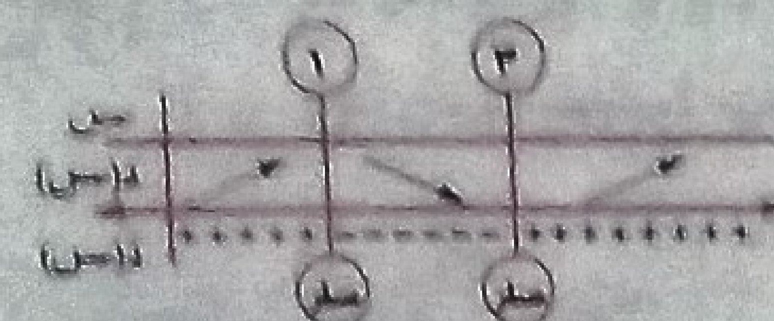
(١٣) د(س) = س^{٤} − ٢ س^{٢}
دَ(س) = ٤ س^{٣} − ٤ س = ٤ س (س^{٢} − ١)
= ٤ س (س − ١) (س + ١)
∴ دَ(س) = ٠ عندما س = ٠
أ، س = ١ أ، س = −١
، ∵ دً(س) = ١٢ س^{٢} − ٤
، ∵ دً(٠) < ٠ ∴ عند س = ٠
توجد قيمة عظمى محلية = د(٠) = صفر
، ∵ دً(١) > ٠ ∴ عند س = ١
توجد قيمة صغرى محلية = د(١) = ١ − ٢ = −١
، ∵ دً(−١) > ٠
∴ عند س = −١ توجد قيمة صغرى محلية
= د(−١) = −١

(١٤) د(س) = ٣ س^{٥} − ٥ س^{٣}
دَ(س) = ١٥ س^{٤} − ١٥ س^{٢}
دَ(س) = ٠ ١٥ س^{٤} − ١٥ س^{٢} = ٠
١٥ س^{٢} (س^{٢} − ١) = ٠
س = ٠ أو س = ١ أو س = −١



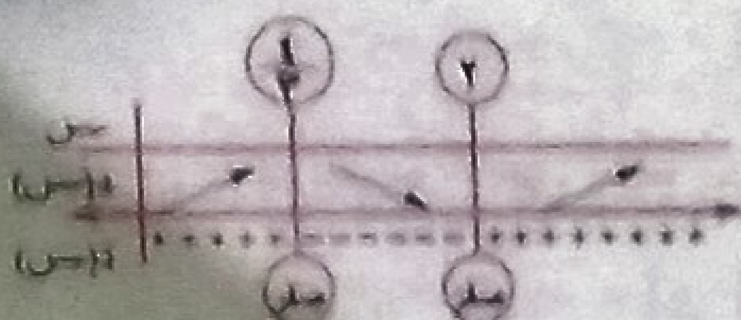
للدالة قيمة عظمى محلية د(−١) = ٢
للدالة قيمة صغرى محلية د(١) = −٢

(١٥) د(س) = س (س − ٣)^{٢} + ٢
دَ(س) = ٢ س (س − ٣) + (س − ٣)^{٢}
= (س − ٣) (٢ س + س − ٣)
= (س − ٣) (٣ س − ٣)
دَ(س) = ٠ عندما س = ٣ أ، س = ١



∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند س = ١
، د(١) = ٦
∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٣
، د(٣) = ٢

(١٦) د(س) = (س − ١) (س − ٢)^{٢}
دَ(س) = ٢ (س − ١) (س − ٢) + (س − ٢)^{٢}
= (س − ٢) (٢ س − ٢ + س − ٢)
= (س − ٢) (٣ س − ٤)
دَ(س) = ٠ عند س = ٢ أ، س = $\frac{٤}{٣}$



∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند س = $\frac{٤}{٣}$
، د($\frac{٤}{٣}$) = $\frac{٤}{٢٧}$
للدالة قيمة صغرى عند س = ٢ ، د(٢) = ٠

(٢٧) $د(س) = س^{٤} - ٤ س^{٣} + ٤ س^{٢} - ١٥$

$د'(س) = ٤ س^{٣} - ١٢ س^{٢} + ٨ س$

$= ٤ س (س^{٢} - ٣ س + ٢)$

$= ٤ س (س - ١)(س - ٢)$

$د'(س) = ٠$ عندما $س = ٠$ ، أ، $س = ١$ ،

أ، $س = ٢$

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند $س = ٠$

، $د(٠) = -١٥$

للدالة قيمة صغرى محلية عند $س = ٢$

، $د(٢) = -١٥$

للدالة قيمة عظمى محلية عند $س = ١$

، $د(١) = -١٤$

(٢٨) $د(س) = \frac{١}{٤} س^{٤} - ٤ س^{٣} - ٢ س^{٢} + ٤٨ س$

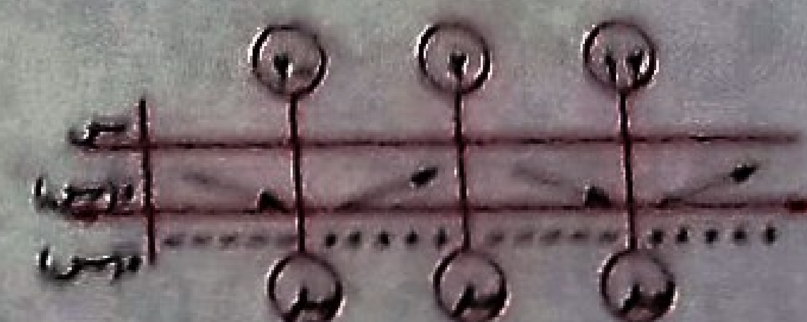
$د'(س) = س^{٣} - ١٢ س^{٢} - ٤ س + ٤٨$

$= س^{٢}(س - ١٢) - ٤ (س - ١٢)$

$= (س - ١٢)(س^{٢} - ٤)$

، $د'(س) = ٠$ عندما $س = ١٢$ أ، $س = ٢$

أ، $س = -٢$



∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند $س = ١٢$

، $د(١٢) = -١٤٤٠$

للدالة قيمة صغرى محلية عند $س = -٢$

، $د(-٢) = -٦٨$

للدالة قيمة عظمى محلية عند $س = ٢$

، $د(٢) = ٦٠$

(٢٩) $د(س) = ٨ س^{٤} - (س - ٢)^{٤}$

$د'(س) = ٣٢ س^{٣} - ٤ (س - ٢)^{٣}$

عندما $د'(س) = ٠$ ، $٨ س^{٣} = (س - ٢)^{٣}$

$٢ س = س - ٢$ ومنها $س = -٢$

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند $س = -٢$

، $د(-٢) = -١٢٨$

(٣٠) $د(س) = س^{٤}(س + ٢)^{٢}$

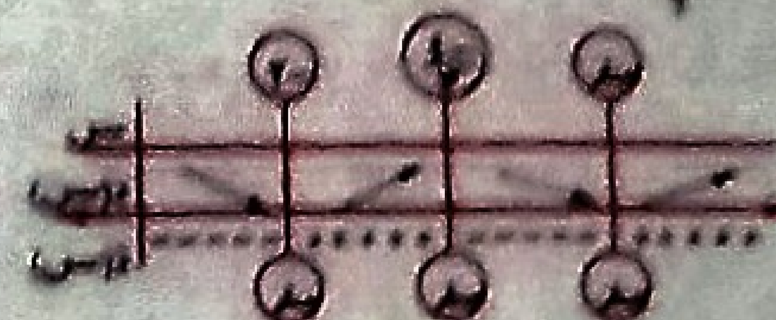
$د'(س) = ٤ س^{٣}(س + ٢)^{٢} + ٢ س^{٤}(س + ٢)$

$= ٢ س^{٣}(س + ٢)(٢(س + ٢) + س)$

$= ٢ س^{٣}(س + ٢)(٣ س + ٤)$

، $د'(س) = ٠$ عندما $س = ٠$ ، أ، $س = -٢$

أ، $س = \frac{-٤}{٣}$



∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند $س = ٠$

، $د(٠) = ٠$

للدالة قيمة صغرى محلية عند $س = -٢$

، $د(-٢) = ٠$

للدالة قيمة عظمى محلية عند $س = -\frac{٤}{٣}$

، $د\left(-\frac{٤}{٣}\right) = \frac{١٠٢٤}{٧٢٩}$

٢

(١) للدالة قيمة عظمى محلية $د(٠) = ٠$

ولها قيمة صغرى محلية $د(٢) = -٤$

(٢) للدالة قيمة عظمى محلية $د(-١) = -٢$

للدالة قيمة صغرى محلية $د(١) = ٢$

(٣) للدالة قيمة عظمى محلية $د(٠) = ٠$

للدالة قيمة صغرى محلية $د(١) = -١$

٣

(١) (ب)	(٢) (ب)	(٣) (أ)
(٤) (ب)	(٥) (د)	(٦) (د)
(٧) (أ)	(٨) (أ)	(٩) (د)
(١٠) (أ)	(١١) (أ)	(١٢) (د)
(١٣) (جـ)	(١٤) (ب)	(١٥) (د)

٤

(١) $د(س) = س + \frac{١}{س}$

∴ مجال الدالة هو : ح − {٠}

$د'(س) = ١ - س^{-٢}$ ، $د''(س) = ٢ س^{-٣}$

، $د'(س) = ٠$ عندما $س = ١$ أ، $س = -١$

، ∵ $د''(١) = ٢$ (موجب)

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند $س = ١$

، ∵ $د''(-١) = -٢$ (سالب)

∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند $س = -١$

(٢) $د(س) = س^{٢} - س^{-٢}$

مجال الدالة هو : ح − {٠}

$د'(س) = ٢ س + ٢ س^{-٣} = \frac{٢ س^{٤} + ٢}{س^{٣}}$

$د''(س) = ٢ - ٦ س^{-٤}$

، $د'(س)$ غير موجودة عندما $س = ٠$ ،

ولكن ٠ ∉ لمجال الدالة

∴ لا يوجد نقط حرجة للدالة.

(٣) $د(س) = س^{٣} + ٤٨ س^{-١}$

، مجال الدالة هو : ح − {٠}

$د'(س) = ٣ س^{٢} - ٤٨ س^{-٢}$

$= ٣ س^{٢} - \frac{٤٨}{س^{٢}} = \frac{٣ س^{٤} - ٤٨}{س^{٢}}$

$د''(س) = ٦ س + ٩٦ س^{-٣}$

$د'(س) = ٠$ عندما $س = ٢$ أ، $س = -٢$

، $د''(٢) = ٢٤$ (موجب)

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند $س = ٢$

$د''(-٢) = -٢٤$ (سالب)

∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند $س = -٢$

(٤) $د(س) = س^{٢} + ١٦ س^{-١}$

، مجال الدالة : ح − {٠}

$د'(س) = ٢ س - ١٦ س^{-٢} = \frac{٢ س^{٣} - ١٦}{س^{٢}}$

$د''(س) = ٢ + ٣٢ س^{-٣}$

، $د'(س) = ٠$ عندما $س = ٢$

$د''(٢) = ٦$ (موجب)

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند $س = ٢$

(٥) $د(س) = س + \frac{٤}{س - ١}$

$د'(س) = ١ + \frac{-٤}{(س - ١)^{٢}} = \frac{(س - ١)^{٢} - ٤}{(س - ١)^{٢}}$

$د''(س) = ٨ (س - ١)^{-٣}$

$د'(س) = ٠$ عندما $(س - ١)^{٢} = ٤$

∴ $س - ١ = ±٢$ ومنها $س = ٣$ أ، $س = -١$

$د''(٣) = ١$ (موجب)

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند $س = ٣$

، $د''(-١) = -١$ (سالب)

∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند $س = -١$

(٦) $د(س) = \frac{٣}{س - ٢}$ ، $س ≠ ٢$

$د'(س) = \frac{(س - ٢)(٠) - ٣ (١)}{(س - ٢)^{٢}} = \frac{-٣}{(س - ٢)^{٢}}$

لا توجد نقط في المجال تجعل $د'(س) = ٠$

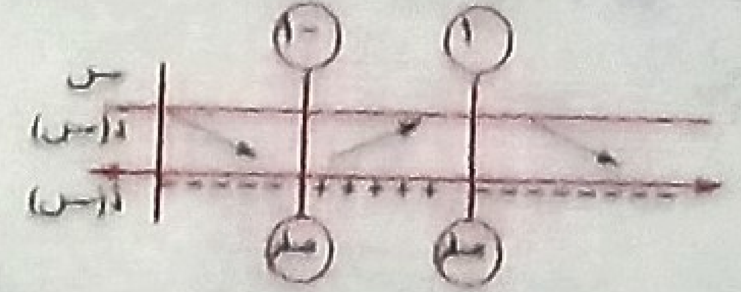
أو غير معرفة ليس للدالة قيم عظمى أو صغرى محلية

⑦ $د(س) = \frac{٢س}{س^{٢} + ١}$

$دَ(س) = \frac{٢(س^{٢} + ١) - ٢س(٢س)}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$

$= \frac{-٢س^{٢} + ٢}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$

، $دَ(س) = ٠$ عندما $س = ١$ أ، $س = -١$



∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند $س = ١$

، للدالة قيمة صغرى محلية عند $س = -١$

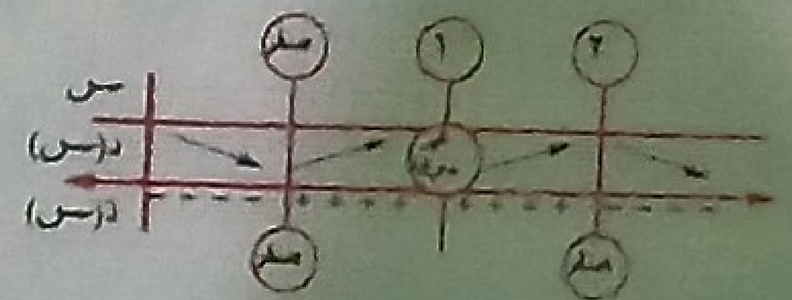
⑧ $د(س) = \frac{س^{٢}}{١ - س}$ ، مجال الدالة = ح − {١}

∴ $دَ(س) = \frac{(١ - س)(٢س) + س^{٢}}{(١ - س)^{٢}}$

$= \frac{-س^{٢} + ٢س}{(١ - س)^{٢}}$

، $دَ(س) = ٠$ عندما $س(س - ٢) = ٠$

∴ $س = ٠$ أ، $س = ٢$



∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند $س = ٠$

، للدالة قيمة عظمى محلية عند $س = ٢$

⑨ $د(س) = \frac{١ + س}{١ - س}$ ، مجال الدالة : ح − {١}

∴ $دَ(س) = \frac{(١ - س) + (١ + س)}{(١ - س)^{٢}} = \frac{٢}{(١ - س)^{٢}}$

، ∵ $دَ(س) \neq ٠$

∴ لا يوجد للدالة قيمة عظمى أو صغرى محلية

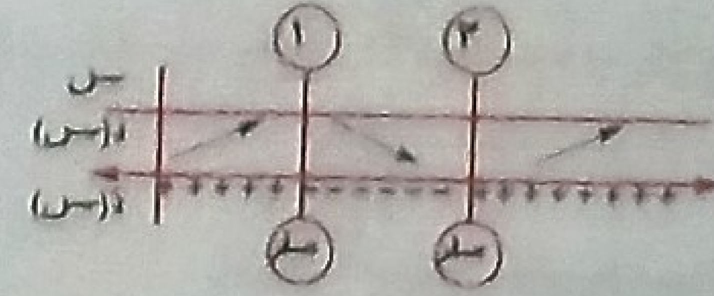
⑩ $د(س) = \frac{س^{٢} - ٣}{س - ٢}$ ، $س \neq ٢$

∴ $دَ(س) = \frac{(س - ٢)(٢س) - (س^{٢} - ٣)(١)}{(س - ٢)^{٢}}$

$= \frac{س^{٢} - ٤س + ٣}{(س - ٢)^{٢}}$

، $دَ(س) = ٠$ فإن : $س^{٢} - ٤س + ٣ = ٠$

∴ $س = ٣$ أ، $س = ١$



للدالة قيمة عظمى محلية عند $س = ١$

، للدالة قيمة صغرى محلية عند $س = ٣$

⑪ $د(س) = \frac{٤س - ٣}{س^{٢} - ١}$ ، مجال الدالة : ح − {١ ، −١}

∴ $دَ(س) = \frac{٤(س^{٢} - ١) - (٤س - ٣)(٢س)}{(س^{٢} - ١)^{٢}}$

$= \frac{٤س^{٢} - ٤ - ٨س^{٢} + ٦س}{(س^{٢} - ١)^{٢}}$

$= \frac{-٤س^{٢} + ٦س - ٤}{(س^{٢} - ١)^{٢}}$

، $دَ(س) = ٠$ عندما $-٤س^{٢} + ٦س - ٤ = ٠$

$٢س^{٢} - ٣س + ٢ = ٠$ ليس له جذور حقيقية

∴ الدالة ليس لها قيمة عظمى أو صغرى محلية.

⑫ $د(س) = \frac{٥ - س}{س^{٢} - ٩}$ ، مجال الدالة : ح − {٣ ، −٣}

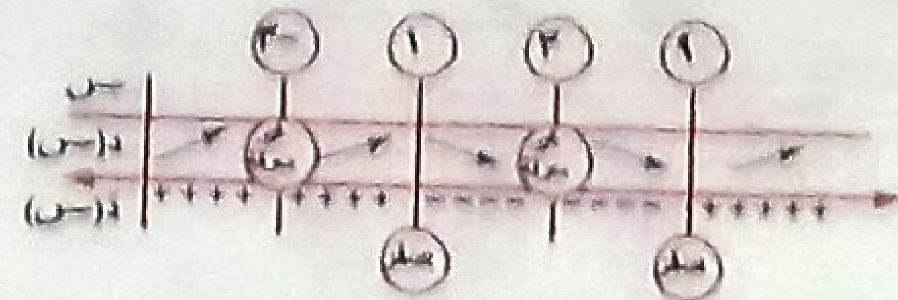
∴ $دَ(س) = \frac{-(س^{٢} - ٩) - (٥ - س)(٢س)}{(س^{٢} - ٩)^{٢}}$

$= \frac{-س^{٢} + ٩ - ١٠س + ٢س^{٢}}{(س^{٢} - ٩)^{٢}}$

$= \frac{س^{٢} - ١٠س + ٩}{(س^{٢} - ٩)^{٢}}$

، $دَ(س) = ٠$ عندما $س^{٢} - ١٠س + ٩ = ٠$

ومنها $س = ٩$ أ، $س = ١$



∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند $س = ٩$

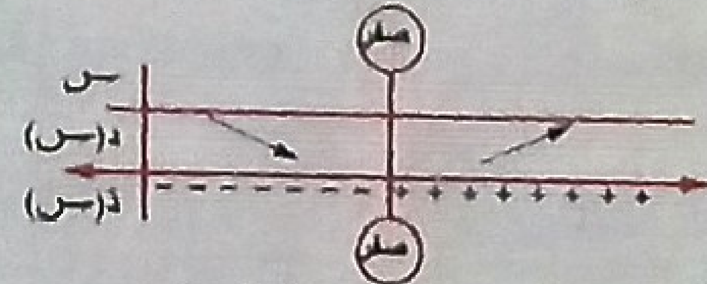
، للدالة قيمة عظمى محلية عند $س = ١$

⑬ $د(س) = \frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} + ١}$

∴ $دَ(س) = \frac{(س^{٢} + ١)(٢س) - (س^{٢} - ١)(٢س)}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$

$= \frac{٤س}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$

، $دَ(س) = ٠$ ∴ $٤س = ٠$ ∴ $س = ٠$



∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند $س = ٠$

⑭ $د(س) = \frac{٣س^{٢} + ٥س + ٢٥}{س + ٢}$

، مجال الدالة : ح − {−٢}

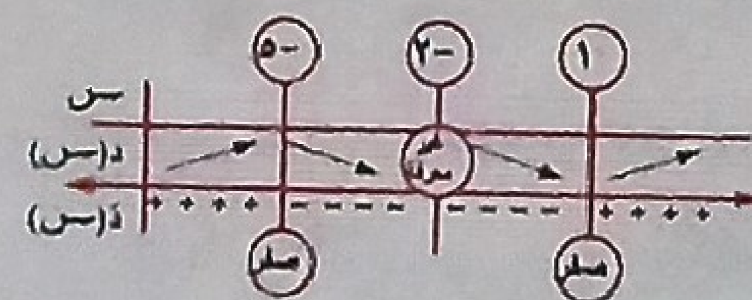
∴ $دَ(س)$

$= \frac{(س + ٢)(٦س + ٥) - (٣س^{٢} + ٥س + ٢٥)(١)}{(س + ٢)^{٢}}$

$= \frac{٣س^{٢} + ١٢س - ١٥}{(س + ٢)^{٢}}$

، $دَ(س) = ٠$ عندما $٣س^{٢} + ١٢س - ١٥ = ٠$

ومنها $س = ١$ أ، $س = -٥$



∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند $س = ١$

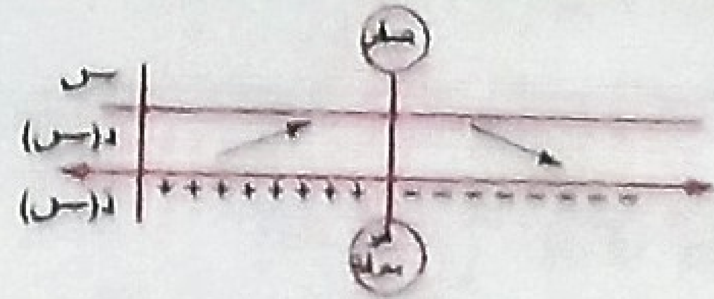
للدالة قيمة عظمى محلية عند $س = -٥$

٥

① $د(س) = ٣ - س^{\frac{٢}{٣}}$

∴ $دَ(س) = -\frac{٢}{٣} س^{-\frac{١}{٣}} = \frac{-٢}{٣\sqrt[٣]{س}}$

، $دَ(س)$ غير معرفة عند $س = ٠$

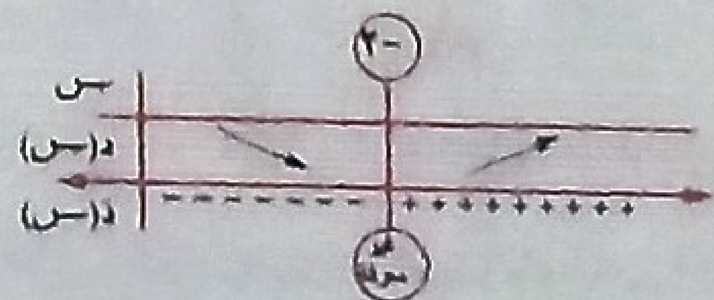


للدالة قيمة عظمى محلية عند (٠ ، ٣)

② $د(س) = (س + ٢)^{\frac{٢}{٣}}$

∴ $دَ(س) = \frac{٢}{٣}(س + ٢)^{-\frac{١}{٣}} = \frac{٢}{٣\sqrt[٣]{س + ٢}}$

، $دَ(س)$ غير معرفة عند $س = -٢$

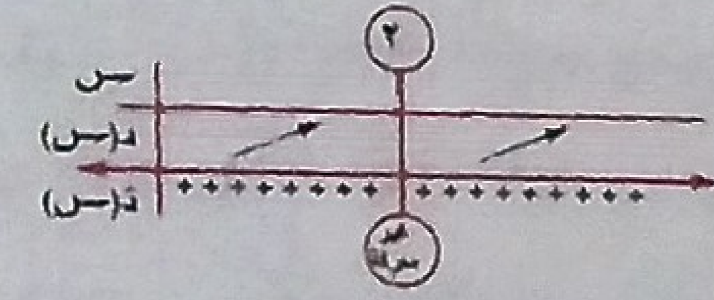


للدالة قيمة صغرى محلية عند (−٢ ، ٠)

③ $د(س) = \sqrt[٣]{س - ٢}$

∴ $دَ(س) = \frac{١}{٣}(س - ٢)^{-\frac{٢}{٣}} = \frac{١}{٣\sqrt[٣]{(س - ٢)^{٢}}}$

، $دَ(س)$ غير معرفة عند $س = ٢$

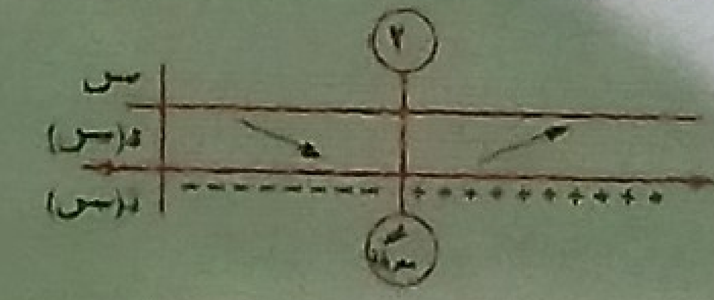


∴ لا توجد قيم عظمى أ، صغرى محلية للدالة.

④ $د(س) = \sqrt[٣]{(س - ٢)^{٢}}$

∴ $دَ(س) = \frac{٢}{٣}(س - ٢)^{-\frac{١}{٣}} = \frac{٢}{٣\sqrt[٣]{س - ٢}}$

، $دَ(س)$ غير موجودة عند $س = ٢$

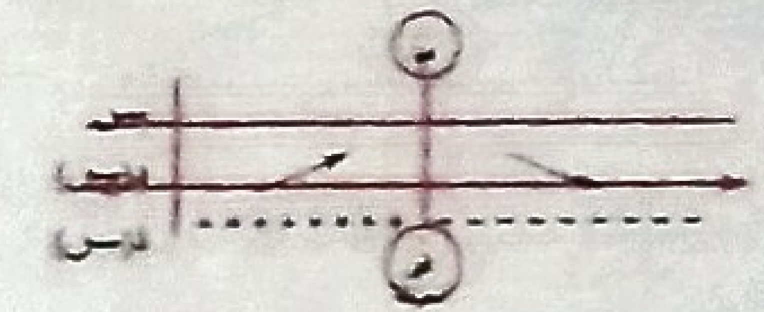


∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند (٢ ، ٠)

⑤ $د(س) = ٢ - \sqrt[٣]{(٣ - س)^{٢}}$

∴ $د'(س) = \frac{٢}{٣}(٣ - س)^{-\frac{١}{٣}} = \frac{٢}{٣\sqrt[٣]{٣ - س}}$

، $د'(س)$ غير معرفة عند $س = ٣$



∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند $(٣ ، ٢)$

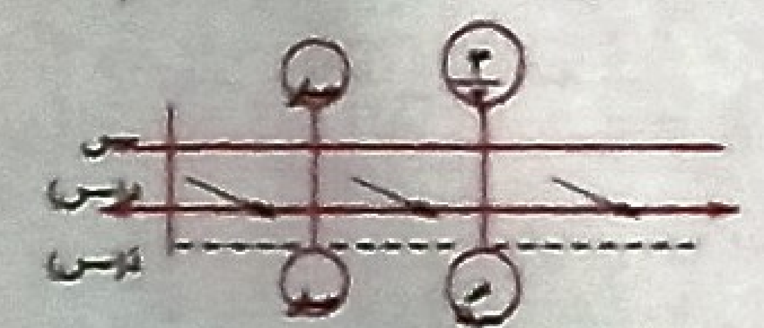
⑥ $د(س) = \sqrt[٣]{٢٧ - ٨ س^{٣}}$

$د'(س) = \frac{١}{٣}(٢٧ - ٨ س^{٣})^{-\frac{٢}{٣}}(-٢٤ س^{٢})$

$= \frac{-٨ س^{٢}}{\sqrt[٣]{(٢٧ - ٨ س^{٣})^{٢}}}$

$د'(س) = ٠$ عندما $س = ٠$

$د'(س)$ غير معرفة عند $س = \frac{٣}{٢}$



∴ لا يوجد قيم عظمى أ، صغرى محلية للدالة.

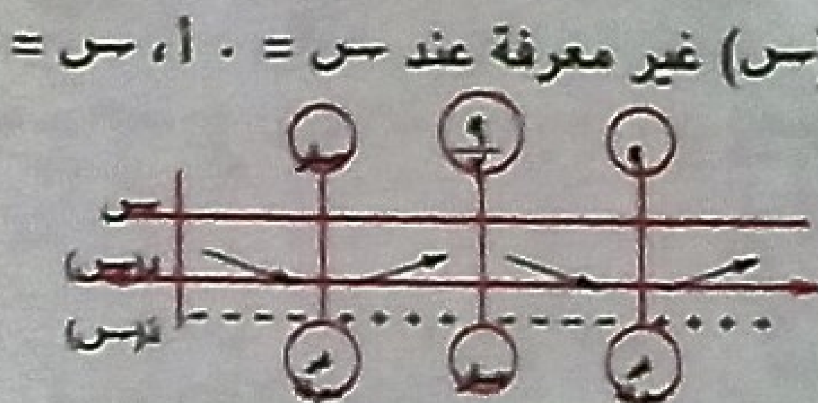
⑦ $د(س) = \sqrt[٣]{(س^{٢} - ٩ س)^{٢}}$

∴ $د'(س) = \frac{٢}{٣}(س^{٢} - ٩ س)^{-\frac{١}{٣}}(٢ س - ٩)$

$= \frac{٤ س - ١٨}{٣\sqrt[٣]{س(س - ٩)}}$

، $د'(س) = ٠$ عند $س = \frac{٩}{٢}$

، $د'(س)$ غير معرفة عند $س = ٠$ أ، $س = ٩$



∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند $(\frac{٩}{٢} ، \sqrt[٣]{\frac{٦٥٦١}{١٦}})$

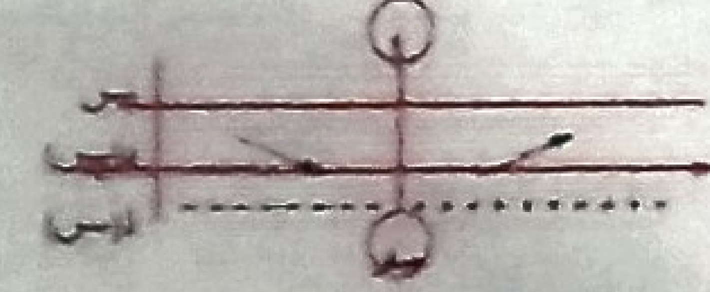
، للدالة قيمة صغرى محلية عند $(٩ ، ٠)$

، للدالة قيمة صغرى محلية عند $(٠ ، ٠)$

⑧ $د(س) = (س - ١)^{\frac{٤}{٣}}$

∴ $د'(س) = \frac{٤}{٣}(س - ١)^{\frac{١}{٣}} = \frac{٤}{٣}\sqrt[٣]{س - ١}$

، $د'(س) = ٠$ عند $س = ١$



∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند $(١ ، ٠)$

⑨ $د(س) = \sqrt[٣]{س}(س - ٤)^{٢}$

∴ $د'(س) = \frac{١}{٣} س^{-\frac{٢}{٣}}(س - ٤)^{٢}$

$+ \sqrt[٣]{س} \times ٢(س - ٤)$

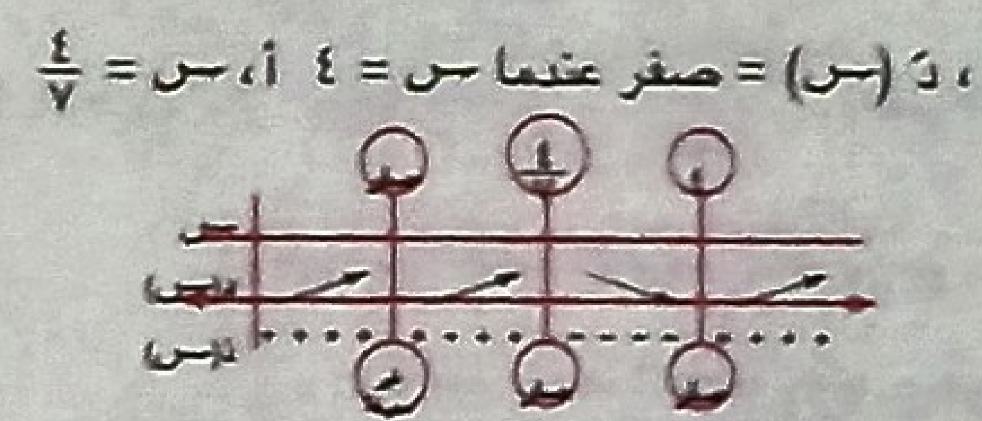
$= (س - ٤)\left(\frac{س - ٤}{٣\sqrt[٣]{س^{٢}}} + ٢\sqrt[٣]{س}\right)$

$= (س - ٤)\left(\frac{س - ٤ + ٦ س}{٣\sqrt[٣]{س^{٢}}}\right)$

$= (س - ٤)\left(\frac{٧ س - ٤}{٣\sqrt[٣]{س^{٢}}}\right)$

∴ $د'(س)$ غير معرفة عند $س = ٠$

، $د'(س) =$ صفر عندما $س = ٤$ أ، $س = \frac{٤}{٧}$



∴ الدالة لها قيمة عظمى محلية

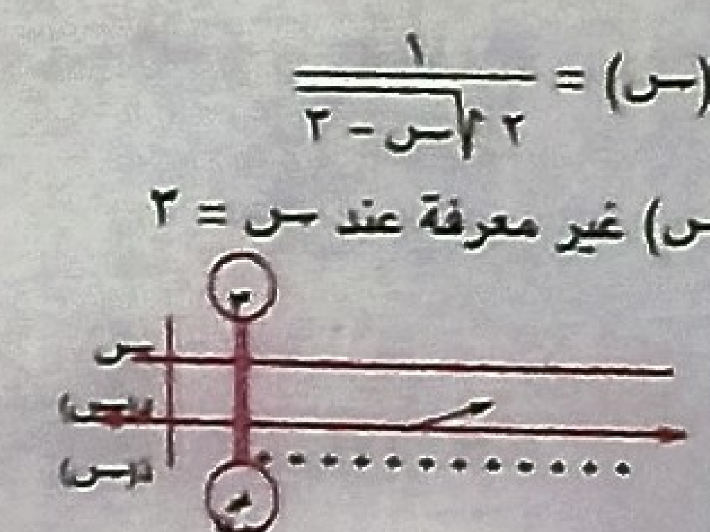
عند $(\frac{٤}{٧} ، \frac{٥٧٦}{٤٩}\sqrt[٣]{\frac{٤}{٧}})$

، الدالة لها قيمة صغرى محلية عند $(٤ ، ٠)$

⑩ $د(س) = \sqrt{س - ٣}$ ، مجال الدالة : $[٣ ، ∞[$

∴ $د'(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س - ٣}}$

، $د'(س)$ غير معرفة عند $س = ٣$



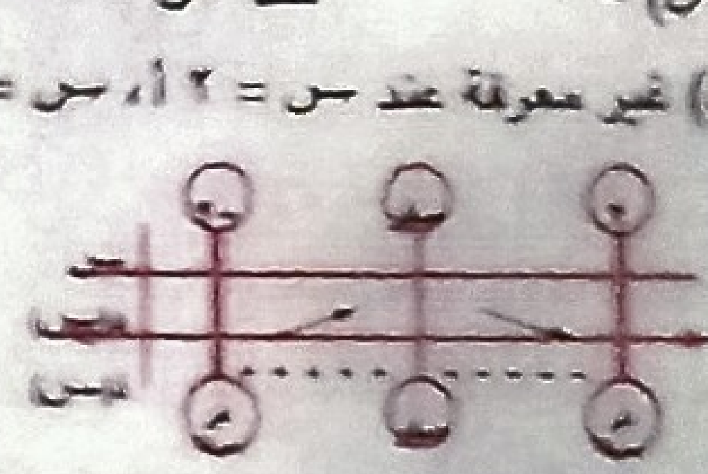
∴ الدالة ليس لها قيم عظمى أ، صغرى محلية.

⑪ $د(س) = \sqrt{٤ - س^{٢}}$ ، مجال الدالة هو $[-٢ ، ٢]$

∴ $د'(س) = \frac{-س}{\sqrt{٤ - س^{٢}}}$

، $د'(س) = ٠$ عند $س = ٠$

$د'(س)$ غير معرفة عند $س = ٢$ أ، $س = -٢$



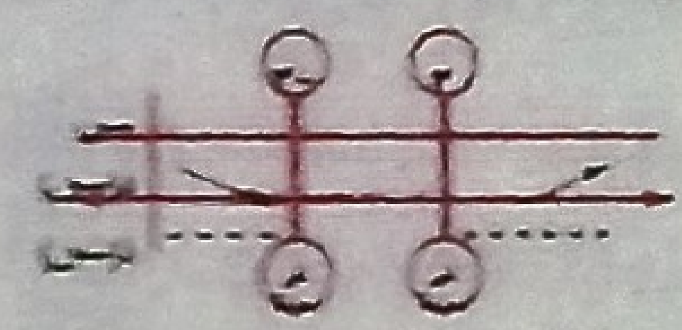
∴ الدالة قيمة عظمى محلية عند $(٠ ، ٢)$

⑫ $د(س) = \sqrt{س^{٢} - ٩}$ ، مجال الدالة ح $-]-٣ ، ٣[$

∴ $د'(س) = \frac{س}{\sqrt{س^{٢} - ٩}}$

، $د'(س) = ٠$ عند $س = ٠ \notin$ مجال الدالة

$د'(س)$ غير معرفة عند $س = ٣$ أ، $س = -٣$



∴ عند $س = -٣$ توجد نقطة حرجة (حدية)

، عند $س = ٣$ توجد نقطة حرجة (حدية)

∴ الدالة ليس لها قيم عظمى أو صغرى محلية

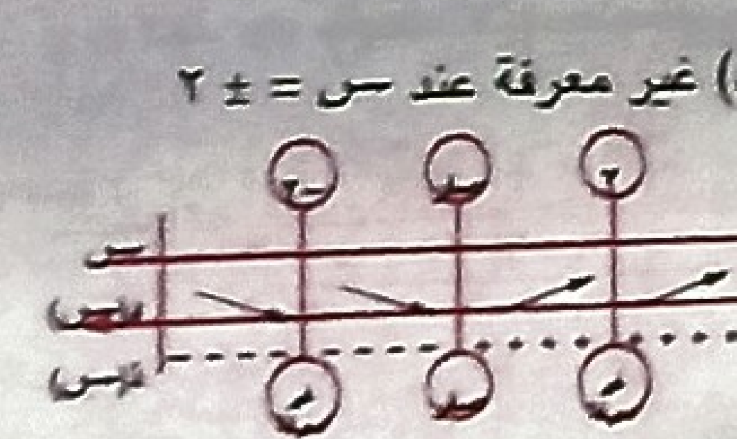
⑬ $د(س) = \sqrt[٣]{س^{٢} - ٤}$

∴ $د'(س) = \frac{١}{٣}(س^{٢} - ٤)^{-\frac{٢}{٣}} \times ٢ س$

$= \frac{٢ س}{٣\sqrt[٣]{(س^{٢} - ٤)^{٢}}}$

، $د'(س) = ٠$ منها $س = ٠$

$د'(س)$ غير معرفة عند $س = \pm ٢$



للدالة قيمة صغرى محلية عند $(٠ ، -\sqrt[٣]{٤})$

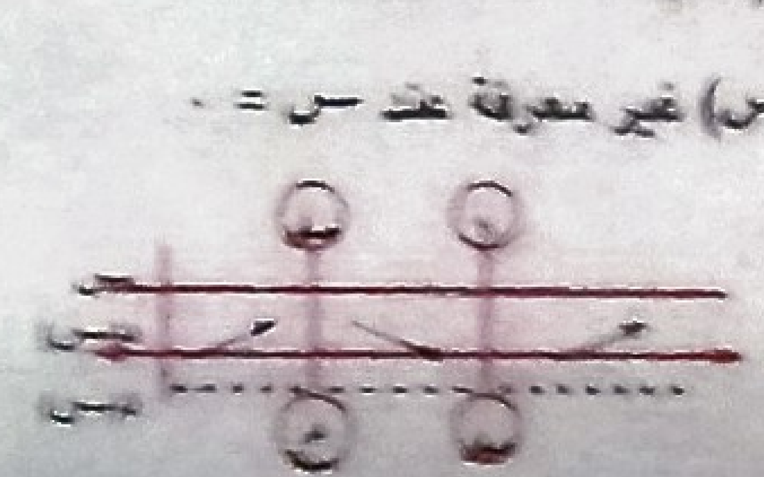
⑭ $د(س) = س^{\frac{٢}{٣}}(٢ س - ٥)$

∴ $د'(س) = س^{\frac{٢}{٣}} \times ٢ + (٢ س - ٥) \times \frac{٢}{٣} س^{-\frac{١}{٣}}$

$= \frac{٦ س + ٤ س - ١٠}{٣\sqrt[٣]{س}} = \frac{١٠ س - ١٠}{٣\sqrt[٣]{س}}$

، $د'(س) = ٠$ عند $س = ١$

$د'(س)$ غير معرفة عند $س = ٠$



الدالة قيمة عظمى محلية عند $(٠ ، ٠)$

الدالة قيمة صغرى محلية عند $(١ ، -٣)$

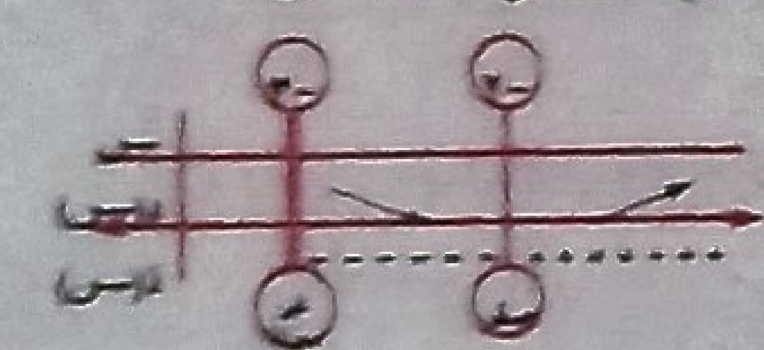
⑮ $د(س) = س\sqrt{س + ٣}$ ، مجال د $= [-٣ ، ∞[$

∴ $د'(س) = \sqrt{س + ٣} + س \times \frac{١}{٢\sqrt{س + ٣}}$

$= \frac{٢ س + ٦ + س}{٢\sqrt{س + ٣}} = \frac{٣ س + ٦}{٢\sqrt{س + ٣}}$

∴ $د'(س)$ غير معرفة عند $س = -٣$

، $د'(س) =$ صفر عندما $س = -٢$



∴ الدالة قيمة صغرى محلية عند $(-٢ ، -٢)$

⑯ $د(س) = س^{٢}\sqrt{س + ٥}$

، مجال الدالة : $[-٥ ، ∞[$

∴ $د'(س) = س^{٢} \times \frac{١}{٢\sqrt{س + ٥}} + \frac{\sqrt{س + ٥} \times ٢ س}{١}$

$= \frac{س^{٣} + ٤ س^{٢} + ٢٠ س}{٢\sqrt{س + ٥}}$

$= \frac{٥ س(س + ٤)}{٢\sqrt{س + ٥}}$

∴ د(س) = ٠ عند س = ٠ أ، س = -٤

∴ د(س) غير معرفة عند س = -٥

∴ الدالة قيمة عظمى محلية عند (-٤ ، ١٦)

، الدالة قيمة صغرى محلية عند (٠ ، ٠)

(١٧) د(س) = س $\sqrt{8 - س^2}$

، مجال الدالة [$-2\sqrt{2}$ ، $2\sqrt{2}$]

∴ د'(س) = س × $\frac{-س}{\sqrt{8 - س^2}}$ + $\sqrt{8 - س^2}$

= $\frac{-س^2 + 8 - س^2}{\sqrt{8 - س^2}}$ = $\frac{-2(س^2 - 4)}{\sqrt{8 - س^2}}$

، د'(س) = ٠ عندما س = ٢ أ، س = -٢

، د'(س) غير معرفة عند س = $2\sqrt{2}$ أ، $-2\sqrt{2}$

الدالة قيمة عظمى محلية عند (٢ ، ٤)

، الدالة قيمة صغرى محلية عند (-٢ ، -٤)

(١٨) د(س) = $س^2 \sqrt{3 - س^2}$

، مجال الدالة = [$-\sqrt{3}$ ، $\sqrt{3}$]

∴ د'(س) = $س^2$ × $\frac{-س}{\sqrt{3 - س^2}}$ + $\sqrt{3 - س^2}$ × ٢س

= $\frac{-س^3 + 6س - 2س^3}{\sqrt{3 - س^2}}$

= $\frac{-3(س^3 - 2س)}{\sqrt{3 - س^2}}$

∴ د'(س) = ٠ عند س($س^2$ - ٢) = ٠

ومنها س = ٠ أ، س = $\sqrt{2}$ أ، س = $-\sqrt{2}$

∴ د'(س) غير معرفة عند س = $\pm\sqrt{3}$

∴ الدالة قيمة عظمى محلية عند ($\sqrt{2}$ ، ٢)

الدالة قيمة عظمى محلية عند ($-\sqrt{2}$ ، ٢)

الدالة قيمة صغرى محلية عند (٠ ، ٠)

٦

د(س) = $\sqrt[3]{س^2}$ = $س^{\frac{2}{3}}$

د'(س) = $\frac{2}{3} س^{-\frac{1}{3}}$ = $\frac{2}{3\sqrt[3]{س}}$

د'(س) غير معرفة عند س = ٠

الدالة قيمة صغرى محلية د(٠) = ٠

٧

د(س) = $س^3$ + ٣س - ٤

د'(س) = ٣$س^2$ + ٣

لا يوجد قيم للمتغير س تجعل د'(س) = ٠

أ، د'(س) غير معرفة

∴ الدالة لا يوجد لها قيم عظمى أو صغرى محلية.

٨

(١) د'(س) = ١ + ٢ جتا س عندما د'(س) = ٠

∴ جتا س = $-\frac{1}{2}$ ∴ س = $\frac{2\pi}{3}$ ، $\frac{4\pi}{3}$

∴ الدالة قيمة صغرى محلية عند س = $\frac{4\pi}{3}$

، د($\frac{4\pi}{3}$) = $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$

الدالة قيمة عظمى محلية عند س = $\frac{2\pi}{3}$

، د($\frac{2\pi}{3}$) = $\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$

(٢) د'(س) = ٢ - قا² س = ٢ - $\frac{1}{جتا^2 س}$

د'(س) = ٠ عندما قا² س = ٢

ومنها جتا س = $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ ∴ س = $\frac{\pi}{4}$

∴ الدالة قيمة عظمى محلية عند س = $\frac{\pi}{4}$

، د($\frac{\pi}{4}$) = $\frac{\pi}{2}$ - ١

(٣) د'(س) = جتا س - جا س

د'(س) = ٠ عندما ظا س = ١

ومنها س = $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{4}$

∴ الدالة قيمة عظمى محلية عند س = $\frac{\pi}{4}$

، د($\frac{\pi}{4}$) = $\sqrt{2}$

الدالة قيمة صغرى محلية عند س = $\frac{5\pi}{4}$

، د($\frac{5\pi}{4}$) = $-\sqrt{2}$

(٤) د(س) = $\frac{1}{2}$ جا ٢س + ٥ د'(س) = جتا ٢س

د'(س) = ٠ عندما س = $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{3\pi}{4}$

الدالة قيمة صغرى محلية عند س = $\frac{3\pi}{4}$

، د($\frac{3\pi}{4}$) = ٤ $\frac{1}{2}$

الدالة قيمة عظمى محلية عند س = $\frac{\pi}{4}$

، د($\frac{\pi}{4}$) = ٥ $\frac{1}{2}$

(٥) ∵ ص = جا س (١ + جتا س)

∴ ص = جا س + جا س جتا س

∴ ص = جا س + $\frac{1}{2}$ جا ٢س

∴ ص' = جتا س + جتا ٢س

، ص'' = - جا س - ٢ جا ٢س

، ص' = ٠ ⟸ جتا س + جتا ٢س = ٠

∴ ٢ جتا² س + جتا س - ١ = ٠

∴ (٢ جتا س - ١) (جتا س + ١) = ٠

∴ ٢ جتا س - ١ = ٠ ومنها جتا س = $\frac{1}{2}$

∴ س = $\frac{\pi}{3}$ أ، جتا س + ١ = ٠

ومنها جتا س = -١ (مرفوض)

، ∵ ص''($\frac{\pi}{3}$) = - جا $\frac{\pi}{3}$ - ٢ جا $\frac{2\pi}{3}$

= $\frac{-3\sqrt{3}}{2}$ < ٠

∴ عند س = $\frac{\pi}{3}$ توجد قيمة عظمى محلية

∴ د($\frac{\pi}{3}$) = جا $\frac{\pi}{3}$ + $\frac{1}{2}$ جا $\frac{2\pi}{3}$

= $\frac{\sqrt{3}}{2}$ + $\frac{1}{2}$ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = $\frac{3}{4}\sqrt{3}$

∴ القيمة العظمى المحلية = $\frac{3}{4}\sqrt{3}$

٩

(١) د(س) = ٤ $هـ^{-س^2}$

د'(س) = ٤ $هـ^{-س^2}$ × -٢س = -٨س $هـ^{-س^2}$

د'(س) = ٠ عند س = ٠

الدالة قيمة عظمى محلية د(٠) = ٤

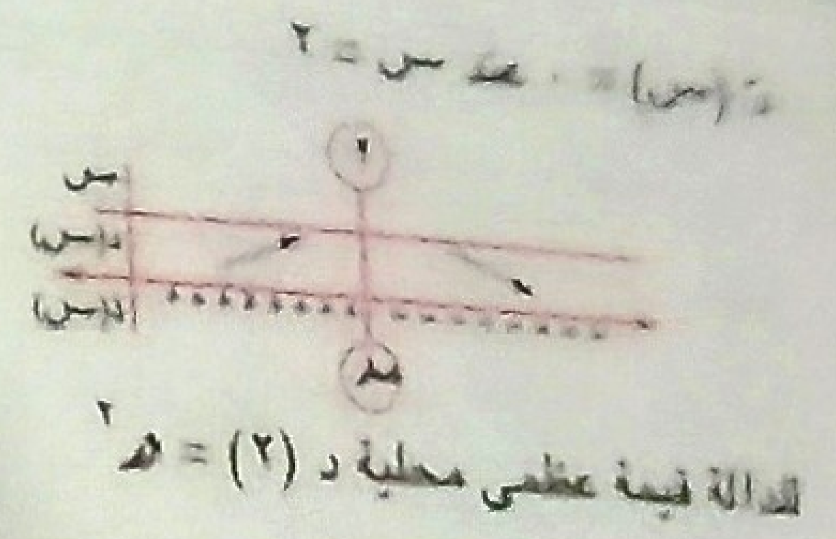
(٢) د(س) = $هـ^{س}$ (٣ - س)

د'(س) = $هـ^{س}$ × -١ + $هـ^{س}$ (٣ - س)

= ٢ $هـ^{س}$ - س $هـ^{س}$

= (٢ - س) $هـ^{س}$

∴ دَ (س) = ٠ عند س = ٢



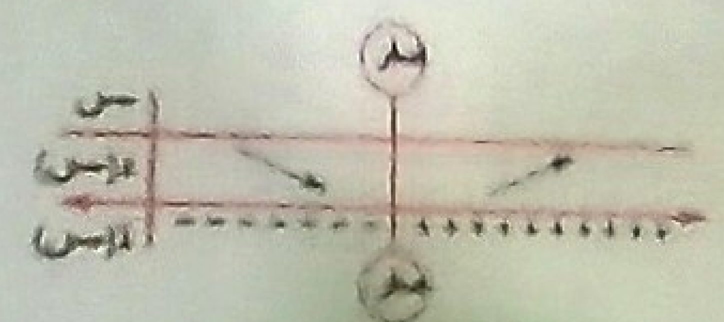
∴ الدالة قيمة عظمى محلية د (٢) = هـ^{٢}

③ د (س) = هـ^{س} + هـ$^{-س}$

دَ (س) = هـ^{س} − هـ$^{-س}$

دَ (س) = ٠ منها هـ^{س} − هـ$^{-س}$ = ٠

∴ س = ٠

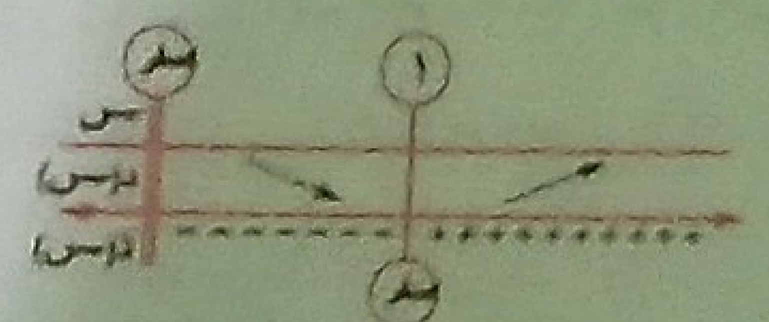


الدالة قيمة صغرى محلية د (٠) = ٢

④ د (س) = س − لو$_{هـ}$ س   س > ٠

دَ (س) = ١ − $\frac{١}{س}$ = $\frac{س - ١}{س}$

دَ (س) = ٠ عند س = ١



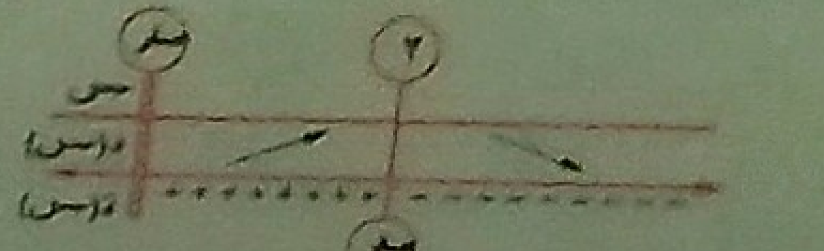
الدالة قيمة صغرى محلية د (١) = ١

⑤ د (س) = ٨ لو$_{هـ}$ س − س^{٢} ، س > ٠

دَ (س) = $\frac{٨}{س}$ − ٢ س   دَ (س) = ٠

فإن : $\frac{٨}{س}$ − ٢ س = ٠   س^{٢} = ٤

∴ س = ٢



الدالة قيمة عظمى محلية د (٢) = ١,٥٥

١٠

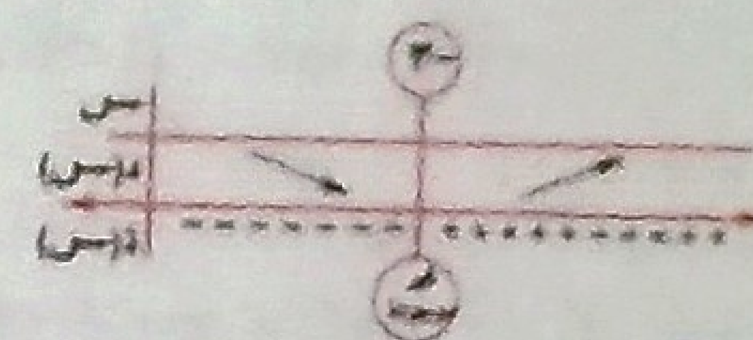
① د (س) = |س + ٣| − ١

= س + ٢ ، س ≥ −٣
   −س − ٤ ، س < −٣

∵ دَ (−٣$^{+}$) = ١ ، دَ (−٣$^{-}$) = −١

∴ دَ (−٣) ليس لها وجود.

∴ دَ (س) = ١ ، س > −٣
   −١ ، س < −٣



∴ الدالة قيمة صغرى محلية عند س = −٣

، د (−٣) = −١

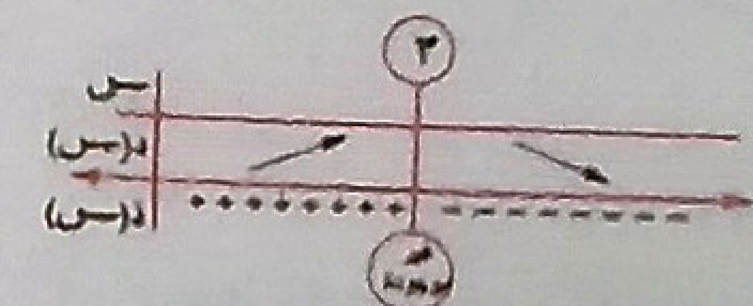
② د (س) = ٥ − |س − ٣|

= −س + ٨ ، س ≥ ٣
   س + ٢ ، س < ٣

∵ دَ (٣$^{+}$) = −١ ، دَ (٣$^{-}$) = ١

∴ دَ (٣) ليس لها وجود.

∴ دَ (س) = −١ ، س > ٣
   ١ ، س < ٣



∴ الدالة قيمة عظمى محلية عند س = ٣

، د (٣) = ٥

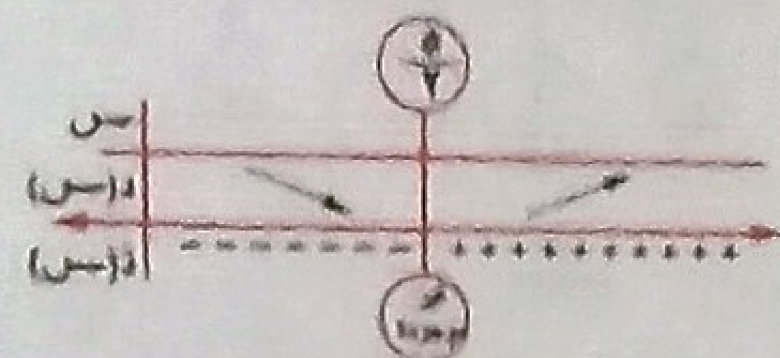
③ د (س) = |٢ س − ٥| + ٤

= ٢ س − ١ ، س ≥ $\frac{٥}{٢}$
   −٢ س + ٩ ، س < $\frac{٥}{٢}$

∵ دَ ($\frac{٥}{٢}^{+}$) = ٢ ، دَ ($\frac{٥}{٢}^{-}$) = −٢

∴ دَ ($\frac{٥}{٢}$) ليس لها وجود.

∴ دَ (س) = ٢ ، س > $\frac{٥}{٢}$
   −٢ ، س < $\frac{٥}{٢}$



∴ الدالة قيمة صغرى محلية عند س = $\frac{٥}{٢}$

، د ($\frac{٥}{٢}$) = ٤

④ د (س) = س |س − ٤|

= س^{٢} − ٤ س ، س ≥ ٤
   −س^{٢} + ٤ س ، س < ٤

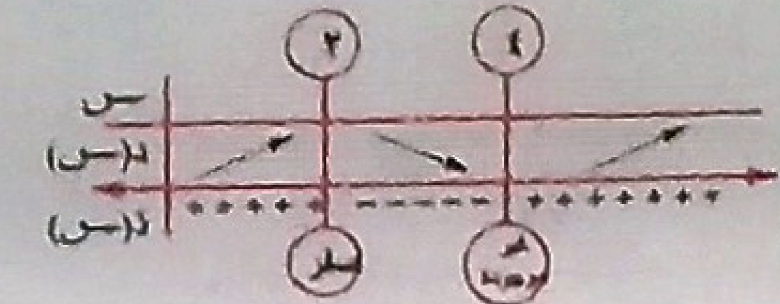
∵ دَ (٤$^{+}$) = ٤ ، دَ (٤$^{-}$) = −٤

∴ دَ (٤) ليس لها وجود.

∴ دَ (س) = ٢ س − ٤ ، س > ٤
   −٢ س + ٤ ، س < ٤

• عند س > ٤ دَ (س) = ٠ عندما س = ٢ (مرفوض)

• عندما س < ٤ دَ (س) = ٠ عندما س = ٢



∴ الدالة قيمة عظمى محلية عند س = ٢

، د (٢) = ٤

∴ الدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٤

، د (٤) = ٠

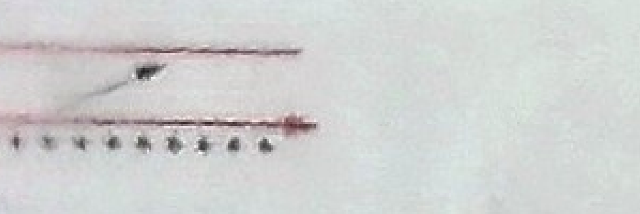
⑤ د (س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} ، س ≥ ٠
   −$\frac{١}{٢}$ س^{٢} ، س < ٠

∵ دَ (٠$^{+}$) = ٠ ، دَ (٠$^{-}$) = ٠

∴ دَ (٠) = ٠

∴ دَ (س) = س ، س ≥ ٠
   −س ، س < ٠

، دَ (س) = ٠ عندما س = ٠



∴ الدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٠

، د (٠) = ٠

⑥ د (س) = س^{٣} − ٣ س^{٢} ، س ≥ ٣
   −س^{٣} + ٣ س^{٢} ، س < ٣

دَ (٣$^{+}$) = ٩ ، دَ (٣$^{-}$) = −٩

∴ دَ (٣) غير موجودة.

∴ دَ (س) = ٣ س^{٢} − ٦ س ، س > ٣
   −٣ س^{٢} + ٦ س ، س < ٣

عندما س > ٣

دَ (س) = ٠ عندما ٣ س (س − ٢) = ٠

س = ٠ (مرفوض) أ، س = ٢ (مرفوض)

عندما س < ٣

، −٣ س (س − ٢)   س = ٠ ، أ، س = ٢

∴ الدالة قيمة عظمى محلية عند س = ٢

، د (٢) = ٤

∴ الدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٠

، د (٠) = ٠

∴ الدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٣

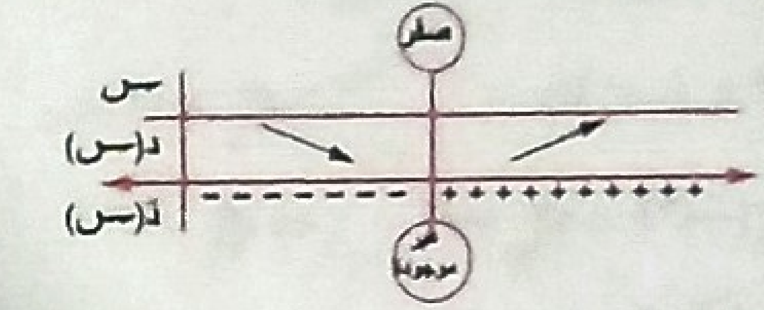
، د (٣) = ٠

١١

① دَ (٠$^{-}$) = ٠ ، دَ (٠$^{+}$) = ٢ ∴ دَ (٠) غير موجودة.

دَ (س) = { ٢ س ، س < ٠
          ٢ ، س > ٠

، دَ (س) = ٠ عندما س = ٠ (مرفوض)

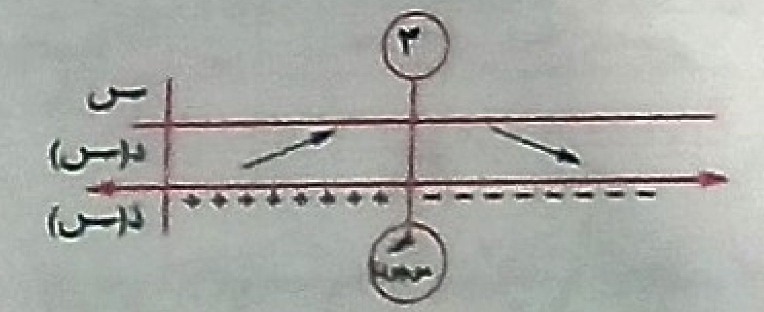


∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند (٠ ، ١)

② دَ (٣$^{+}$) = −١ ، دَ (٣$^{-}$) = ١

∴ دَ (٣) غير موجودة.

∴ دَ (س) = { ١ ، س < ٣
             −١ ، س > ٣

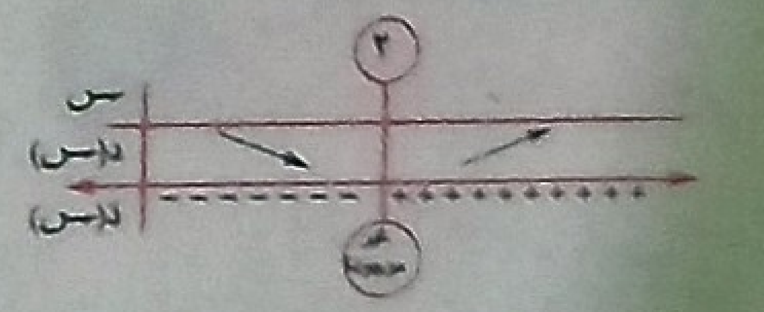


∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند (٣ ، ٥)

③ دَ (٢$^{+}$) = ٣ ، دَ (٢$^{-}$) = −١

∴ دَ (٢) غير موجودة.

∴ دَ (س) = { ٣ ، س > ٢
             −١ ، س < ٢



∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند (٢ ، ١)

④ دَ (١$^{+}$) = ٦ ، دَ (١$^{-}$) = ٦ ∴ دَ (١) = ٦

دَ (س) = { ٦ س ، س ≥ ١
          ٦ ، س < ١

، دَ (س) = ٠ عندما س = ٠ (مرفوض)

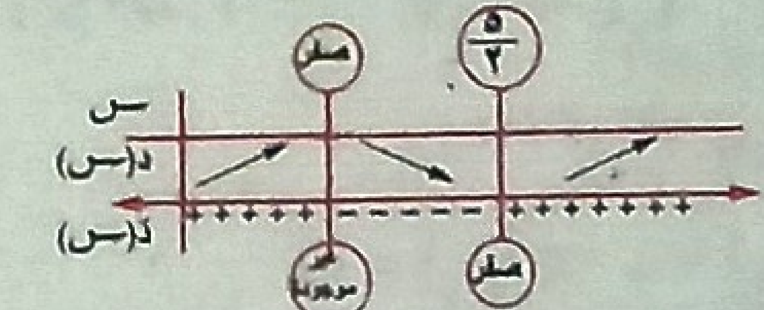
∴ لا يوجد للدالة قيم عظمى أ، صغرى محلية.

⑤ دَ (٠$^{-}$) = ١ ، دَ (٠$^{+}$) = −٥

∴ دَ (٠) غير موجودة.

دَ (س) = { ١ ، س < ٠
          ٢ س − ٥ ، س > ٠

، دَ (س) = ٠ عندما س = $\frac{٥}{٢}$



∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند ($\frac{٥}{٢}$ ، −٢٫٢٥)

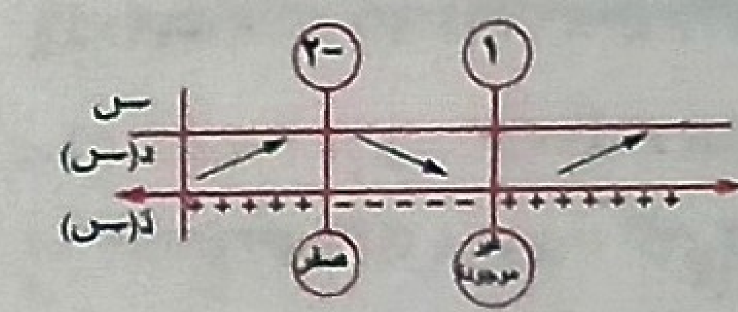
للدالة قيمة عظمى محلية عند (٠ ، ٤)

⑥ دَ (١$^{-}$) = −٦ ، دَ (١$^{+}$) = ٢

∴ دَ (١) غير موجودة.

دَ (س) = { −٤ − ٢ س ، س < ١
          ٢ ، س > ١

، دَ (س) = ٠ عندما س = −٢



∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند (١ ، −٢)

، للدالة قيمة عظمى محلية عند (−٢ ، ٧)

⑦ دَ (١$^{-}$) = ٤ ، دَ (١$^{+}$) = ٢

∴ دَ (١) غير موجودة.

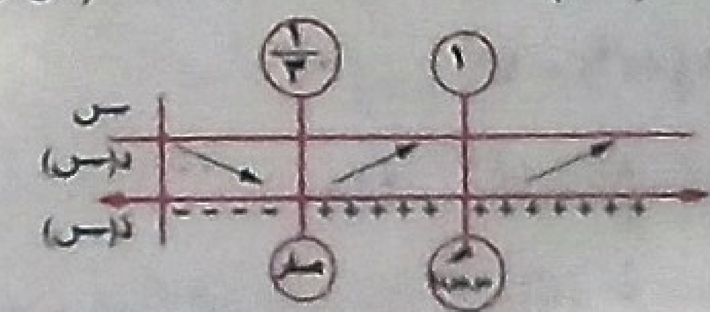
دَ (س) = { ٦ س − ٢ ، س < ١
          ٢ س ، س > ١

• عندما س < ١

∴ دَ (س) = ٠ عندما س = $\frac{١}{٣}$

• عندما س > ١

∴ دَ (س) = ٠ عندما س = ٠ (مرفوض)



∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند ($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{−١٦}{٣}$)

⑧ دَ (٠$^{-}$) = ٠ ، دَ (٠$^{+}$) = −٢

∴ دَ (٠) غير موجودة.

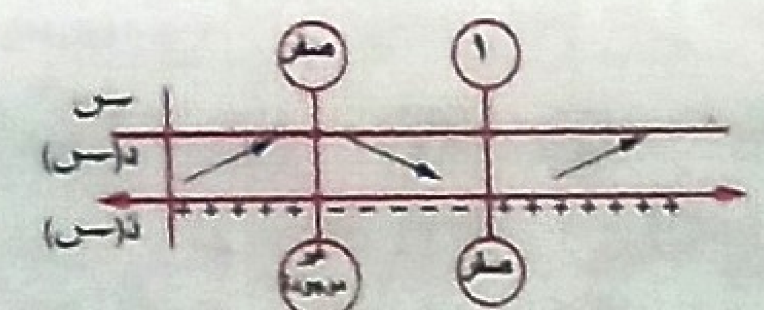
دَ (س) = { ٣ س^{٢} − ٦ س ، س < ٠
          ٢ س − ٢ ، س > ٠

• عندما س < ٠

دَ (س) = ٠ عند س = ٠ (مرفوض)

أ، س = ٢ (مرفوض)

• عندما س > ٠ دَ (س) = ٠ عند س = ١



∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند (٠ ، ٠)

للدالة قيمة صغرى محلية عند (١ ، −١)

١٢

ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} + حـ س + ء

صَ = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س + حـ

صً = ٦ أ س + ٢ ب

∵ (٣ ، ٠) ∈ للدالة

∴ ٠ = ٢٧ أ + ٩ ب + ٣ حـ + ء (١)

، (٠ ، ٦) ∈ للدالة ∴ ٦ = ء

، (٢ ، ٢) ∈ للدالة

٢ = ٨ أ + ٤ ب + ٢ حـ + ٦ (٢)

، (٢ ، ٢) نقطة حرجة.

∴ دَ (س) = ٠ عند س = ٢

∴ ٠ = ١٢ أ + ٤ ب + حـ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) :

∴ أ = −١ ، ب = ٥ ، حـ = −٨

∴ دً (٢) = −٢ ∴ (٢ ، ٢) نقطة عظمى محلية.

١٣

ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} + حـ س + ء

صَ = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س + حـ

صً = ٦ أ س + ٢ ب

∵ (−٣ ، ٣) نقطة حرجة.

∴ دَ (س) = ٠ عند س = −٣

٠ = ٢٧ أ − ٦ ب + حـ (١)

، (−٣ ، ٣) ∈ للدالة

∴ ٣ = −٢٧ أ + ٩ ب − ٣ حـ + ء (٢)

∴ (−١ ، −١) نقطة حرجة

∴ دَ (س) = ٠ عند س = −١

٠ = ٣ أ − ٢ ب + حـ (٣)

(−١ ، −١) ∈ للدالة

∴ −١ = −أ + ب − حـ + ء (٤)

من (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) :

∴ أ = ١ ، ب = ٦ ، حـ = ٩ ، ء = ٣

دً (−١) = ٦ (موجب) ∴ نقطة صغرى محلية.

دً (−٣) = −٦ (سالب) ∴ نقطة عظمى محلية.

١٤

ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} + حـ س + ء

صَ = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س + حـ

صً = ٦ أ س + ٢ ب

(٠ ، ٠) ∈ للدالة ∴ ٠ = ء

عند س = ٣ نقطة حرجة

∴ ٠ = ٢٧ أ + ٦ ب + حـ (١)

، ميل المماس = ٤ عند س = ١

∴ ٣ أ + ٢ ب + حـ = ٤ (٢)

، دالة لها قيمة عظمى محلية عند س = ٢

∴ ٠ = ١٢ أ + ٤ ب + حـ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣)

∴ أ = $\frac{٢}{٣}$ ، ب = −٥ ، حـ = ١٢

١٥ ① (ب) ② (ب) ③ (د) ④ (أ)

إرشادات لحل رقم ١٥

① ∵ ص = س^س ∴ لوهـ ص = س لوهـ س

∴ ١/ص × صَ = س × ١/س + لوهـ س

= ١ + لوهـ س

∴ صَ = ص (١ + لوهـ س) = س^س (١ + لوهـ س)

عند نقطة التوقف للدالة يكون صَ = ٠

∴ س^س (١ + لوهـ س) = ٠

∴ لوهـ س = -١ ∴ س = هـ^-١ = ١/هـ

② ∵ د(س) = س + ١/س

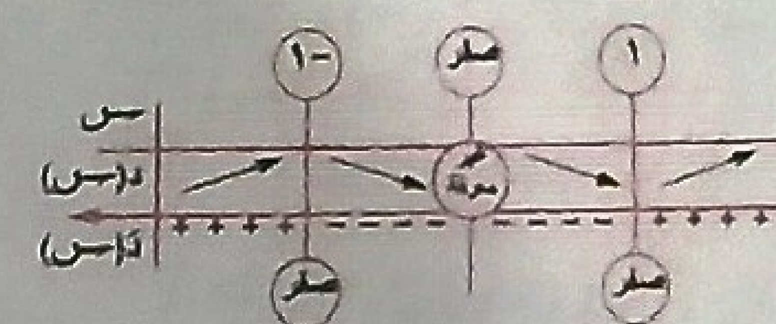
∴ دَ(س) = ١ - ١/س²

بوضع دَ(س) = ٠ ∴ س² = ١

∴ س = ±١

∴ عند س = -١ توجد قيمة عظمى للدالة

، عند س = ١ توجد قيمة صغرى للدالة



∴ أ = -١ ، ب = ١

∴ د(أ) = د(-١) = -٢ ، د(ب) = د(١) = ٢

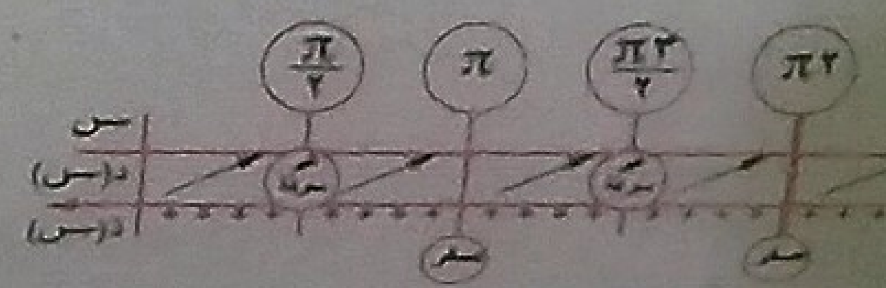
∴ د(أ) < د(ب)

③ ∵ د(س) = ظا س - س

∴ دَ(س) = قا² س - ١ = ظا² س

بوضع دَ(س) = ٠ ∴ ظا² س = ٠

∴ س = ن π حيث ن ∈ ص



∴ الدالة تزايدية على الدوام ولها عدد لا نهائي من النقط الحرجة وليس لها قيم عظمى أو صغرى محلية.

④ ∵ د(س) = لوهـ ع(س)

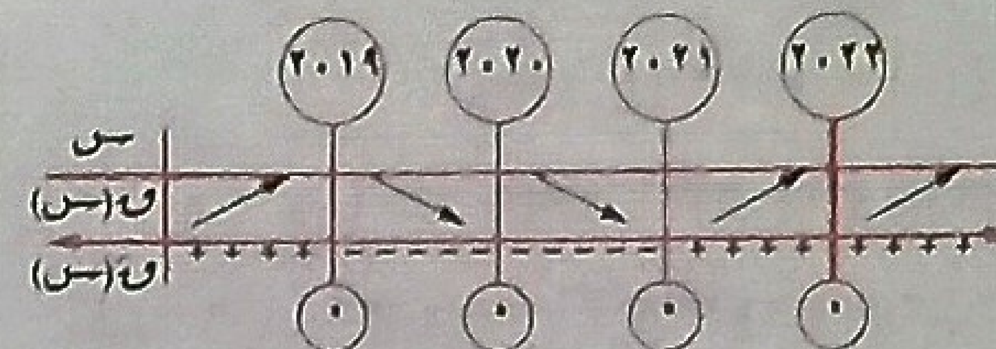
∴ ع(س) = هـ^د(س)

∴ عَ(س) = هـ^د(س) × دَ(س)

وبوضع عَ(س) = ٠

∴ دَ(س) = ٠

∴ س = ٢٠١٩ أ، ٢٠٢٠ أ، ٢٠٢١ أ، ٢٠٢٢



∴ عند س = ٢٠١٩ توجد قيمة عظمى للدالة ع(س)

∴ القيمة العظمى المحلية هي د(٢٠١٩)

١٦

① د(س) = { (س - ٣)(س - ٥) ، س ≥ ٥ ؛ -(س - ٣)(س - ٥) ، ٣ ≤ س < ٥ ؛ (س - ٣)(س - ٥) ، س < ٣ }

∵ دَ(٥+) = ٢ ، دَ(٥-) = -٢

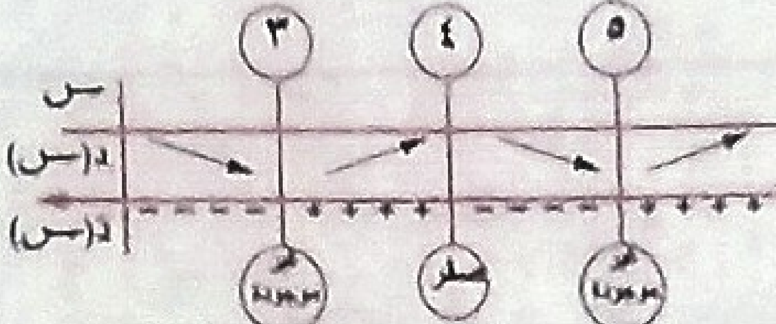
∴ دَ(٥) غير موجودة

، دَ(٣+) = ٢ ، دَ(٣-) = -٢

∴ دَ(٣) غير موجودة.

دَ(س) = { ٢س - ٨ ، س > ٥ ؛ -٢س + ٨ ، ٣ < س < ٥ ؛ ٢س - ٨ ، س < ٣ }

، دَ(س) = ٠ عندما س = ٤



∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند س = ٤

، د(٤) = ١ +

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٥

، د(٥) = ٠

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٣

، د(٣) = ٠

② د(س) = { س² - ٤س + ٣ ، س ≤ ٣ ؛ ٢س - ٦ ، ٣ < س < ٤ ؛ -س + ٦ ، ٤ ≤ س < ٦ ؛ س - ٦ ، س ≥ ٦ }

دَ(٣-) = ٢ ، دَ(٣+) = ٢ ∴ دَ(٣) = ٢

، دَ(٤-) = ٢ ، دَ(٤+) = -١

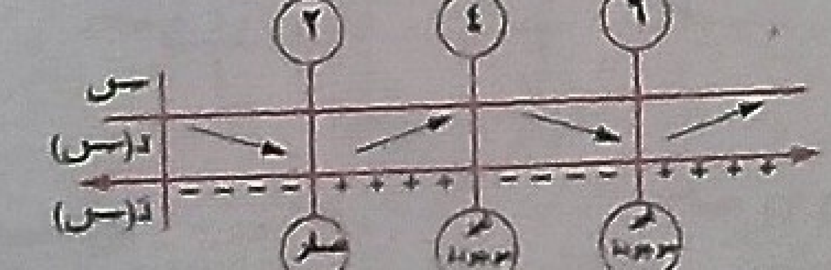
∴ دَ(٤) غير موجودة

، دَ(٦-) = -١ ، دَ(٦+) = ١

∴ دَ(٦) غير موجودة.

دَ(س) = { ٢س - ٤ ، س < ٣ ؛ ٢ ، ٣ ≤ س < ٤ ؛ -١ ، ٤ < س < ٦ ؛ ١ ، س > ٦ }

، دَ(س) = ٠ عندما س = ٢



∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند (٦ ، ٠)

للدالة قيمة صغرى محلية عند (٢ ، -١)

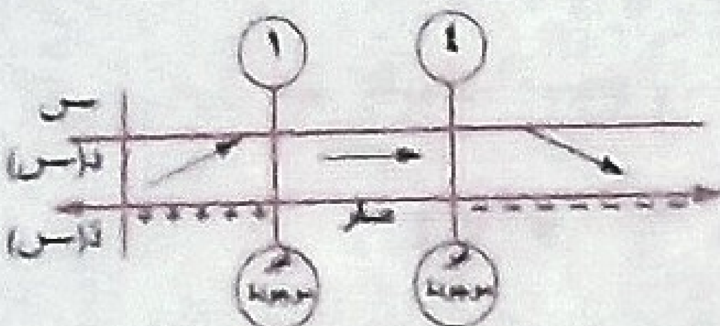
للدالة قيمة عظمى محلية عند (٤ ، ٢)

③ دَ(١-) = ٢ ، دَ(١+) = ٠ ∴ دَ(١) غير موجودة.

، دَ(٤-) = ٠ ، دَ(٤+) = -١

∴ دَ(٤) غير موجودة.

دَ(س) = { ٢ ، س < ١ ؛ ٠ ، ١ < س < ٤ ؛ -١ ، س > ٤ }



∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند س = ٤

، د(٤) = ٢

للدالة قيمة عظمى محلية عند س = ١ ، د(١) = ٢

لكل س ∈]١ ، ٤[حيث دَ(س) = ٠

هي نقط حرجة عندها قيمة عظمى وصغرى محلية في نفس الوقت.

④ دَ(-١-) = -٢ ، دَ(-١+) = ٠

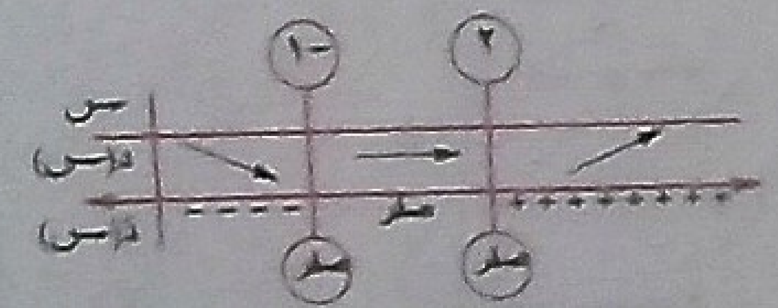
∴ دَ(-١) غير موجودة.

دَ(٢-) = ٠ ، دَ(٢+) = ٤

∴ دَ(٢) غير موجودة.

دَ(س) = { ٢س ، س < -١ ؛ ٠ ، -١ < س < ٢ ؛ ٤ ، س > ٢ }

، دَ(س) = ٠ عندما س ∈]-١ ، ٢[



∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = -١

، د(-١) = ٢

للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٢ ، د(٢) = ٢

لكل س ∈]-١ ، ٢[حيث دَ(س) = ٠

هي نقط حرجة عندها قيمة عظمى وصغرى محلية في نفس الوقت.

١٧

بحل المعادلتين :

س^{٢} - ٤ س + ٣ = ٨ س - ٢ س^{٢} - ٩

∴ ٣ س^{٢} - ١٢ س + ١٢ = ٠

ومنها س = ٢

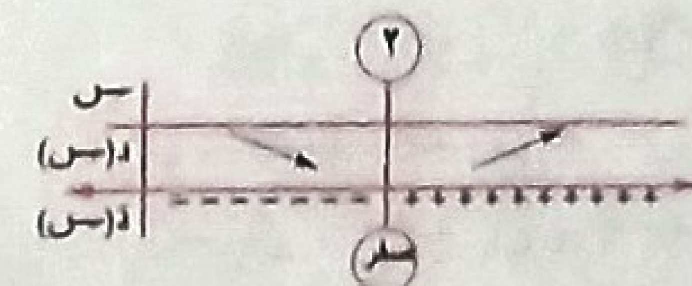
ءص$_{١}$/ءس = ٢ س - ٤ ، ءص$_{٢}$/ءس = ٨ - ٤ س

(ءص$_{١}$/ءس)$_{(س = ٢)}$ = ٤ - ٤ = ٠

(ءص$_{٢}$/ءس)$_{(س = ٢)}$ = ٨ - ٨ = ٠

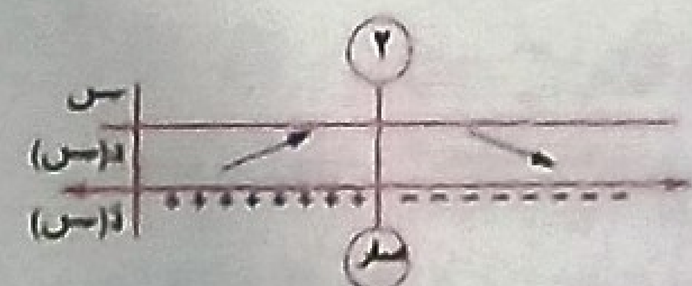
∴ (ءص$_{١}$/ءس) = (ءص$_{٢}$/ءس) عند س = ٢

∴ نقطة التماس هى (٢ ، -١) بالنسبة للدالة د$_{١}$



∴ للدالة د$_{١}$ قيمة صغرى محلية عند س = ٢

بالنسبة للدالة د$_{٢}$



∴ للدالة د$_{٢}$ قيمة عظمى محلية عند س = ٢

إجابات تمارين 11

١

(١) د (س) = س^{٢} - ٦ س + ١٢

∴ دَ (س) = ٢ س - ٦

، دَ (س) = ٠ عندما س = ٣ ∈ [-١ ، ٥]

، ∵ د (-١) = ٢٠ ، د (٣) = ٤ ، د (٥) = ٨

∴ القيمة العظمى المطلقة هى ٢٠

وتبلغها الدالة عند س = -١

، القيمة الصغرى المطلقة هى ٤ وتبلغها الدالة عند س = ٣

(٢) د (س) = ٢ - ٥ س - س^{٢}

∴ دَ (س) = -٥ - ٢ س

، دَ (س) = ٠ عند س = -٥/٢ ∈ [-٤ ، ٢]

، ∵ د (-٤) = ٧ ، د (-٥/٢) = ٩,٢٥

، د (٢) = -٢١

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٩,٢٥

وتبلغها عند س = -٥/٢

ولها قيمة صغرى مطلقة = -٢١ وتبلغها عند س = ٢

(٣) ص = س^{٣} - ٩ ءص/ءس = ٣ س^{٢}

، ءص/ءس = ٠ عند س = صفر ∈ [٠ ، ٢]

، ∵ د (٠) = -٩ ، د (٢) = -١

للدالة قيمة عظمى مطلقة = -١ وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة صغرى مطلقة = -٩ وتبلغها عند س = صفر

(٤) د (س) = س^{٤} + ٢ ∴ دَ (س) = ٤ س^{٣}

، دَ (س) = ٠ عند س = ٠ ∈ [-١ ، ٢]

، ∵ د (-١) = ٣ ، د (٠) = ٢ ، د (٢) = ١٨

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ١٨ وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة صغرى مطلقة = ٢ وتبلغها عند س = صفر

(٥) د (س) = س (س^{٢} - ١٢) = س^{٣} - ١٢ س

∴ دَ (س) = ٣ س^{٢} - ١٢

، دَ (س) = ٠

عند س = ٢ ∈ [-١ ، ٤]

أ، س = -٢ ∉ [-١ ، ٤]

، ∵ د (-١) = ١١ ، د (٢) = -١٦

، د (٤) = ١٦

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ١٦ وتبلغها عند س = ٤

ولها قيمة صغرى مطلقة = -١٦ وتبلغها عند س = ٢

(٦) د (س) = س^{٣} - ٣ س^{٢}

∴ دَ (س) = ٣ س^{٢} - ٦ س = ٣ س (س - ٢)

، دَ (س) = ٠

عند س = ٠ ∉ [١ ، ٤] ، س = ٢ ∈ [١ ، ٤]

، ∵ د (١) = -٢ ، د (٢) = -٤

، د (٤) = ١٦

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ١٦ وتبلغها عند س = ٤

ولها قيمة صغرى مطلقة = -٤ وتبلغها عند س = ٢

(٧) د (س) = س^{٣} - ٩ س^{٢} + ٢٤ س - ١

∴ دَ (س) = ٣ س^{٢} - ١٨ س + ٢٤

، دَ (س) = ٠

∴ س = ٤ ∈ [٠ ، ٥] ، س = ٢ ∈ [٠ ، ٥]

، ∵ د (٠) = -١ ، د (٢) = ١٩

، د (٤) = ١٥ ، د (٥) = ١٩

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ١٩

وتبلغها عند س = ٢ ، عند س = ٥

ولها قيمة صغرى مطلقة = -١ وتبلغها عند س = ٠

(٨) د (س) = س^{٣} - ٩ س^{٢} + ١٥ س

∴ دَ (س) = ٣ س^{٢} - ١٨ س + ١٥

= ٣ (س^{٢} - ٦ س + ٥)

، دَ (س) = ٠ عند س = ٥ ∉ [-٢ ، ٤]

أ، س = ١ ∈ [-٢ ، ٤]

، ∵ د (-٢) = -٧٤ ، د (١) = ٧

، د (٤) = -٢٠

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٧ وتبلغها عند س = ١

ولها قيمة صغرى مطلقة = -٧٤ وتبلغها عند س = -٢

(٩) د (س) = س^{٣} + س^{٢} - ٥ س - ٥

∴ دَ (س) = ٣ س^{٢} + ٢ س - ٥

، دَ (س) = ٠

عند س = -٥/٣ ∈ [-$\sqrt{٥}$ ، ٠]

أ، س = ١ ∉ [-$\sqrt{٥}$ ، ٠]

، ∵ د (-$\sqrt{٥}$) = ٠ ، د (-٥/٣) = ٤٠/٢٧ ، د (٠) = -٥

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ١ ١٣/٢٧ تبلغها عند س = -٥/٣

ولها قيمة صغرى مطلقة = -٥ تبلغها عند س = ٠

(١٠) ص = ٢ س^{٣} + ٣ س^{٢} - ١٢ س + ١

∴ ءص/ءس = ٦ س^{٢} + ٦ س - ١٢

= ٦ (س^{٢} + س - ٢)

، ءص/ءس = ٠

عند س = -٢ ∉ [-١ ، ٥]

أ، س = ١ ∈ [-١ ، ٥]

، ∵ د (-١) = ١٤ ، د (١) = -٦ ، د (٥) = ٢٦٦

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٢٦٦

وتبلغها عند س = ٥

ولها قيمة صغرى مطلقة = -٦ وتبلغها عند س = ١

(١١) ص = ٢ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ١

∴ ءص/ءس = ٦ س^{٢} + ٦ س = ٦ س (س + ١)

، ءص/ءس = ٠ عند س = ٠ ∈ [-١٠ ، ١٢]

، س = -١ ∈ [-١٠ ، ١٢]

، ∵ د (-١٠) = -١٦٩٩ ، د (-١) = ٢

، د (٠) = ١ ، د (١٢) = ٣٨٨٩

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٣٨٨٩

وتبلغها عند س = ١٢

ولها قيمة صغرى مطلقة = -١٦٩٩

وتبلغها عند س = -١٠

(١٢) د (س) = (س - ١) (س - ٢)^{٢}

∴ دَ (س) = (س - ١) × ٢ (س - ٢)

+ (س - ٢)^{٢}

= (س - ٢) (٣ س - ٤)

، دَ (س) = ٠

عند س = ٢ ∈ [٠ ، ٥] ، س = $\frac{٤}{٣}$ ∈ [٠ ، ٥]

، ∵ د (٠) = −٤ ، د $\left(\frac{٤}{٣}\right)$ = $\frac{٤}{٢٧}$

، د (٣) = ٠ ، د (٥) = ٣٦

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٣٦

وتبلغها عند س = ٥

ولها قيمة صغرى مطلقة = −٤ وتبلغها عند س = ٠

(١٣) د (س) = ٢ س − ٣ $\text{س}^{\frac{٢}{٣}}$

∴ دَ (س) = ٢ − ٢ $\text{س}^{-\frac{١}{٣}}$ = ٢ − $\frac{٢}{\sqrt[٣]{\text{س}}}$

، دَ (س) = ٠ عند س = ١ ∈ [−١ ، ٣]

، دَ (س) غير معرفة عند س = ٠ ∈ [−١ ، ٣]

، ∵ د (−١) = −٥ ، د (٠) = ٠ ، د (١) = −١

، د (٣) = ٦ − ٣ × $\sqrt[٣]{٩}$ ≃ −٠,٢٤

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = صفر

وتبلغها عند س = ٠

ولها قيمة صغرى مطلقة = −٥ وتبلغها عند س = −١

(١٤) د (س) = ٣ $\text{س}^{٤}$ − ٤ $\text{س}^{٣}$

∴ دَ (س) = ١٢ $\text{س}^{٣}$ − ١٢ $\text{س}^{٢}$

= ١٢ $\text{س}^{٢}$ (س − ١)

، دَ (س) = ٠

عند س = ٠ ∈ [−١ ، ٢]

، س = ١ ∈ [−١ ، ٢]

، ∵ د (−١) = ٧ ، د (٠) = ٠

، د (١) = −١ ، د (٢) = ١٦

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ١٦

وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة صغرى مطلقة = −١ وتبلغها عند س = ١

(١٥) د (س) = ٢ $\text{س}^{٤}$ − $\text{س}^{٢}$ + ١

∴ دَ (س) = ٨ $\text{س}^{٣}$ − ٢ س

= ٢ س (٤ $\text{س}^{٢}$ − ١)

، دَ (س) = ٠ عند س = ٠ ∈ [−١ ، ١]

، س = $\frac{١}{٢}$ ∈ [−١ ، ١]

، س = $\frac{-١}{٢}$ ∈ [−١ ، ١]

، ∵ د (−١) = ٢ ، د $\left(\frac{-١}{٢}\right)$ = $\frac{٧}{٨}$

، د $\left(\frac{١}{٢}\right)$ = $\frac{٧}{٨}$

، د (١) = ٢

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٢

تبلغها عند كل من س = −١ ، س = ١

ولها قيمة صغرى مطلقة = $\frac{٧}{٨}$

تبلغها عند كل من س = $\frac{-١}{٢}$ ، س = $\frac{١}{٢}$

٢

(١) (أ) (٢) (أ) (٣) (جـ)

(٤) (جـ) (٥) (د)

٣

دَ (س) = أ س + ب

، دَ (س) = ٠ عند س = $\frac{-ب}{أ}$

، د (س) = ∫ دَ (س) ء س = $\frac{\text{أ س}^{٢}}{٢}$ + ب س + ث

، ∵ أ < ٠ ، د دالة تربيعية

∴ د لها قيمة عظمى مطلقة عند س = $\frac{-ب}{أ}$

٤

(١) ص = $\frac{\text{س}}{\text{س} - ١}$

∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = $\frac{(\text{س} - ١)(١) - \text{س}(١)}{(\text{س} - ١)^{٢}}$ = $\frac{-١}{(\text{س} - ١)^{٢}}$

، $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ غير معرفة عند س = ١ ∉ [٢ ، ٤]

∴ $(\text{ص})_{\text{س} = ٢}$ = ٢ ، $(\text{ص})_{\text{س} = ٤}$ = $\frac{٤}{٣}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٢ وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة صغرى مطلقة = $\frac{٤}{٣}$ وتبلغها عند س = ٤

(٢) د (س) = $\frac{\text{س}^{٢} + ٩}{\text{س}}$

∴ دَ (س) = $\frac{\text{س}(٢\,\text{س}) - (\text{س}^{٢} + ٩)(١)}{\text{س}^{٢}}$

= $\frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س}^{٢}}$

، دَ (س) = ٠ عند س = ٣ ∈ [١ ، ٦]

أ، س = −٣ ∉ [١ ، ٦]

، دَ (س) غير معرفة عند س = ٠ ∉ [١ ، ٦]

، ∵ د (١) = ١٠ ، د (٣) = ٦ ، د (٦) = $\frac{١٥}{٢}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ١٠

وتبلغها عند س = ١

ولها قيمة صغرى مطلقة = ٦ وتبلغها عند س = ٣

(٣) د (س) = $\frac{٤\,\text{س}}{\text{س}^{٢} + ١}$

دَ (س) = $\frac{(\text{س}^{٢} + ١)(٤) - (٤\,\text{س})(٢\,\text{س})}{(\text{س}^{٢} + ١)^{٢}}$

= $\frac{-٤\,\text{س}^{٢} + ٤}{(\text{س}^{٢} + ١)^{٢}}$

∴ دَ (س) = ٠ عند س = ١ ∈ [−١ ، ٣]

أ، س = −١ ∈ [−١ ، ٣]

، ∵ د (−١) = −٢ ، د (١) = ٢

، د (٣) = $\frac{٦}{٥}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٢ وتبلغها عند س = ١

ولها قيمة صغرى مطلقة = −٢ وتبلغها عند س = −١

(٤) د (س) = س + $\frac{١}{\text{س} + ٢}$

∴ دَ (س) = ١ + $\frac{-١}{(\text{س} + ٢)^{٢}}$ ، دَ (س) = ٠

عند س = −١ ∉ [٠ ، ٣] ، س = −٣ ∉ [٠ ، ٣]

، دَ (س) غير معرفة عند س = −٢ ∉ [٠ ، ٣]

، ∵ د (٠) = $\frac{١}{٢}$ ، د (٣) = ٣ $\frac{١}{٥}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٣ $\frac{١}{٥}$ وتبلغها عند س = ٣

ولها قيمة صغرى مطلقة = $\frac{١}{٢}$ وتبلغها عند س = ٠

(٥) د (س) = س + $\frac{١}{\text{س}}$

∴ دَ (س) = ١ − $\frac{١}{\text{س}^{٢}}$

، دَ (س) = ٠ عند س = ١ ∈ [$\frac{١}{٢}$ ، ٢]

، س = −١ ∉ [$\frac{١}{٢}$ ، ٢]

، دَ (س) غير معرفة عند س = ٠ ∉ [$\frac{١}{٢}$ ، ٢]

، ∵ د $\left(\frac{١}{٢}\right)$ = ٢ $\frac{١}{٢}$ ، د (١) = ٢

، د (٢) = ٢ $\frac{١}{٢}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٢ $\frac{١}{٢}$

وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة صغرى مطلقة = ٢ وتبلغها عند س = ١

(٦) د (س) = $\frac{\text{س}^{٢} + \text{س} + ١}{\text{س}^{٢} - \text{س} + ١}$

∴ دَ (س)

= $\frac{(\text{س}^{٢} - \text{س} + ١)(٢\,\text{س} + ١) - (\text{س}^{٢} + \text{س} + ١)(٢\,\text{س} - ١)}{(\text{س}^{٢} - \text{س} + ١)^{٢}}$

= $\frac{-٢\,\text{س}^{٢} + ٢}{(\text{س}^{٢} - \text{س} + ١)^{٢}}$

، دَ (س) = ٠ عند س = ± ١ ∈ [−٢ ، ٢]

، ∵ د (−٢) = $\frac{٣}{٧}$ ، د (−١) = $\frac{١}{٣}$

، د (١) = ٣ ، د (٢) = $\frac{٧}{٣}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٣ وتبلغها عند س = ١

ولها قيمة صغرى مطلقة = $\frac{١}{٣}$

وتبلغها عند س = −١

٥

(١) د (س) = جا س ∴ دَ (س) = جتا س

، دَ (س) = ٠ ∴ جتا س = ٠

منها س = $\frac{\pi}{٢}$ ∉ [$\frac{٥\pi}{٦}$ ، $\frac{١١\pi}{٦}$]

أ، س = $\frac{٣\pi}{٢}$ ∈ [$\frac{٥\pi}{٦}$ ، $\frac{١١\pi}{٦}$]

، ∵ د $\left(\frac{٥\pi}{٦}\right)$ = $\frac{١}{٢}$ ، د $\left(\frac{٣}{٢}\pi\right)$ = −١

، د$\left(\frac{١١\pi}{٦}\right)$ = $\frac{١}{٢}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = $\frac{١}{٢}$

وتبلغها عند س = $\frac{٥\pi}{٦}$

ولها قيمة صغرى مطلقة = −١

وتبلغها عند س = $\frac{١١\pi}{٦}$

② د(س) = جاس + جتاس

∴ دَ(س) = جتاس − جاس

، دَ(س) = ٠ ∴ جتاس − جاس = ٠

∴ ظاس = ١

س = $\frac{\pi}{٤}$ ∈ [٠ ، ٢π]

أ، س = $\frac{٥\pi}{٤}$ ∈ [٠ ، ٢π]

، ∵ د(٠) = ١ ، د$\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ = $\sqrt{٢}$

، د$\left(\frac{٥\pi}{٤}\right)$ = −$\sqrt{٢}$ ، د(٢π) = ١

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = $\sqrt{٢}$

وتبلغها عند س = $\frac{\pi}{٤}$

ولها قيمة صغرى مطلقة = −$\sqrt{٢}$

وتبلغها عند س = $\frac{٥\pi}{٤}$

③ د(س) = ٢ جاس + جتا٢س

∴ دَ(س) = ٢ جتاس − ٢ جا٢س

= ٢ جتاس − ٤ جاس جتاس

= ٢ جتاس (١ − ٢ جاس)

، دَ(س) = ٠ عند ٢ جتاس = ٠

ومنها س = $\frac{\pi}{٢}$ ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

أ، س = $\frac{٣\pi}{٢}$ ∉ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

أ، ١ − ٢ جاس = ٠ ومنها جاس = $\frac{١}{٢}$

∴ س = $\frac{\pi}{٦}$ ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

أ، س = $\frac{٥\pi}{٦}$ ∉ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

، ∵ د(٠) = ١ ، د$\left(\frac{\pi}{٦}\right)$ = $\frac{٣}{٢}$

، د$\left(\frac{\pi}{٢}\right)$ = ١

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = $\frac{٣}{٢}$ وتبلغها عند س = $\frac{\pi}{٦}$

ولها قيمة صغرى مطلقة = ١

وتبلغها عند س = ٠ أ، س = $\frac{\pi}{٢}$

④ د(س) = س هـ$^{-س}$

∴ دَ(س) = س هـ$^{-س}$ × −١ + هـ$^{-س}$

= −س هـ$^{-س}$ + هـ$^{-س}$

= هـ$^{-س}$ (١ − س)

، دَ(س) = ٠ ∴ هـ$^{-س}$ (١ − س) = ٠

ومنها س = ١ ∈ [٠ ، ٢]

، ∵ د(٠) = صفر ، د(١) = $\frac{١}{هـ}$ ، د(٢) = $\frac{٢}{هـ^{٢}}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = $\frac{١}{هـ}$ تبلغها عند س = ١

ولها قيمة صغرى مطلقة = صفر تبلغها عند س = صفر

⑤ د(س) = ١٠ س هـ$^{-س}$

∴ دَ(س) = ١٠ س هـ$^{-س}$ (−١) + ١٠ هـ$^{-س}$

= ١٠ هـ$^{-س}$ (١ − س)

، دَ(س) = ٠ ∴ ١٠ هـ$^{-س}$ (١ − س) = ٠

∴ س = ١ ∈ [٠ ، ٤]

، ∵ د(٠) = صفر ، د(١) = ١٠ هـ$^{-١}$ = $\frac{١٠}{هـ}$

، د(٤) = $\frac{٤٠}{هـ^{٤}}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = $\frac{١٠}{هـ}$

وتبلغها عند س = ١

ولها قيمة صغرى مطلقة = ٠ وتبلغها عند س = ٠

⑥ د(س) = س هـ^{س}

∴ دَ(س) = س هـ^{س} + هـ^{س} = هـ^{س} (١ + س)

، دَ(س) = ٠ ∴ هـ^{س} (١ + س) = ٠

منها س = −١ ∈ [−٣ ، ١]

، ∵ د(−٣) = −$\frac{٣}{هـ^{٣}}$ ، د(−١) = −$\frac{١}{هـ}$

، د(١) = هـ

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = هـ وتبلغها عند س = ١

ولها قيمة صغرى مطلقة = $\frac{-١}{هـ}$ وتبلغها عند س = −١

⑦ د(س) = س^{٢} هـ$^{-س}$

∴ دَ(س) = س^{٢} هـ$^{-س}$ (−١) + ٢ س هـ$^{-س}$

= س هـ$^{-س}$ (٢ − س)

، دَ(س) = ٠ منها س = ٠ ∈ [−١ ، ٣]

، س = ٢ ∈ [−١ ، ٣]

، ∵ د(−١) = هـ ، د(٠) = صفر

، د(٢) = $\frac{٤}{هـ^{٢}}$ ، د(٣) = $\frac{٩}{هـ^{٣}}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هي هـ وتبلغها عند

س = −١

ولها قيمة صغرى مطلقة هي صفر

وتبلغها عند س = صفر

٦

① د(س) = $\sqrt{س - ١}$ ∴ دَ(س) = $\frac{١}{٢\sqrt{س - ١}}$

، دَ(س) غير معرفة عند س = ١ ∉ [٢ ، ٥]

، ∵ د(٢) = ١ ، د(٥) = ٢

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هي ٢ وتبلغها عند

س = ٥

ولها قيمة صغرى مطلقة هي ١ وتبلغها عند س = ٢

② د(س) = $\sqrt[٣]{س}$ ∴ دَ(س) = $\frac{١}{٣\sqrt[٣]{س^{٢}}}$

، دَ(س) غير معرفة عند س = ٠ ∈ [−٨ ، ٨]

، ∵ د(−٨) = −٢ ، د(٠) = ٠ ، د(٨) = ٢

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هي ٢ وتبلغها عند س = ٨

ولها قيمة صغرى مطلقة هي −٢ وتبلغها عند س = −٨

③ د(س) = $\sqrt{١٦ - س^{٢}}$

∴ دَ(س) = $\frac{١}{٢}$ (١٦ − س^{٢})$^{-\frac{١}{٢}}$ × −٢ س

= $\frac{-س}{\sqrt{١٦ - س^{٢}}}$

، دَ(س) = ٠ عند س = ٠ ∈ [−٤ ، ٣]

، دَ(س) غير معرفة عند س = ٤ ∉ [−٤ ، ٣]

، س = −٤ ∈ [−٤ ، ٣]

، ∵ د(−٤) = ٠ ، د(٠) = ٤ ، د(٣) = $\sqrt{٧}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هي ٤ وتبلغها عند

س = ٠

ولها قيمة صغرى مطلقة هي ٠ وتبلغها عند

س = −٤

④ د(س) = $\sqrt[٣]{(س - ١)^{٢}}$

∴ دَ(س) = $\frac{٢}{٣}$ (س − ١)$^{-\frac{١}{٣}}$ = $\frac{٢}{٣\sqrt[٣]{س - ١}}$

، دَ(س) غير معرفة عند س = ١ ∈ [٠ ، ٩]

، ∵ د(٠) = ١ ، د(١) = ٠ ، د(٩) = ٤

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٤ وتبلغها عند

س = ٩

ولها قيمة صغرى مطلقة = صفر وتبلغها عند

س = ١

⑤ د(س) = س $\sqrt{١ - س}$

∴ دَ(س) = س × $\frac{-١}{٢\sqrt{١ - س}}$ + $\sqrt{١ - س}$

= $\frac{-س + ٢ - ٢س}{٢\sqrt{١ - س}}$ = $\frac{٢ - ٣س}{٢\sqrt{١ - س}}$

، دَ(س) = ٠ عند س = $\frac{٢}{٣}$ ∈ [−١ ، ١]

، دَ(س) غير معرفة عند س = ١ ∈ [−١ ، ١]

، ∵ د(−١) = −$\sqrt{٢}$ ، د$\left(\frac{٢}{٣}\right)$ = $\frac{٢\sqrt{٣}}{٩}$

، د(١) = صفر

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = $\frac{٢\sqrt{٣}}{٩}$ وتبلغها عند

س = $\frac{٢}{٣}$

ولها قيمة صغرى مطلقة = −$\sqrt{٢}$ وتبلغها عند

س = −١

⑥ $د(س) = س - \sqrt{س}$

∴ $دَ(س) = ١ - \frac{١}{٢\sqrt{س}} = \frac{٢\sqrt{س} - ١}{٢\sqrt{س}}$

، دَ (س) = ٠ عند س = $\frac{١}{٤}$ ∈ [٠ ، ٩]

، دَ (س) غير معرفة عند س = ٠ ∈ [٠ ، ٩]

، ∵ د (٠) = ٠ ، د $\left(\frac{١}{٤}\right) = \frac{-١}{٤}$ ، د (٩) = ٦

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٦ وتبلغها عند س = ٩

ولها قيمة صغرى مطلقة هى $\frac{-١}{٤}$ وتبلغها عند س = $\frac{١}{٤}$

⑦ $د(س) = \sqrt{٨س - س^٢}$

∴ $دَ(س) = \frac{٨ - ٢س}{٢\sqrt{٨س - س^٢}} = \frac{٤ - س}{\sqrt{٨س - س^٢}}$

، دَ (س) = ٠ عند س = ٤ ∈ [٠ ، ٨]

، دَ (س) غير معرفة عند س = ٠ أ، ٨

وكل منهما ينتمى للفترة [٠ ، ٨]

، ∵ د (٠) = صفر ، د (٤) = ٤ ، د (٨) = صفر

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٤ وتبلغها عند س = ٤

ولها قيمة صغرى مطلقة هى صفر وتبلغها عند س = ٠ ، عند س = ٨

⑧ $د(س) = \sqrt[٣]{س^٢ - ٤}$

∴ $دَ(س) = \frac{١}{٣}(س^٢ - ٤)^{\frac{-٢}{٣}}(٢س)$

$= \frac{٢س}{٣\sqrt[٣]{(س^٢ - ٤)^٢}}$

، دَ (س) = ٠ عند س = صفر ∈ [−١ ، ٤]

، دَ (س) غير معرفه عند س = ٢ ∈ [−١ ، ٤]

أ، س = −٢ ∉ [−١ ، ٤]

، ∵ د (−١) = $-\sqrt[٣]{٣}$ ، د (٠) = $-\sqrt[٣]{٤}$

، د (٢) = صفر ، د (٤) = $\sqrt[٣]{١٢}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى $\sqrt[٣]{١٢}$ وتبلغها عند س = ٤

ولها قيمة صغرى مطلقة هى $-\sqrt[٣]{٤}$ وتبلغها عند س = ٠

⑨ $د(س) = \frac{س}{\sqrt{س - ١}}$

∴ $دَ(س) = \frac{\sqrt{س - ١}\,(١) - س \times \frac{١}{٢\sqrt{س - ١}}}{س - ١}$

$= \frac{٢س - ٢ - س}{٢\sqrt{س - ١}\,(س - ١)} = \frac{س - ٢}{٢(س - ١)^{\frac{٣}{٢}}}$

، دَ (س) = ٠

عند س = ٢ ∈ [$\frac{٥}{٤}$ ، ٥]

، دَ (س) غير معرفة عند س = ١ ∉ [$\frac{٥}{٤}$ ، ٥]

، د $\left(\frac{٥}{٤}\right) = \frac{٥}{٢}$ ، د (٢) = ٢ ، د (٥) = $\frac{٥}{٢}$

∴ للدالة قيمة صغرى مطلقة هى ٢ وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة عظمى مطلقة هى $\frac{٥}{٢}$ وتبلغها عند س = $\frac{٥}{٤}$ ، ٥

⑩ $د(س) = \frac{\sqrt[٣]{س - ٢}}{س}$

∴ $دَ(س) = \frac{س \times \frac{١}{٣}(س - ٢)^{\frac{-٢}{٣}} - \sqrt[٣]{س - ٢} \times ١}{س^٢}$

$= \frac{س - ٣(س - ٢)}{٣س^٢\sqrt[٣]{(س - ٢)^٢}}$

$= \frac{-٢س + ٦}{٣س^٢\sqrt[٣]{(س - ٢)^٢}}$

، دَ (س) = ٠ عند س = ٣ ∈ [١ ، ٤]

، دَ (س) غير معرفه عند س = ٢ ∈ [١ ، ٤]

أ، س = ٠ ∉ [١ ، ٤]

، ∵ د (١) = −١ ، د (٢) = ٠ ، د (٤) = $\frac{\sqrt[٣]{٢}}{٤}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى $\frac{\sqrt[٣]{٢}}{٤}$ وتبلغها عند س = ٤

ولها قيمة صغرى مطلقة هى −١ وتبلغها عند س = ١

٧

① $د(س) = \begin{cases} ٢س + ٣ & ، س < ١ \\ س^٢ + ٤ & ، س \ge ١ \end{cases}$

، ∵ دَ (١⁺) = دَ (١⁻) = ٢ ∴ دَ (١) = ٢

∴ $دَ(س) = \begin{cases} ٢ & س < ١ \\ ٢ & س = ١ \\ ٢س & س > ١ \end{cases}$

• فى حالة س > ١ دَ (س) = ٠

∴ ٢س = ٠ ∴ س = ٠ لا تحقق

، ∵ د (−٢) = −١ ، د (٢) = ٨

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٨ وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة صغرى مطلقة هى −١ وتبلغها عند س = −٢

② $د(س) = \begin{cases} (س + ٣)^٢ & ، س < ٠ \\ (س - ٣)^٢ & ، س \ge ٠ \end{cases}$

، ∵ دَ (٠⁺) ≠ دَ (٠⁻)

∴ دَ (٠) غير موجودة.

$دَ(س) = \begin{cases} ٢(س + ٣) & ، س < ٠ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ٠ \\ ٢(س - ٣) & ، س > ٠ \end{cases}$

، دَ (س) = ٠ فى حالة س < ٠

∴ ٢ (س + ٣) = ٠

∴ س = −٣ ∉ [−٢ ، ٢]

دَ (س) = ٠ فى حالة س > ٠

∴ ٢ (س − ٣) = ٠

∴ س = ٣ ∉ [−٢ ، ٢]

، ∵ د (−٢) = ١ ، د (٠) = ٩ ، د (٢) = ١

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٩ وتبلغها عند س = ٠

ولها قيمة صغرى مطلقة هى ١

وتبلغها عند س = −٢ ، س = ٢

③ $د(س) = \begin{cases} س^٢ + س - ٢ & ، س \le ٢ \\ ٥س - ٦ & ، س > ٢ \end{cases}$

، ∵ دَ (٢⁻) = دَ (٢⁺) = ٥

∴ $دَ(س) = \begin{cases} ٢س + ١ & ، س < ٢ \\ ٥ & ، س = ٢ \\ ٥ & ، س > ٢ \end{cases}$

∴ دَ (س) = ٠ فى حالة س < ٢

∴ ٢س + ١ = ٠

∴ س = $\frac{-١}{٢}$ ∈ [−١ ، ٣]

، فى حالة س > ٢ ٥ = ٠ لا تحقق

، ∵ د (−١) = −٢ ، د $\left(-\frac{١}{٢}\right) = \frac{-٩}{٤}$

، د (٣) = ٩

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٩ وتبلغها عند س = ٣

ولها قيمة صغرى مطلقة هى $\frac{-٩}{٤}$ وتبلغها عند س = $\frac{-١}{٢}$

④ $د(س) = \begin{cases} ٥ - س^٢ & ، س \le ٢ \\ س^٢ - ٣ & ، س > ٢ \end{cases}$

، ∵ دَ (٢⁺) ≠ دَ (٢⁻)

∴ دَ (٢) = غير موجودة.

∴ $دَ(س) = \begin{cases} -٢س & ، س < ٢ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ٢ \\ ٢س & ، س > ٢ \end{cases}$

∴ دَ (س) = ٠ فى حالة س < ٢

∴ −٢س = ٠ ∴ س = ٠ ∈ [−٣ ، ٣]

، دَ (س) = ٠ فى حالة س > ٢

∴ ٢س = ٠ س = ٠ لا تحقق س > ٢

، ∵ د (−٣) = −٤ ، د (٠) = ٥

، د (٢) = ١ ، د (٣) = ٦

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٦ وتبلغها عند س = ٣

ولها قيمة صغرى مطلقة هى −٤ وتبلغها عند س = −٣

⑤ د (س) = { س^٢ − ٢ س^٢ ، س ≤ ٠
س^٢ − ٢ س ، س > ٠ }

، ∵ دَ (٠^+) ≠ دَ (٠^−)

∴ دَ (٠) غير موجودة.

∴ دَ (س) = { ٣ س^٢ − ٦ س ، س < ٠
غير موجودة ، س = ٠
٢ س − ٢ ، س > ٠ }

• عند س < ٠

دَ (س) = ٠

∴ ٣ س^٢ − ٦ س = ٠

∴ س = ٠ لا تحقق أ، س = ٢ لا تحقق

• عند س > ٠

دَ (س) = ٠

∴ ٢ س − ٢ = ٠ منها س = ١ ∈ [−٣ ، ٣]

، ∵ د (−٣) = −٥٤ ، د (صفر) = صفر

، د (١) = −١ ، د (٣) = ٣

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٣ وتبلغها عند س = ٣

ولها قيمة صغرى مطلقة هى −٥٤ وتبلغها عند س = −٣

⑥ د (س) = { ٣ س^٢ + ١٢ س − ١ ، −١ ≤ س ≤ ٢
٣٧ − س ، ٢ < س ≤ ٣ }

، ∵ دَ (٢^+) ≠ دَ (٢^−)

∴ دَ (٢) غير موجودة.

∴ دَ (س) = { ٦ س + ١٢ ، −١ ≤ س < ٢
غير موجودة ، س = ٢
−١ ، ٢ < س ≤ ٣ }

، عند س ∈]−١ ، ٢[

دَ (س) = ٠ فإن ٦ س + ١٢ = ٠

∴ س = −٢ ∉]−١ ، ٢[

، عند س ∈]٢ ، ٣]

دَ (س) = ٠ فإن −١ = ٠ (مرفوض)

، ∵ د (−١) = −١٠ ، د (٢) = ٣٥

، د (٣) = ٣٤

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٣٥ وتبلغها عند س = ٢

، قيمة صغرى مطلقة هى −١٠ وتبلغها عند س = −١

⑦ د (س) = |س| + ٢

= { −س + ٢ ، −١ ≤ س < صفر
س + ٢ ، صفر ≤ س ≤ ٢ }

، ∵ دَ (٠^+) ≠ دَ (٠^−)

∴ دَ (٠) غير موجودة.

دَ (س) = { −١ ، −١ ≤ س < ٠
غير موجودة ، س = ٠
١ ، ٠ < س ≤ ٢ }

∴ دَ (س) ≠ ٠

، ∵ د (−١) = ٣ ، د (٠) = ٢ ، د (٢) = ٤

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٤ وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة صغرى مطلقة هى ٢ وتبلغها عند س = ٠

⑧ د (س) = ٣ − |س − ١|

= { س + ٢ ، ٠ ≤ س < ١
−س + ٤ ، ١ ≤ س ≤ ٣ }

، ∵ دَ (١^+) ≠ دَ (١^−)

∴ دَ (١) غير موجودة.

∴ دَ (س) = { ١ ، ٠ ≤ س < ١
غير موجودة ، س = ١
−١ ، ١ < س ≤ ٣ }

∴ دَ (س) ≠ ٠

، ∵ د (٠) = ٢ ، د (١) = ٣ ، د (٣) = ١

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٣ وتبلغها عند س = ١

ولها قيمة صغرى مطلقة = ١ وتبلغها عند س = ٣

⑨ ∵ د (س) = (س − ٤) |س| فى الفترة [١ ، ٤]

∴ د (س) = س^٢ − ٤ س

∴ دَ (س) = ٢ س − ٤ ، دَ (س) = ٠

∴ ٢ س − ٤ = ٠ فإن س = ٢ ∈ [١ ، ٤]

، ∵ د (١) = −٣ ، د (٢) = −٤ ، د (٤) = ٠

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٠ وتبلغها عند س = ٤

ولها قيمة صغرى مطلقة هى −٤ وتبلغها عند س = ٢

⑩ د (س) = س |س − ٢|

= { −س (س − ٢) ، ١/٢ ≤ س < ٢
س (س − ٢) ، ٢ ≤ س ≤ ٥/٢ }

، ∵ دَ (٢^+) ≠ دَ (٢^−) ∴ دَ (٢) غير موجودة.

∴ دَ (س) = { −٢ س + ٢ ، ١/٢ ≤ س < ٢
غير موجودة ، س = ٢
٢ س − ٢ ، ٢ < س ≤ ٥/٢ }

، دَ (س) = ٠ فى الفترة ١/٢ ≤ س < ٢

∴ −٢ س + ٢ = ٠ منها س = ١

، دَ (س) = ٠ فى الفترة ٢ < س ≤ ٥/٢

∴ ٢ س − ٢ = ٠ منها س = ١ لا تنتمى للفترة

، ∵ د (١/٢) = ٣/٤ ، د (١) = ١

، د (٢) = ٠ ، د (٥/٢) = ٥/٤

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٥/٤ وتبلغها عند س = ٥/٢

ولها قيمة صغرى مطلقة = ٠ وتبلغها عند س = ٢

إجابات تمارين 12

١

① د (س) = س^٢ − ٤ س + ٢

دَ (س) = ٢ س − ٤

دً (س) = ٢ (موجبة لجميع قيم س)

∴ المنحنى محدب لأسفل ولا توجد نقط انقلاب.

② د (س) = (س − ١)^٢

دَ (س) = ٢ (س − ١)

دً (س) = ٢ (موجبة لجميع قيم س)

∴ المنحنى محدب لأسفل ولا توجد نقط انقلاب.

③ د (س) = ٤ − ٦ س − ٣ س^٢

دَ (س) = −٦ − ٦ س

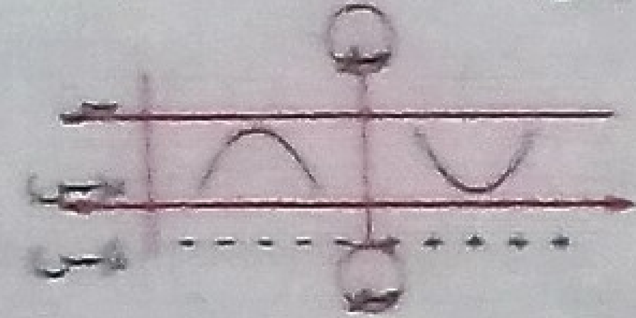
دً (س) = −٦ (سالبة لجميع قيم س)

المنحنى محدب لأعلى ولا توجد نقط انقلاب.

④ ص = ١/٣ س^٣ − ٩ س + ٢

ءص/ءس = س^٢ − ٩ ، ء^٢ص/ءس^٢ = ٢ س

بوضع ء^٢ص/ءس^٢ = ٠ ⟵ ٢ س = ٠ منها س = ٠



المنحنى محدب لأعلى فى]−∞ ، ٠[

ومحدب لأسفل فى]٠ ، ∞[

وتوجد نقطة انقلاب هى (٠ ، ٢)

⑤ د (س) = ١ + ٦ س − ٢ س^٣

دَ (س) = ٦ − ٦ س^٢

دً (س) = −١٢ س

بوضع دً (س) = ٠

منها س = ٠

المنحنى محدب لأسفل فى]−∞ ، ٠[

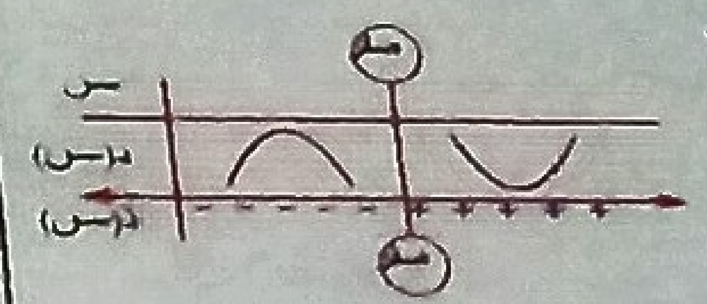
ومحدب لأعلى فى]٠ ، ∞[

ونقطة الانقلاب هى (٠ ، ١)

⑥ ص = س (س^{٢} - ١) = س^{٣} - س

ص' = ٣ س^{٢} - ١

ص'' = ٦ س



بوضع ص'' = ٠

منها ٦ س = ٠

∴ س = ٠

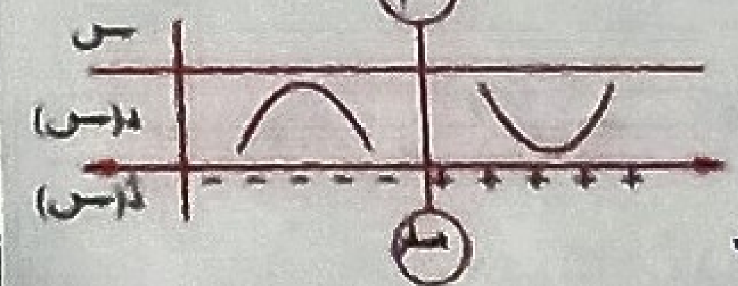
المنحنى محدب لأعلى فى]- ∞ ، ٠[

ومحدب لأسفل فى]٠ ، ∞[ونقطة الانقلاب (٠ ، ٠)

⑦ د (س) = س^{٣} - س^{٢}

د' (س) = ٣ س^{٢} - ٢ س

د'' (س) = ٦ س - ٢



بوضع د'' (س) = ٠

منها ٦ س - ٢ = ٠

∴ س = $\frac{١}{٣}$

المنحنى محدب لأعلى فى]- ∞ ، $\frac{١}{٣}$[

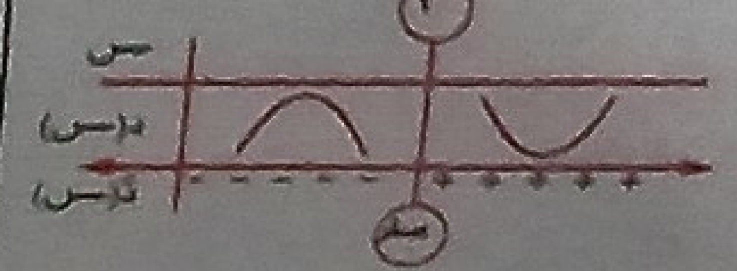
المنحنى محدب لأسفل]$\frac{١}{٣}$ ، ∞[

نقطة الانقلاب ($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{-٢}{٢٧}$)

⑧ د (س) = س^{٣} - ٦ س^{٢} + ٩

د' (س) = ٣ س^{٢} - ١٢ س

د'' (س) = ٦ س - ١٢



بوضع د'' (س) = ٠

٦ س - ١٢ = ٠

∴ س = ٢

المنحنى محدب لأعلى فى]- ∞ ، ٢[

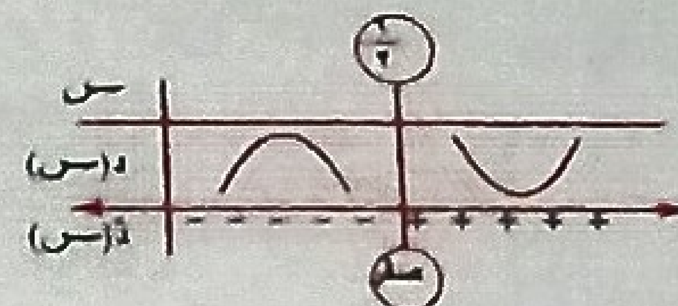
المنحنى محدب لأسفل فى]٢ ، ∞[

نقطة انقلاب (٢ ، -٧)

⑨ د (س) = ٢ س^{٣} - ٣ س^{٢} - ١٢ س + ١

د' (س) = ٦ س^{٢} - ٦ س - ١٢

د'' (س) = ١٢ س - ٦



بوضع د'' (س) = ٠

∴ س = $\frac{١}{٢}$

المنحنى محدب لأعلى فى]- ∞ ، $\frac{١}{٢}$[

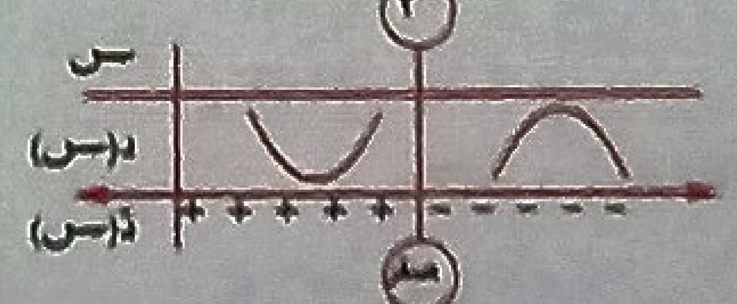
ومحدب لأسفل فى]$\frac{١}{٢}$ ، ∞[

وله نقطة انقلاب ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{-١١}{٢}$)

⑩ د (س) = ١٥ س + ٦ س^{٢} - س^{٣}

د' (س) = ١٥ + ١٢ س - ٣ س^{٢}

د'' (س) = ١٢ - ٦ س



بوضع د'' (س) = ٠

١٢ - ٦ س = ٠

∴ س = ٢

المنحنى محدب لأسفل فى]- ∞ ، ٢[

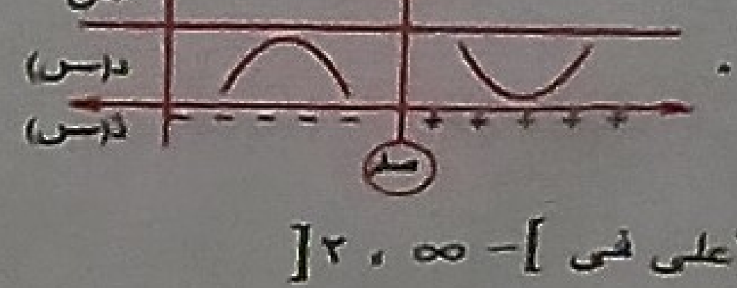
ومحدب لأعلى فى]٢ ، ∞[

وله نقطة انقلاب (٢ ، ٤٦)

⑪ د (س) = (س - ٢)^{٣} - ١

د' (س) = ٣ (س - ٢)^{٢}

د'' (س) = ٦ (س - ٢)



بوضع د'' (س) = ٠

منها س = ٢

المنحنى محدب لأعلى فى]- ∞ ، ٢[

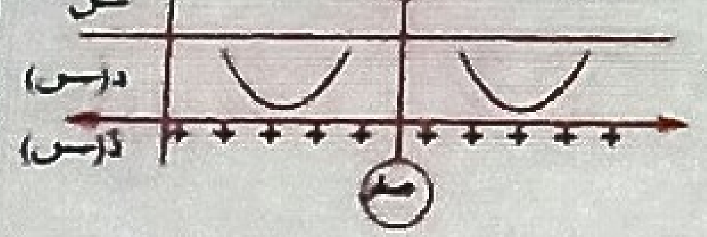
ومحدب لأسفل فى]٢ ، ∞[

وله نقطة انقلاب (٢ ، -١)

⑫ د (س) = (س - ١)^{٤} + ٣

د' (س) = ٤ (س - ١)^{٣}

د'' (س) = ١٢ (س - ١)^{٢}



بوضع د'' (س) = ٠

∴ س = ١

المنحنى محدب لأسفل فى]- ∞ ، ١[

وفى]١ ، ∞[

وليس له نقطة انقلاب.

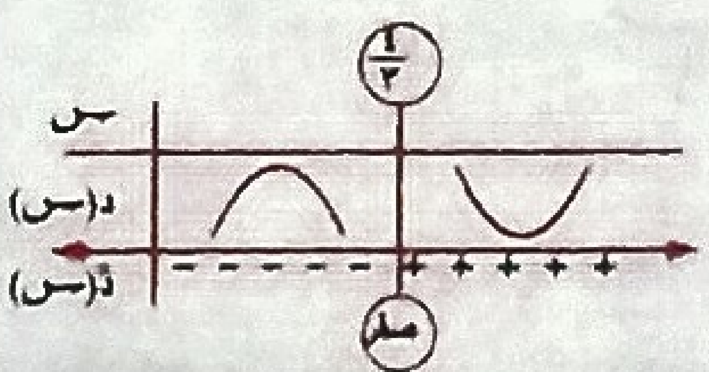
⑬ د (س) = (س - ١)^{٢} (س - ٢)

د' (س) = (س - ١)^{٢} + ٢ (س - ١) (س - ٢)

د'' (س) = ٢ (س - ١) + ٢ (س - ١)

+ ٢ (س - ٢) = ٢ (٣ س - ٤)

بوضع د'' (س) = ٠



س = $\frac{٤}{٣}$

المنحنى محدب لأعلى فى]- ∞ ، $\frac{٤}{٣}$[

ومحدب لأسفل فى]$\frac{٤}{٣}$ ، ∞[

وله نقطة انقلاب ($\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{-٢}{٢٧}$)

⑭ د (س) = (س^{٢} - ٤)^{٢}

د' (س) = ٢ (س^{٢} - ٤) × ٢ س

= ٤ س (س^{٢} - ٤)

د'' (س) = ٤ س × ٢ س + ٤ (س^{٢} - ٤)

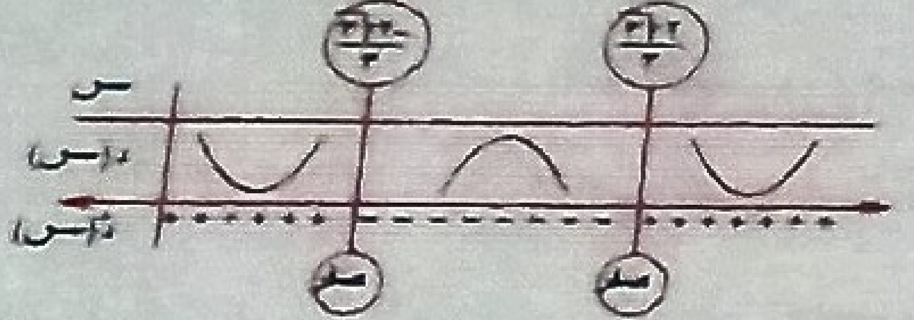
= ٨ س^{٢} + ٤ س^{٢} - ١٦

= ١٢ س^{٢} - ١٦

بوضع د'' (س) = ٠ ∴ ١٢ س^{٢} - ١٦ = ٠

س^{٢} = $\frac{١٦}{١٢}$ = $\frac{٤}{٣}$

∴ س = ± $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ = ± $\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$



المنحنى محدب لأسفل فى]- ∞ ، $\frac{-٢\sqrt{٣}}{٣}$[

وفى]$\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$ ، ∞[

ومحدب لأعلى فى]$\frac{-٢\sqrt{٣}}{٣}$ ، $\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$[

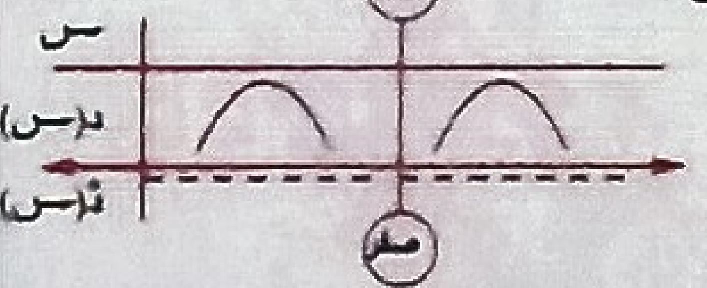
وله نقطة انقلاب هى :

($\frac{-٢\sqrt{٣}}{٣}$ ، $\frac{٦٤}{٩}$) ، ($\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$ ، $\frac{٦٤}{٩}$)

⑮ د (س) = ٤ - س - ٣ س^{٤}

د' (س) = -١ - ١٢ س^{٣}

د'' (س) = -٣٦ س^{٢}



بوضع د'' (س) = ٠

منها س = ٠

المنحنى محدب لأعلى فى]- ∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

ولا يوجد له نقط انقلاب.

⑯ ص = س^{٤} - ٤ س^{٣} + ٦ س^{٢} + ٥

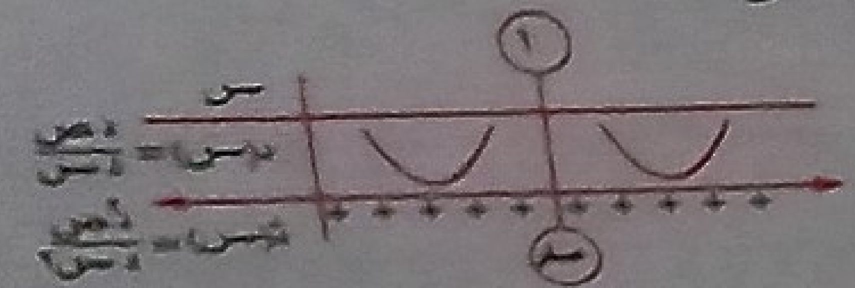
$\frac{دص}{دس}$ = ٤ س^{٣} - ١٢ س^{٢} + ١٢ س

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ = ١٢ س^{٢} - ٢٤ س + ١٢

بوضع $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ = ٠

١٢ س^{٢} - ٢٤ س + ١٢ = ٠

∴ س = ١



المنحنى محدب لأسفل فى]- ∞ ، ١[،]١ ، ∞[

وليس له نقط انقلاب.

(١٧) د(س) = س^{٤} − ٢٤ س^{٢} + ٤٠

∴ د'(س) = ٤ س^{٣} − ٤٨ س

د''(س) = ١٢ س^{٢} − ٤٨

بوضع د''(س) = ٠ ١٢ س^{٢} − ٤٨ = ٠

∴ س = ± ٢

المنحنى محدب لأسفل في]−∞ ، −٢[،]٢ ، ∞[

ومحدب لأعلى في]−٢ ، ٢[

وله نقط انقلاب (−٢ ، −٣٦) ، (٢ ، −٣٦)

(١٨) ص = س^{٤} − ٦ س^{٢}

ص' = ٤ س^{٣} − ١٢ س

ص'' = ١٢ س^{٢} − ١٢

بوضع ص'' = ٠ ١٢ س^{٢} − ١٢ = ٠

س^{٢} = ١ ومنها س = ± ١

المنحنى محدب لأسفل في]−∞ ، −١[

،]١ ، ∞[

ومحدب لأعلى في]−١ ، ١[

وله نقط انقلاب (−١ ، −٥) ، (١ ، −٥)

(١٩) د(س) = ٦ س^{٣} − س^{٤}

د'(س) = ١٨ س^{٢} − ٤ س^{٣}

د''(س) = ٣٦ س − ١٢ س^{٢}

د''(س) = ٠

٣٦ س − ١٢ س^{٢} = ٠

∴ س = ٠ ، ٣

المنحنى محدب لأعلى في]−∞ ، ٠[

،]٣ ، ∞[

ومحدب لأسفل في]٠ ، ٣[

وله نقط انقلاب (٠ ، ٠) ، (٣ ، ٨١)

(٢٠) د(س) = س^{٤} − ٨ س^{٢} + ١٦

د'(س) = ٤ س^{٣} − ١٦ س

د''(س) = ١٢ س^{٢} − ١٦

بوضع د''(س) = ٠

١٢ س^{٢} − ١٦ = ٠

س = ± $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ = ± $\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$

المنحنى محدب لأسفل في]−∞ ، $\frac{−٢\sqrt{٣}}{٣}$[

،]$\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$ ، ∞[

المنحنى محدب لأعلى في]$\frac{−٢\sqrt{٣}}{٣}$ ، $\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$[

ونقط الانقلاب ($\frac{−٢\sqrt{٣}}{٣}$ ، $\frac{٦٤}{٩}$) ، ($\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$ ، $\frac{٦٤}{٩}$)

(٢١) ص = − $\frac{١}{٦}$ س^{٤} + س^{٣}

ص' = − س^{٣} + ٣ س^{٢}

ص'' = − ٣ س^{٢} + ٢

بوضع ص'' = ٠ − ٣ س^{٢} + ٢ = ٠

س = ± $\frac{\sqrt{٦}}{٣}$

المنحنى محدب لأعلى في]−∞ ، $\frac{−\sqrt{٦}}{٣}$[

،]$\frac{\sqrt{٦}}{٣}$ ، ∞[

ومحدب لأسفل]$\frac{−\sqrt{٦}}{٣}$ ، $\frac{\sqrt{٦}}{٣}$[

ولها نقط انقلاب ($\frac{−\sqrt{٦}}{٣}$ ، $\frac{٤}{٩}$) ، ($\frac{\sqrt{٦}}{٣}$ ، $\frac{٤}{٩}$)

(٢٢) د(س) = −٣ س^{٥} + ٥ س^{٣}

د'(س) = −١٥ س^{٤} + ١٥ س^{٢}

د''(س) = −٦٠ س^{٣} + ٣٠ س

د''(س) = ٠ ∴ −٦٠ س^{٣} + ٣٠ س = ٠

∴ س = ٠ أو س = ± $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

المنحنى محدب لأسفل في]−∞ ، $\frac{−١}{\sqrt{٢}}$[

،]٠ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$[

ومحدب لأعلى]$\frac{−١}{\sqrt{٢}}$ ، ٠[،]$\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ∞[

وله نقط انقلاب ($\frac{−١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{−٧\sqrt{٢}}{٨}$) ، (٠ ، ٠)

، ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{٧\sqrt{٢}}{٨}$)

٢

(١) د(س) = س^{٢} − $\frac{٨}{س}$ ، س ≠ ٠

∴ د'(س) = ٢ س + $\frac{٨}{س^{٢}}$ ، د''(س) = ٢ − $\frac{١٦}{س^{٣}}$

بوضع د''(س) = ٠ ∴ ٢ − $\frac{١٦}{س^{٣}}$ = ٠

ومنها س^{٣} = ٨ ∴ س = ٢

المنحنى محدب لأعلى في]٠ ، ٢[

ومحدب لأسفل في]−∞ ، ٠[،]٢ ، ∞[

وله نقطة انقلاب (٢ ، صفر)

(٢) ∵ د(س) = $\frac{٦}{س^{٢} + ٣}$

∴ د'(س) = $\frac{−١٢ س}{(س^{٢} + ٣)^{٢}}$

∴ د''(س)

= $\frac{(س^{٢} + ٣)^{٢} × −١٢ + ١٢ س × ٢ (س^{٢} + ٣) × ٢ س}{(س^{٢} + ٣)^{٤}}$

∴ د''(س) = $\frac{٣٦ (س^{٢} − ١)}{(س^{٢} + ٣)^{٣}}$ ، بوضع د''(س) = ٠

∴ س = ± ١

∴ المنحنى محدب لأسفل في]−∞ ، −١[

،]١ ، ∞[

ومحدب لأعلى في]−١ ، ١[

وله نقط انقلاب (−١ ، $\frac{٣}{٢}$) ، (١ ، $\frac{٣}{٢}$)

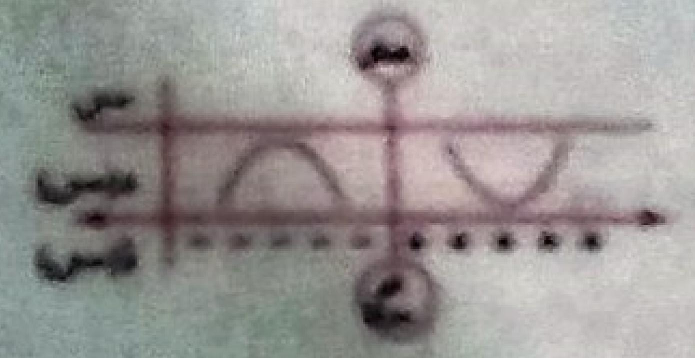
(٣) د(س) = $\frac{س^{٢} + ٩}{س}$ س ≠ ٠

د'(س) = $\frac{س (٢ س) − (س^{٢} + ٩) (١)}{س^{٢}}$

= $\frac{س^{٢} − ٩}{س^{٢}}$ = ١ − $\frac{٩}{س^{٢}}$ (س ≠ ٠)

$د''(س) = \frac{١٨}{س^٣}$ (س ≠ ٠)

∴ $د''(س)$ غير معرفة عند س = ٠ ∉ المجال



المنحنى محدب لأعلى في]−∞ ، ٠[

ومحدب لأسفل في]٠ ، ∞[

وليس للمنحنى نقط انقلاب.

④ $د(س) = \frac{س^٢ - ١}{٢س - ١}$

$د'(س) = \frac{(٢س - ١)(٢س) - (س^٢ - ١)(٢)}{(٢س - ١)^٢}$

$= \frac{٢س^٢ - ٢س + ٢}{(٢س - ١)^٢}$

$د''(س) = \frac{(٢س - ١)^٢(٤س - ٢) - (٢س^٢ - ٢س + ٢)(٢)(٢س - ١)(٢)}{(٢س - ١)^٤}$

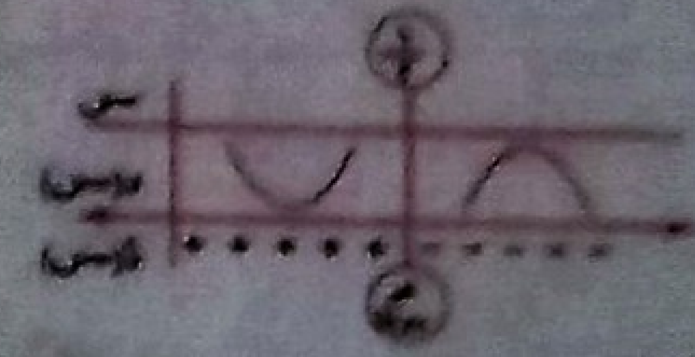
$= \frac{(٢س - ١)\left((٢س - ١)(٤س - ٢) - ٤(٢س^٢ - ٢س + ٢)\right)}{(٢س - ١)^٤}$

$= \frac{٨س^٢ - ٨س + ٢ - ٨س^٢ + ٨س - ٨}{(٢س - ١)^٣}$

$= \frac{-٦}{(٢س - ١)^٣}$

$د''(س)$ غير معرفة عند ٢س − ١ = ٠

∴ س = $\frac{١}{٢}$ ∉ المجال



المنحنى محدب لأسفل في]−∞ ، $\frac{١}{٢}$[

ومحدب لأعلى في]$\frac{١}{٢}$ ، ∞[

ولا يوجد للمنحنى نقط انقلاب.

⑤ $د(س) = \frac{س^٢ + ١}{س^٢ + ٣}$

$د'(س) = \frac{(س^٢ + ٣)(٢س) - (س^٢ + ١)(٢س)}{(س^٢ + ٣)^٢}$

$= \frac{٤س}{(س^٢ + ٣)^٢}$

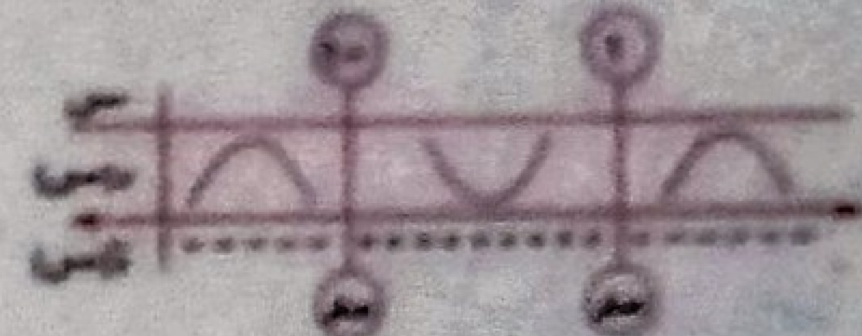
$د''(س) = \frac{(س^٢ + ٣)^٢(٤) - ٤س(٢)(س^٢ + ٣)(٢س)}{(س^٢ + ٣)^٤}$

$= \frac{(س^٢ + ٣)(٤س^٢ + ١٢ - ١٦س^٢)}{(س^٢ + ٣)^٤}$

$= \frac{-١٢س^٢ + ١٢}{(س^٢ + ٣)^٣}$

عندما $د''(س) = ٠$ فإن $-١٢س^٢ + ١٢ = ٠$

∴ س = ±١



المنحنى محدب لأعلى في]−∞ ، −١[،]١ ، ∞[

ومحدب لأسفل في]−١ ، ١[

وله نقط انقلاب هي (−١ ، $\frac{١}{٢}$) ، (١ ، $\frac{١}{٢}$)

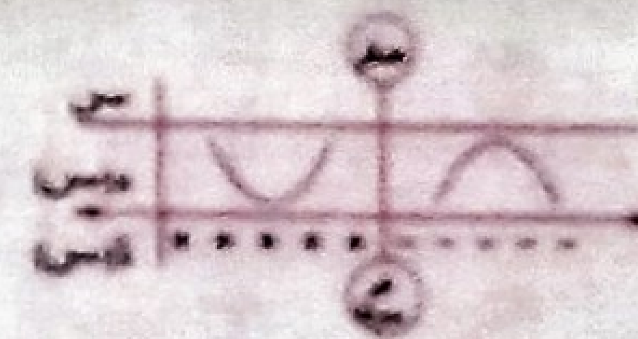
⑥ $د(س) = \sqrt[٣]{س} = س^{\frac{١}{٣}}$ $د'(س) = \frac{١}{٣}س^{-\frac{٢}{٣}}$

∵ $د'(٠)$ غير معرفة

∴ المماس رأسي عند س = ٠

$د''(س) = -\frac{٢}{٩}س^{-\frac{٥}{٣}} = \frac{-٢}{٩\sqrt[٣]{س^٥}}$

$د''(س)$ غير معرفة عند س = ٠



المنحنى محدب لأسفل في]−∞ ، ٠[

ومحدب لأعلى في]٠ ، ∞[

نقطة الانقلاب هي (٠ ، ٠)

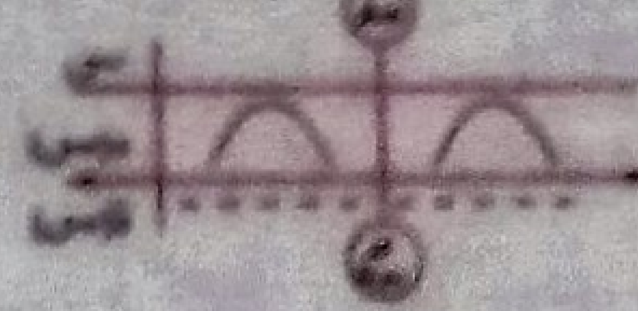
⑦ $د(س) = س^{\frac{٢}{٣}}$ $د'(س) = \frac{٢}{٣}س^{-\frac{١}{٣}}$

∵ $د'(٠)$ غير معرفة

∴ المماس رأسي عند س = ٠

$د''(س) = -\frac{٢}{٩}س^{-\frac{٤}{٣}} = \frac{-٢}{٩\sqrt[٣]{س^٤}}$

$د''(س)$ غير معرفة عند س = ٠



المنحنى محدب لأعلى في]−∞ ، ٠[

]٠ ، ∞[ولا يوجد نقط انقلاب.

⑧ $د(س) = \sqrt[٣]{(س - ٤)^٢} = (س - ٤)^{\frac{٢}{٣}}$

$د'(س) = \frac{٢}{٣}(س - ٤)^{-\frac{١}{٣}}$

∵ $د'(٤)$ غير معرفة

∴ لها مماس رأسي

$د''(س) = -\frac{٢}{٩}(س - ٤)^{-\frac{٤}{٣}} = \frac{-٢}{٩\sqrt[٣]{(س - ٤)^٤}}$

$د''(س)$ غير معرفة عند س = ٤



المنحنى محدب لأعلى في]−∞ ، ٤[،]٤ ، ∞[

وليس للمنحنى نقط انقلاب.

⑨ $ص = \sqrt[٥]{(س - ٢)^٢} = (س - ٢)^{\frac{٢}{٥}}$

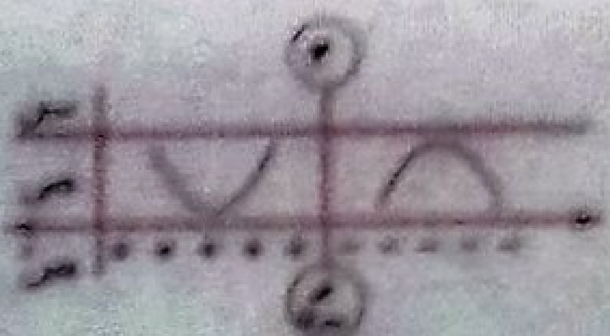
$ص' = \frac{٢}{٥}(س - ٢)^{-\frac{٣}{٥}}$

∵ $ص'$ غير معرفة عند س = ٢

∴ الدالة لها مماس رأسي عند س = ٢

∵ $ص'' = -\frac{٦}{٢٥}(س - ٢)^{-\frac{٨}{٥}} = \frac{-٦}{٢٥\sqrt[٥]{(س - ٢)^٨}}$

∴ $ص''$ غير معرفة عند س = ٢



المنحنى محدب لأسفل في]−∞ ، ٢[

ومحدب لأعلى في]٢ ، ∞[

وله نقطة انقلاب (٢ ، ٠)

⑩ $د(س) = |س^٣ - ١|$

$= \begin{cases} -س^٣ + ١ & ، س < ١ \\ س^٣ - ١ & ، س \geq ١ \end{cases}$

$د'_-(١) = \underset{هـ \to ٠^-}{نهـا} \frac{-(١ + هـ)^٣ + ١ - صفر}{هـ} = -٣$

$د'_+(١) = \underset{هـ \to ٠^+}{نهـا} \frac{(١ + هـ)^٣ - ١ - صفر}{هـ} = ٣$

$د'(١)$ غير موجودة.

∴ $د'(س) = \begin{cases} -٣س^٢ & ، س < ١ \\ ٣س^٢ & ، س > ١ \end{cases}$

$د''(س) = \begin{cases} -٦س & ، س < ١ \\ ٦س & ، س > ١ \end{cases}$

• عند س < ١ $د''(س) = ٠$ ∴ −٦س = ٠

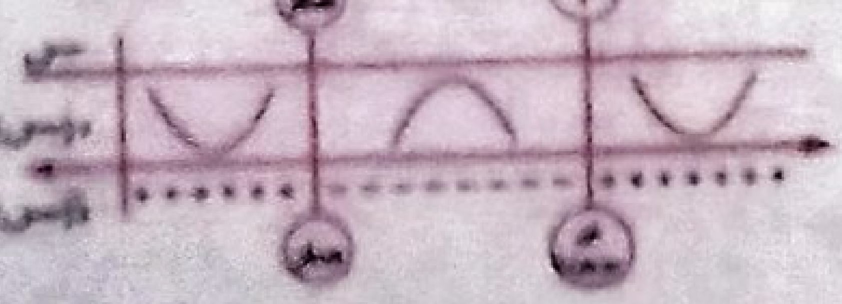
∴ س = ٠ لها مماس وحيد

• عند س > ١ $د''(س) = ٠$ ∴ ٦س = ٠

∴ س = ٠ لا تحقق

$د''(س)$ غير موجودة عند س = ١

∴ ليس لها مماس وحيد



المنحنى محدب لأعلى في]٠ ، ١[

المنحنى محدب لأسفل في]−∞ ، ٠[،]١ ، ∞[

يوجد نقطة انقلاب عند (٠ ، ١)

٣

①(جـ) ②(د) ③(ب) ④(ب) ⑤(د)
⑥(د) ⑦(ب) ⑧(د) ⑨(أ) ⑩(أ)
⑪(د) ⑫(أ) ⑬(ب) ⑭(د) ⑮(ب)
⑯(ب) ⑰(ب)

٤

د(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢}

النقطة (١ ، ١٢) على المنحنى

∴ د(١) = ١٢   ∴ أ + ب = ١٢   (١)

د'(س) = ٣أ س^{٢} + ٢ب س

د''(س) = ٦أ س + ٢ب

عند س = ١   د''(س) = ٠

صفر = ٦أ + ٢ب   (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) : أ = −٦ ، ب = ١٨

٥

ص = س^{٣} + أ س^{٢} + ب س

النقطة (٣ ، −٩) تقع على المنحنى   ∴ د(٣) = −٩

−٩ = ٣^{٣} + أ (٣)^{٢} + ب (٣)

٣أ + ب = −١٢   (١)

ص' = ٣ س^{٢} + ٢أ س + ب

ص'' = ٦ س + ٢أ   ، ص'' = ٠ عند س = ٣

٠ = ٦ × ٣ + ٢أ   منها أ = −٩

بالتعويض فى (١)   ∴ ب = ١٥

٦

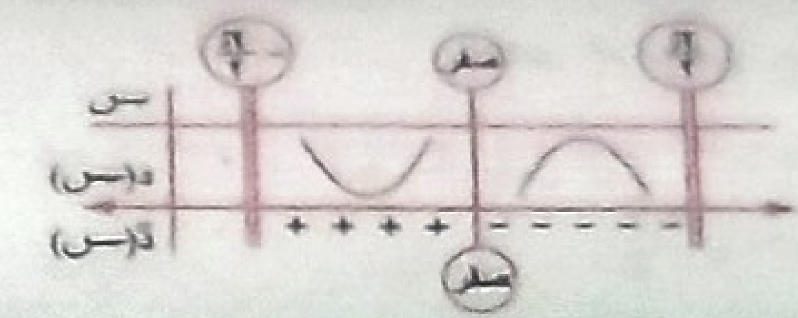
د(س) = ٢س + جاس

د'(س) = ٢ + جتاس

د''(س) = − جاس

بوضع د''(س) = ٠   منها − جاس = ٠

∴ س = صفر



المنحنى محدب لأسفل فى] −π/٢ ، ٠ [

ومحدب لأعلى فى] ٠ ، π/٢ [

له نقطة انقلاب هى (٠ ، ٠)

٧

د(س) = س / (١ − س^{٢})

د'(س) = [(١ − س^{٢}) (١) − س (− ٢ س)] / (١ − س^{٢})^{٢}

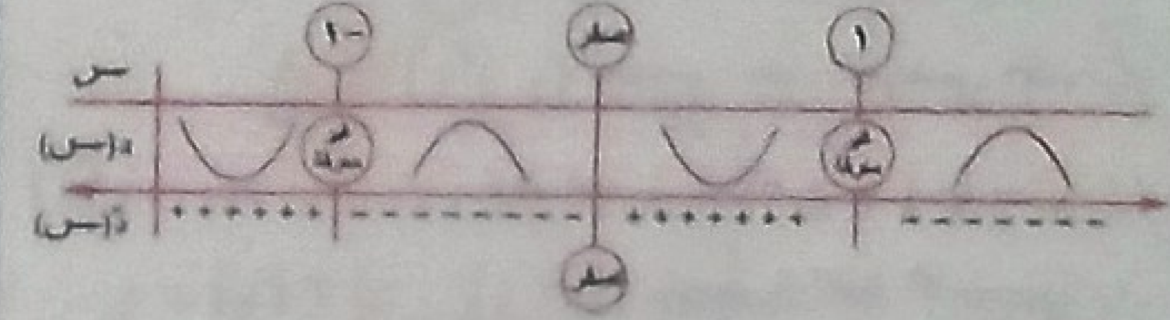
= (١ + س^{٢}) / (١ − س^{٢})^{٢}

د''(س) = [(١ − س^{٢})^{٢} (٢س) − (١ + س^{٢}) ٢ (١ − س^{٢}) × (− ٢ س)] / (١ − س^{٢})^{٤}

= (١ − س^{٢}) [(١ − س^{٢}) (٢ س) + ٤ س (١ + س^{٢})] / (١ − س^{٢})^{٤}

= (٦ س + ٢ س^{٣}) / (١ − س^{٢})^{٣}

د''(س) = ٠ فإن س = صفر



نقطة الانقلاب هى (٠ ، ٠)

الميل عند (٠ ، ٠) = د'(٠) = ١

∴ قياس الزاوية التى يصنعها المماس = ظا$^{-1}$ (١) = π/٤

٨

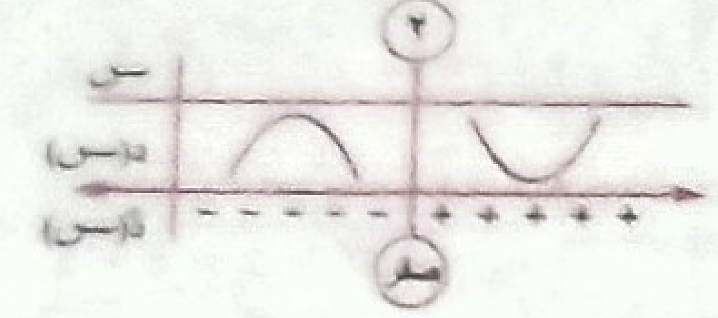
د(س) = س (س − ٣)^{٢}

∴ د(س) = س^{٣} − ٦ س^{٢} + ٩ س

∴ د'(س) = ٣ س^{٢} − ١٢ س + ٩

، د''(س) = ٦ س − ١٢

، د''(س) = ٠ عندما س = ٢



∴ عند س = ٢ يوجد نقطة انقلاب

، بوضع د'(س) = ٠

∴ ٣ س^{٢} − ١٢ س + ٩ = ٠

∴ س = ٣ أ، س = ١

، ∵ د''(٣) = ٦ > ٠

∴ عند س = ٣ نقطة قيمة صغرى للدالة

، ∵ د''(١) = −٦ < ٠

∴ عند س = ١ نقطة قيمة عظمى للدالة

∴ س$_{١}$ = ١ ، س$_{٢}$ = ٣

∴ (س$_{١}$ + س$_{٢}$) / ٢ = (١ + ٣) / ٢ = ٢

= الاحداثى السينى لنقطة الانقلاب.

٩

د'(س) = ٢أ س + ب   د''(س) = ٢أ < ٠

بوضع د'(س) = ٠ فإن س = −ب / ٢أ

عند س = −ب / ٢أ نقطة حرجة د''(−ب / ٢أ) = ٢أ < ٠

∴ منحنى د له قيمة عظمى محلية عند س = −ب / ٢أ

د''(س) = قيمة ثابتة سالبة

∴ لا تساوى صفر لجميع قيم س

∴ لا توجد نقطة انقلاب المنحنى.

١٠

ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ء

ص' = ٣أ س^{٢} + ٢ ب س + جـ

ص'' = ٦أ س + ٢ ب

∵ المنحنى له نقطة انقلاب عند (٠ ، ٤)

∴ ص'' = ٠ عند س = ٠   ∴ ٢ب = ٠   ∴ ب = ٠

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٤)

∴ ص = ٤ عندما س = ٠

∴ ٤ = ٠ + ٠ + ٠ + ء   ∴ ء = ٤

∴ ص = أ س^{٣} + جـ س + ٤

، ص' = ٣أ س^{٢} + جـ

∵ المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، ٠)

∴ ص = ٠ عند س = ٢

∴ ٠ = ٨أ + ٢جـ + ٤

∴ ٤أ + جـ = −٢   (١)

∵ المنحنى يمس محور السينات فى (٢ ، ٠)

∴ ص' = ٠ عند س = ٢   ∴ ١٢أ + جـ = ٠   (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢)   ∴ أ = ١/٤ ، جـ = −٣

١١

ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ء

ص' = ٣أ س^{٢} + ٢ب س + جـ

ص'' = ٦أ س + ٢ب

∵ المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٢)

∴ ص = ٢ عندما س = ٠

∴ ٢ = ٠ + ٠ + ٠ + ء   ∴ ء = ٢

، ∵ له مماس أفقى عند س = ١

∴ ص' = ٠ عندما س = ١

∴ ٠ = ٣أ + ٢ب + جـ

∴ ٣أ + ٢ب + جـ = ٠   (١)

، ∵ النقطة (٢ ، ٤) هى نقطة انقلاب

∴ ص'' = ٠ عندما س = ٢

∴ ٠ = ١٢أ + ٢ب

∴ ٦أ + ب = ٠   (٢)

∵ المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، ٤)

∴ ص = ٤ عندما س = ٢

∴ ٤ = ٨ أ + ٤ ب + ٢ حـ + ٢

∴ ٤ أ + ٢ ب + حـ = ١ (٣)

، بحل المعادلات (١) ، (٢) ، (٣)

∴ أ = ١ ، ب = -٦ ، حـ = ٩ ، ء = ٢

١٢

د(س) = أ س³ + ب س² + حـ س + ء

د′(س) = ٣ أ س² + ٢ ب س + حـ

د″(س) = ٦ أ س + ٢ ب

∵ المنحنى له نقطة انقلاب عند (١ ، ٢)

∴ د″(١) = صفر ∴ ٦ أ + ٢ ب = ٠

∴ ب = -٣ أ (١)

∵ المنحنى له قيمة عظمى محلية عند (٢ ، ٤)

∴ د′(٢) = ٠ ∴ ١٢ أ + ٤ ب + حـ = ٠

ومن (١) : ∴ ١٢ أ - ١٢ أ + حـ = ٠

∴ حـ = ٠ (٢)

∵ المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٢)

∴ د(١) = ٢ ∴ أ + ب + حـ + ء = ٢

ومن (١) ، (٢) : ∴ أ - ٣ أ + ء = ٢

∴ -٢ أ + ء = ٢ (٣)

∵ المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، ٤)

∴ د(٢) = ٤ ∴ ٨ أ + ٤ ب + ٢ حـ + ء = ٤

ومن (١) ، (٢) : ∴ ٨ أ - ١٢ أ + ٠ + ء = ٤

∴ -٤ أ + ء = ٤ (٤)

وبحل المعادلتين (٣) ، (٤) : ∴ أ = -١ ، ء = ٠

∴ ب = ٣

∴ معادلة المنحنى هي : د(س) = -س³ + ٣ س²

١٣

د هي دالة من الدرجة الثالثة

∴ د(س) = أ س³ + ب س² + حـ س + ء

حيث أ ، ب ، حـ ، ء مقادير ثابتة

د′(س) = ٣ أ س² + ٢ ب س + حـ

د″(س) = ٦ أ س + ٢ ب

∵ المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٠) ∴ د(١) = ٠

∴ ٠ = أ + ب + حـ + ء (١)

∵ المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، ١) ∴ د(٢) = ١

∴ ١ = ٨ أ + ٤ ب + ٢ حـ + ء (٢)

∵ ميل المماس عند النقطة (٢ ، ١) = ٩/٢

∴ ص′ = ٩/٢ عند س = ٢

٩/٢ = ١٢ أ + ٤ ب + حـ (٣)

∵ (٢ ، ١) نقطة انقلاب ص″ = ٠ عند س = ٢

٠ = ١٢ أ + ٢ ب (٤)

من (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) نستنتج أن:

أ = ٥/٢ ، ب = -١٥ ، حـ = ٥٧/٢ ، ء = -١٦

معادلة المنحنى

د(س) = ٥/٢ س³ - ١٥ س² + ٥٧/٢ س - ١٦

١٤

د(س) = أ س³ + ب س² + ٩ س + ١

د′(س) = ٣ أ س² + ٢ ب س + ٩

د″(س) = ٦ أ س + ٢ ب

د′(س) = ٠ عند س = ١ ، س = ٣

∴ د′(١) = ٣ أ + ٢ ب + ٩ = ٠

٣ أ + ٢ ب = -٩ (١)

د′(٣) = ٢٧ أ + ٦ ب + ٩ = ٠

٩ أ + ٢ ب = -٣ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) : أ = ١ ، ب = -٦

∴ معادلة المنحنى هي :

د(س) = س³ - ٦ س² + ٩ س + ١

د″(س) = ٦ (١) س + ٢ (-٦) = ٦ س - ١٢

د″(س) = ٠ عند (س - ٢) = ٠ ∴ س = ٢

المنحنى محدب لأعلى في]-∞ ، ٢[

ومحدب لأسفل في]٢ ، ∞[

وله نقطة انقلاب هي (٢ ، ٣)

١٥

د(س) = { ٢ س² + أ س + ب ، س ≥ ١ ؛ ٢ س - س² ، س < ١ }

∵ الدالة قابلة للاشتقاق ∴ الدالة متصلة

∴ د(١⁻) = د(١⁺) = د(١)

٢ + أ + ب = ٢ - ١ ∴ أ = -ب

د′(س) = { ٤ س + أ ، س ≥ ١ ؛ ٢ - ٢ س ، س < ١ }

∵ د′(١⁻) = د′(١⁺)

٤ + أ = ٢ - ١ ∴ أ = -٣ ∴ ب = ٢

د″(١⁺) = نهـا (هـ ← ٠⁺) [د′(هـ + ١) - د′(١)] / هـ

= نهـا (هـ ← ٠⁺) [٤(هـ + ١) + أ - (٤ + أ)] / هـ

= نهـا (هـ ← ٠⁺) [٤ هـ + ٤ - ٣ - ٤ + ٣] / هـ = ٤

د″(١⁻) = نهـا (هـ ← ٠⁻) [د′(هـ + ١) - د′(١)] / هـ

= نهـا (هـ ← ٠⁻) [٢ - ٢(هـ + ١) - (٤ + أ)] / هـ

= نهـا (هـ ← ٠⁻) [٢ - ٢ هـ - ٢ - ٤ + ٣] / هـ = -٢

د″(١) غير موجودة.

د″(س) = { ٤ ، س > ١ ؛ غير موجودة ، س = ١ ؛ -٢ ، س < ١ }

المنحنى محدب لأعلى في]-∞ ، ٠[

محدب لأسفل في]٠ ، ∞[

الدالة لها مماس عند س = ٠

∴ لها نقطة انقلاب (٠ ، ١)

١٦

① د(س) = { (س + ٣)² ، س < -١ ؛ ٣ س² - س³ ، س ≥ -١ }

د′(-١⁺) = نهـا [...] / هـ = ٤

د′(-١⁻) = نهـا [...] / هـ

= -٩

د′(-١⁺) ≠ د′(-١⁻)

∴ د′(-١) غير موجودة

د′(س) = { ٢ (س + ٣) ، س < -١ ؛ ٦ س - ٣ س² ، س > -١ }

∴ لا يوجد مماس عند س = -١

د″(س) = { ٢ ، س < -١ ؛ ٦ - ٦ س ، س > -١ }

د″(س) = ٠ ∴ ٦ - ٦ س = ٠

س = ١

المنحنى محدب لأسفل في]-∞ ، -١[،]-١ ، ١[

ومحدب لأعلى في]١ ، ∞[

وله نقطة انقلاب (١ ، ٢)

ميل المماس عندها = ٦ (١) - ٣ (١)² = ٣

معادلته: $\frac{ص - ٢}{س - ١} = ٣$

$٣ س - ص - ١ = ٠$

② $د(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٤ & ، س < -٢ \\ س^{٣} - ٣ س + ٢ & ، س \geq -٢ \end{cases}$

$د'(-٢^{-}) = \lim_{هـ \to ٠^{-}} \frac{(هـ - ٢)^{٢} - ٤ - ٠}{هـ} = -٤$

$د'(-٢^{+}) = \lim_{هـ \to ٠^{+}} \frac{(هـ - ٢)^{٣} - ٣(هـ - ٢) + ٢ - ٠}{هـ}$

$= ٩$

$د'(-٢^{-}) \neq د'(-٢^{+})$ ليس له مماس عند $س = -٢$

$د'(س) = \begin{cases} ٢ س & ، س < -٢ \\ ٣ س^{٢} - ٣ & ، س > -٢ \end{cases}$

$د''(س) = \begin{cases} ٢ & ، س < -٢ \\ ٦ س & ، س > -٢ \end{cases}$

$د''(س) = ٠$ $\quad ٦ س = ٠$ $\quad$ منها $س = ٠$

المنحنى محدب لأسفل في $]-\infty ، -٢[$ ، $]٠ ، \infty[$

ومحدب لأعلى في $]-٢ ، ٠[$

يوجد نقطة انقلاب $(٠ ، ٢)$

ويوجد مماس عند هذه النقطة ميله $د'(٠) = -٣$

معادلة المماس هي: $\frac{ص - ٢}{س - ٠} = \frac{-٣}{١}$

منها $٣ س + ص - ٢ = ٠$

③ $د(س) = \begin{cases} س^{٣} - ٣ س & ، س < ٠ \\ ٤ س - س^{٢} & ، س \geq ٠ \end{cases}$

$د'(٠^{-}) = \lim_{هـ \to ٠^{-}} \frac{هـ^{٣} - ٣ هـ - ٠}{هـ} = -٣$

$د'(٠^{+}) = \lim_{هـ \to ٠^{+}} \frac{٤ هـ - هـ^{٢} - ٠}{هـ} = ٤$

$د'(٠^{-}) \neq د'(٠^{+})$

$د'(س) = \begin{cases} ٣ س^{٢} - ٣ & ، س < ٠ \\ ٤ - ٢ س & ، س > ٠ \end{cases}$

$د''(س) = \begin{cases} ٦ س & ، س < ٠ \\ -٢ & ، س > ٠ \end{cases}$

$د''(س) = ٠$ $\quad ٦ س = ٠$ $\quad \therefore س = ٠$

المنحنى محدب لأعلى في $]-\infty ، ٠[$ ، $]٠ ، \infty[$

لا يوجد نقطة انقلاب.

١٧

① (ب) ② (جـ) ③ (ب)

④ (ب) ⑤ (جـ) ⑥ (ب)

١٨

① (جـ) ② (ب) ③ (أ)

④ (د) ⑤ (د)

إرشادات لحل رقم ١٨

①

من الرسم نلاحظ أن عدد النقط التي يتقاطع فيها منحنى الدالة مع أي مستقيم لا يتجاوز الثلاث نقاط.

② $\because$ منحنى الدالة يكون مقعرًا لأسفل أي أنه محدب لأعلى

، $\because د'(س) = ٢(أ - ٢) س + ٣$

، $د''(س) = ٢(أ - ٢)$

وبوضع $د''(س) < ٠$

$\therefore أ - ٢ < ٠$ $\quad \therefore أ < ٢$

③ $\because د(س) = ق(س) - ر(س)$

$\therefore د'(س) = ق'(س) - ر'(س)$

$\therefore د'(٢) = ق'(٢) - ر'(٢) = صفر$

، $\because د''(س) = ق''(س) - ر''(س)$

$\therefore د''(٢) = ق''(٢) - ر''(٢) > صفر$

$\therefore$ الدالة لها قيمة صغرى محلية عند $س = ٢$

④ $\because \lim_{هـ \to ٠} \frac{د'(س + هـ) - د'(س)}{هـ} = د''(س)$

«من تعريف المشتقة»

، $\because د''(س) > صفر$ لجميع قيم $س \in ح$

$\therefore$ منحنى الدالة د يكون محدبًا لأسفل.

⑤ $\because د'(س_{٢}) > د'(س_{١})$ عندما $س_{٢} > س_{١}$ لكل $س_{١} ، س_{٢} \in]أ ، ب[$

$\therefore د'(س)$ دالة تزايدية في الفترة $]أ ، ب[$

$\therefore$ مشتقتها موجبة

$\therefore د''(س) > ٠$ لكل $س \in]أ ، ب[$

$\therefore$ منحنى الدالة د محدب لأسفل.

١٩

$س^{٢} ص + أ ص + ب س^{٢} = ٠$ (١)

بالتفاضل بالنسبة إلى س

$س^{٢} ص' + ٢ س ص + أ ص' + ٢ ب س = ٠$ (٢)

بالتفاضل بالنسبة إلى س

$س^{٢} ص'' + ٢ س ص' + ٢ س ص' + ٢ ص$

$+ أ ص'' + ٢ ب = ٠$

$(س^{٢} + أ) ص'' + ٤ س ص' + ٢ ص + ٢ ب = ٠$ (٣)

النقطة $(١ ، -١)$ تحقق المعادلة (١) وعندها $ص'' = ٠$

من (١): $-١ - أ + ب = ٠$ $\quad \therefore أ = ب - ١$

من (٢): $-٢ + ص'(١ + أ) + ٢ ب = ٠$

$ص' = \frac{٢(١ - ب)}{١ + أ}$

من (٣)

$٠ + ٤ \times ١ \times \frac{٢(١ - ب)}{١ + أ} + ٢ \times -١ + ٢ ب = ٠$

بالتعويض عن $١ + أ = ب$ ثم التبسيط ينتج

$ب^{٢} - ٥ ب + ٤ = ٠$

$(ب - ١)(ب - ٤) = ٠$

$\therefore ب = ١$ أ، $ب = ٤$

ومنها $أ = ٠$ أ، $أ = ٣$

٢٠

نفرض أن $د(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ء$

يمر المنحنى بالنقط $(١ ، ٦)$ ، $(-١ ، ٢)$

$\therefore د(١) = أ + ب + جـ + ء = ٦$ (١)

$د(-١) = -أ + ب - جـ + ء = ٢$ (٢)

$د'(س) = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س + جـ$

له نقطة حرجة عند $(-١ ، ٢)$

$\therefore د'(-١) = ٣ أ - ٢ ب + جـ = صفر$ (٣)

له نقطة انقلاب عند $س = \frac{-٢}{٣}$

$\therefore د''(س) = ٦ أ س + ٢ ب$

$د''\left(\frac{-٢}{٣}\right) = -٤ أ + ٢ ب = ٠$ (٤)

بحل المعادلات (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) ينتج أن:

$أ = ١$ ، $ب = ٢$ ، $جـ = ١$ ، $ء = ٢$

دالة المنحنى:

$د(س) = س^{٣} + ٢ س^{٢} + س + ٢$

$د'(س) = ٣ س^{٢} + ٤ س + ١$

$د''(س) = ٦ س + ٤$

$د'(س) = ٠$ عند $س = \frac{-١}{٣}$ ، -١

$د''\left(\frac{-١}{٣}\right) > ٠$ $\quad \therefore$ النقطة $\left(\frac{-١}{٣} ، \frac{٥٠}{٢٧}\right)$ صغرى محلية.

$د''(-١) < ٠$ $\quad \therefore$ النقطة $(-١ ، ٢)$ عظمى محلية.

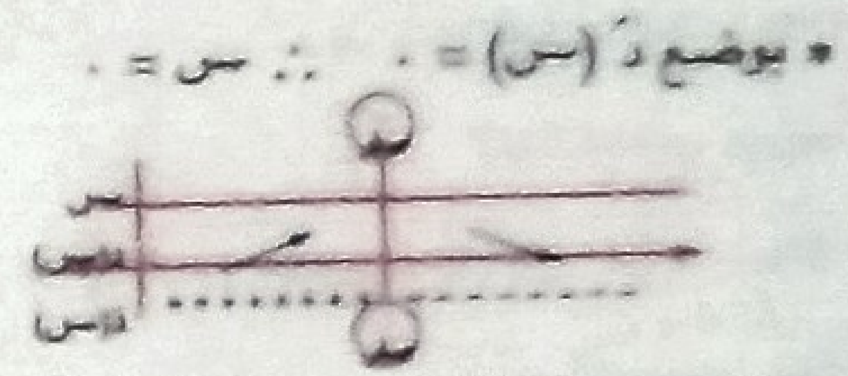
إجابات تمارين 13

أولاً مسائل على رسم المنحنيات

① د (س) = ٢ − $س^{٢}$ ∴ دَ (س) = − ٢ س

، دً (س) = − ٢

• بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = ٠



∵ دً (س) = − ٢ ≠ ٠

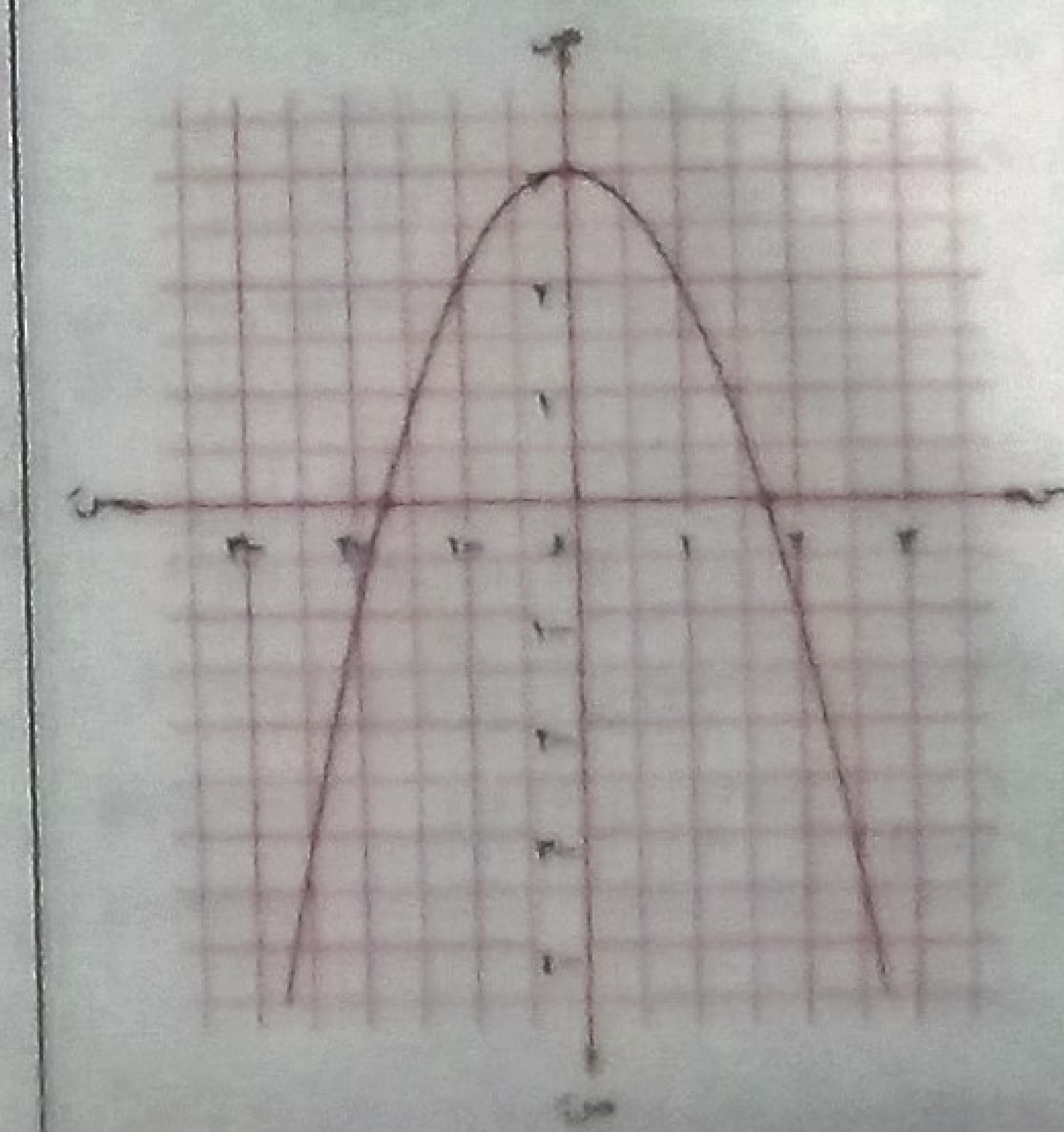
• لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

نضع د (س) = ٠ ∴ س = ± $\sqrt{٢}$

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ د (٠) = ٢

س	− $\sqrt{٢}$	٠	$\sqrt{٢}$
د (س)	٠	٢	٠

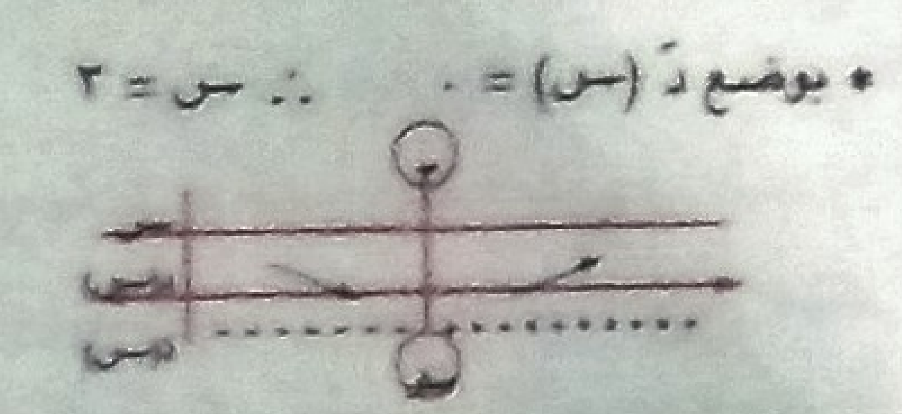


② د (س) = $س^{٢}$ − ٦ س + ٥

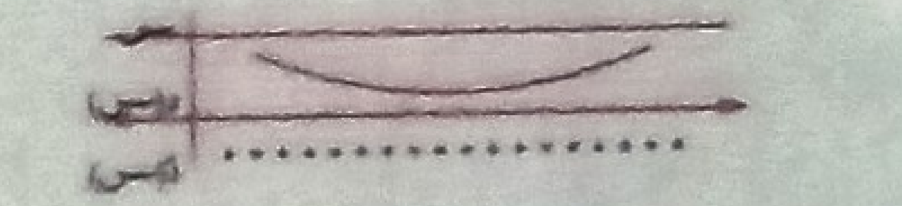
∴ دَ (س) = ٢ س − ٦

، دً (س) = ٢

• بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = ٣



∵ دً (س) = ٢ ≠ ٠



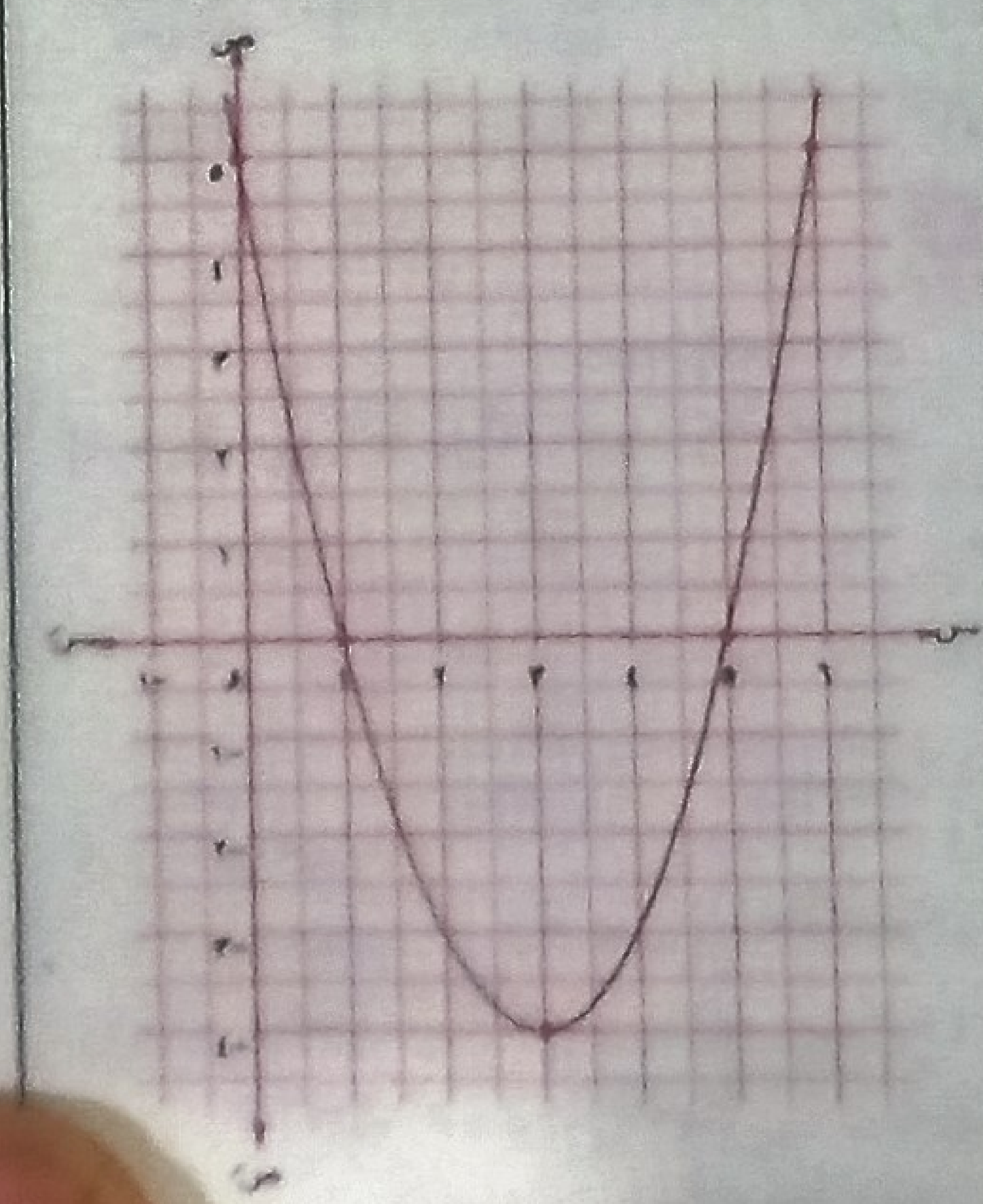
• لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات :

نضع د (س) = ٠ ∴ س = ٥ أ، ١

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات :

نضع س = ٠ ∴ د (٠) = ٥

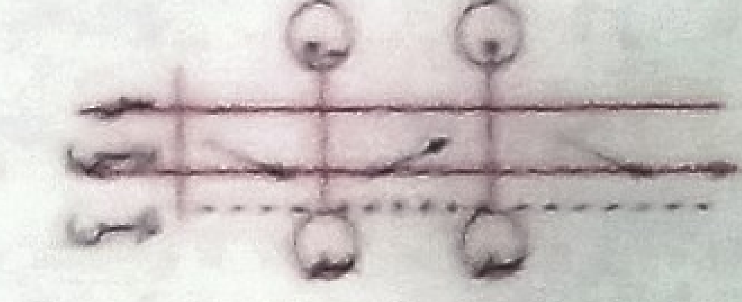
س	٠	١	٣	٥	٦
د (س)	٥	٠	−٤	٠	٥



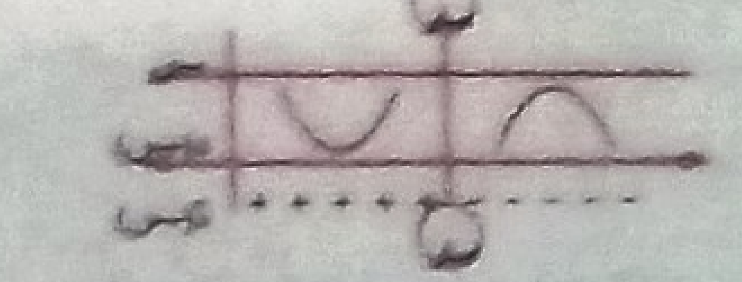
③ د (س) = ١٢ س − $س^{٣}$

∴ دَ (س) = ١٢ − ٣ $س^{٢}$ ، دً (س) = − ٦ س

• بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = ± ٢



• بوضع دً (س) = ٠ ∴ س = ٠



• لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

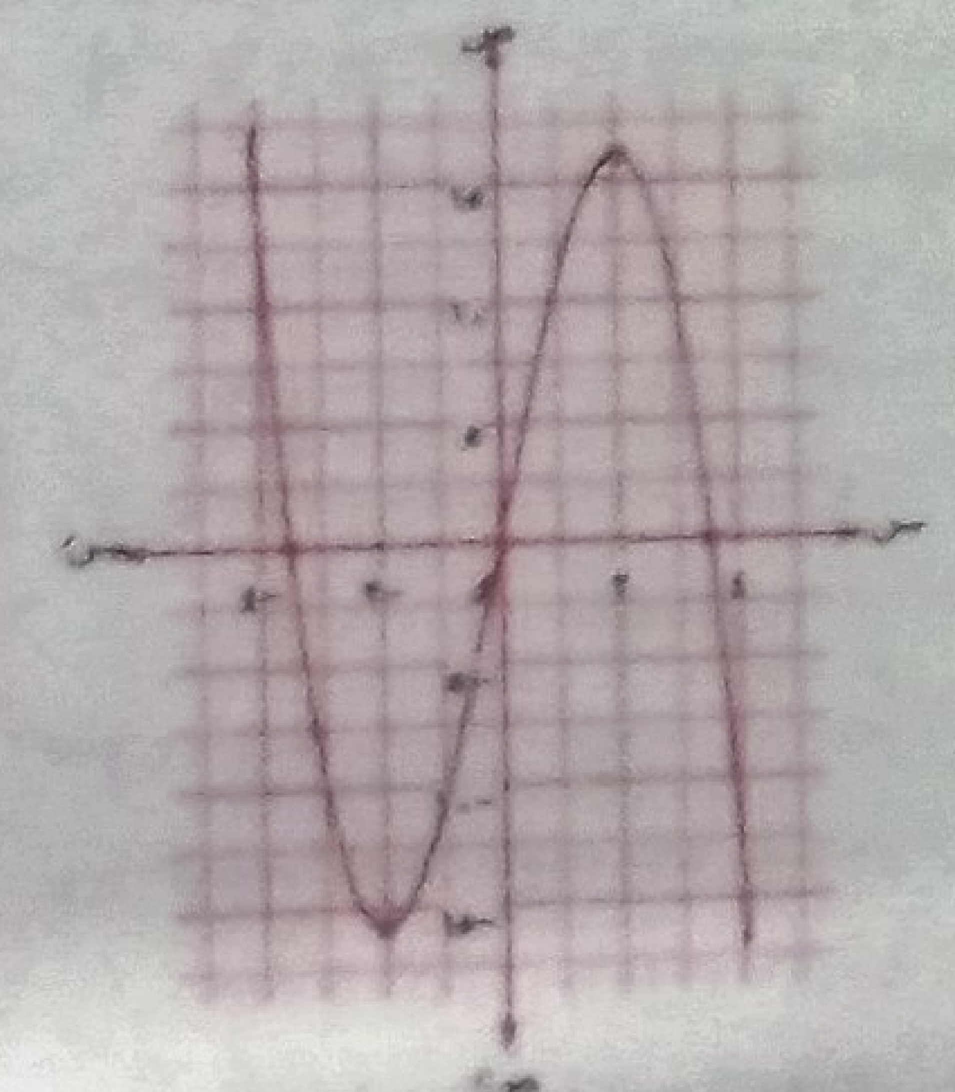
نضع د (س) = ٠

∴ س = ٠ أ، س = ± ٢ $\sqrt{٣}$

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ د (٠) = ٠

س	−٢ $\sqrt{٣}$	−٢	٠	٢	٢ $\sqrt{٣}$
د (س)	٠	−١٦	٠	١٦	٠



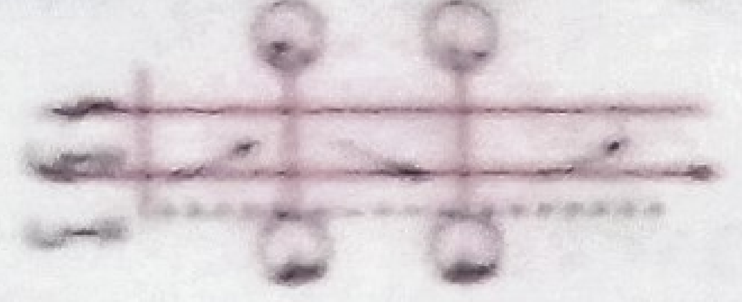
④ د (س) = س $(س + ٣)^{٢}$

= $س^{٣}$ + ٦ $س^{٢}$ + ٩ س

∴ دَ (س) = ٣ $س^{٢}$ + ١٢ س + ٩

، دً (س) = ٦ س + ١٢

• بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = −١ أ، −٣



• بوضع دً (س) = ٠ ∴ س = −٢



• لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

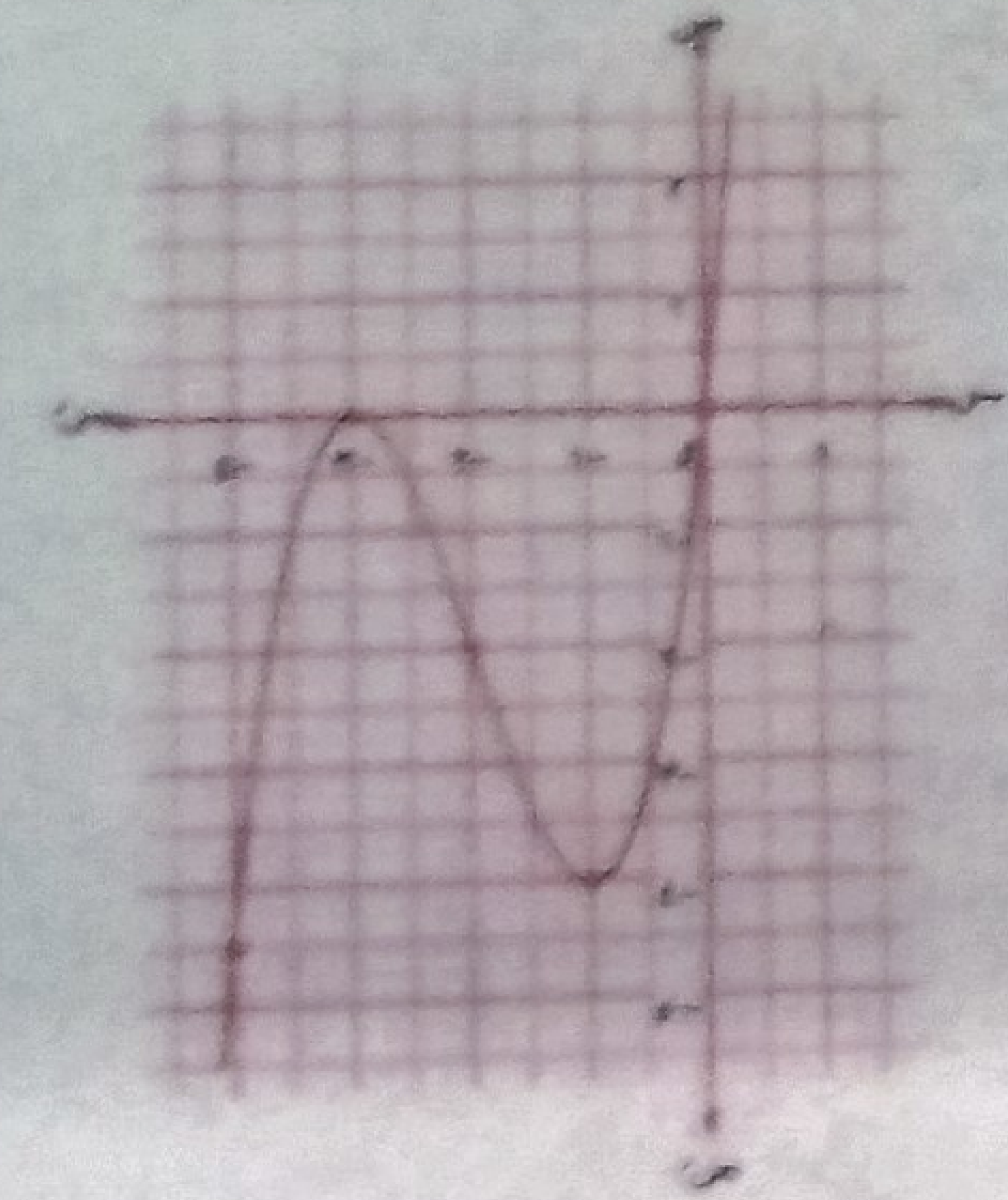
نضع د (س) = ٠ ∴ س = ٠ أ، س = −٣

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ د (٠) = ٠

• نعين نقطة مساعدة : د (−٤) = −٤

س	−٤	−٣	−٢	−١	٠
د (س)	−٤	٠	−٢	−٤	٠

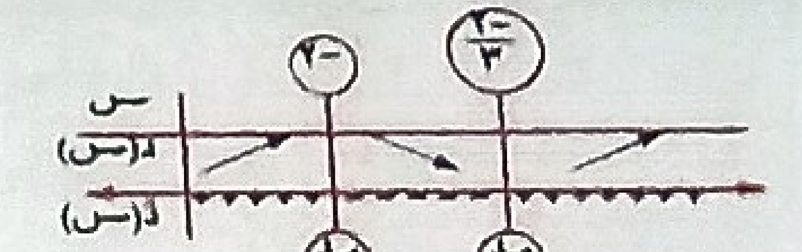


⑤ د (س) = $س^{٣}$ + ٤ $س^{٢}$ + ٤ س

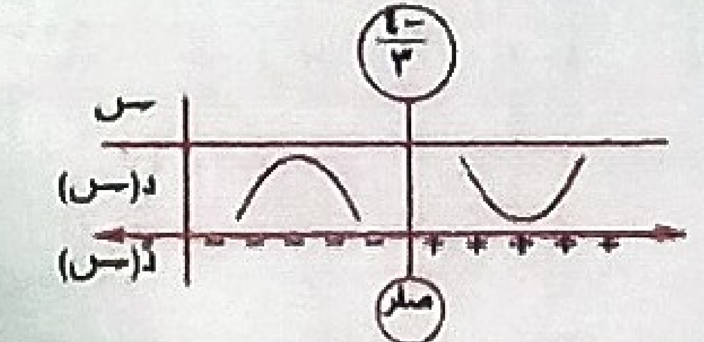
∴ دَ (س) = ٣ $س^{٢}$ + ٨ س + ٤

، دً (س) = ٦ س + ٨

* بوضع دَ (س) = ٠   ∴ س = $\frac{-٢}{٣}$ ، -٢



* بوضع دً (س) = ٠   ∴ س = $\frac{-٤}{٣}$



* لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات :

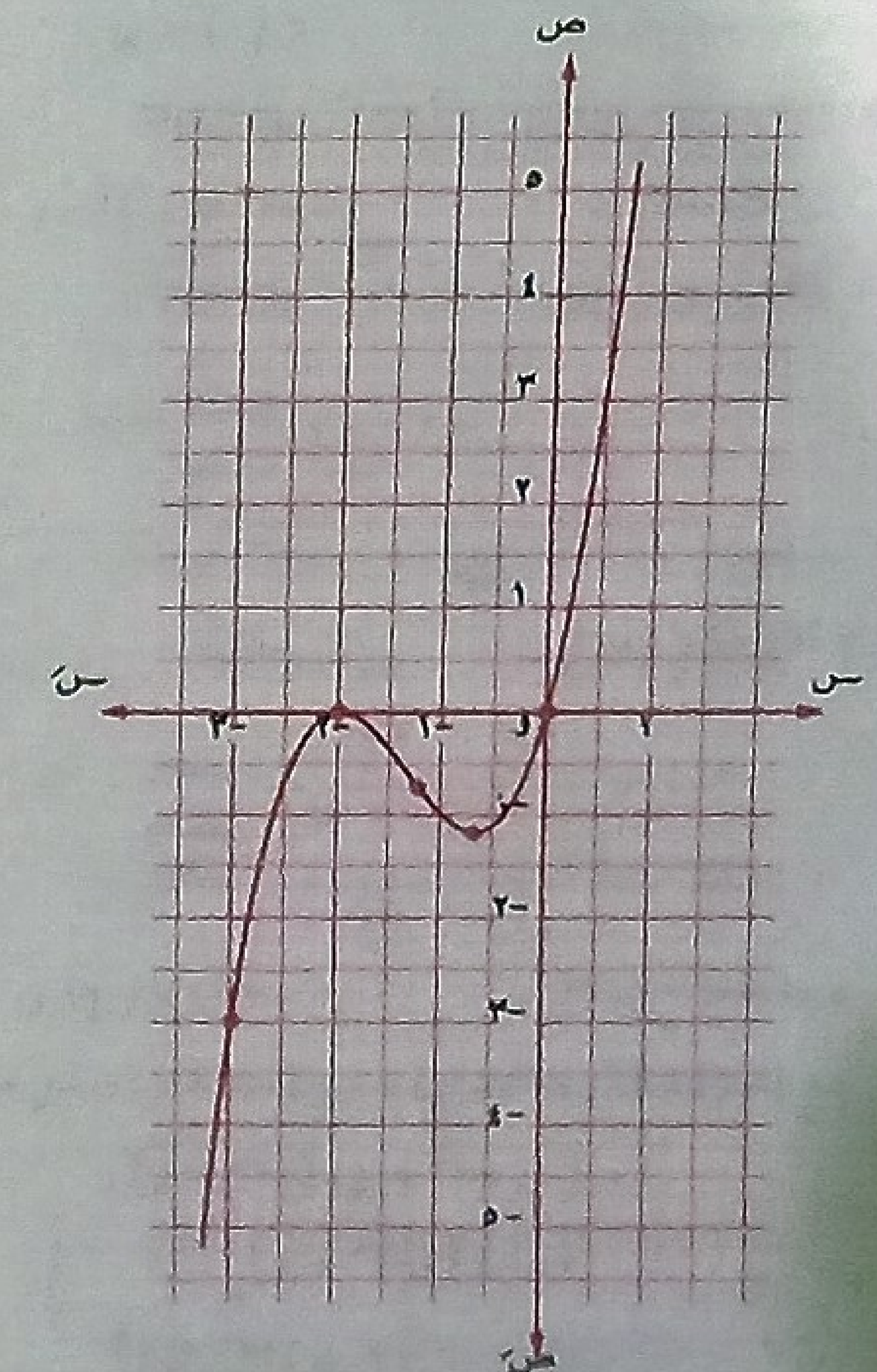
نضع د (س) = ٠   ∴ س = ٠ ، أ، = -٢

* لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات :

نضع س = ٠   ∴ د (٠) = ٠

* نعين نقطة مساعدة : د (-٣) = -٣

س	-٣	-٢	$\frac{-٤}{٣}$	$\frac{-٢}{٣}$	٠
د (س)	-٣	٠	$\frac{-١٦}{٢٧}$	$\frac{-٣٢}{٢٧}$	٠

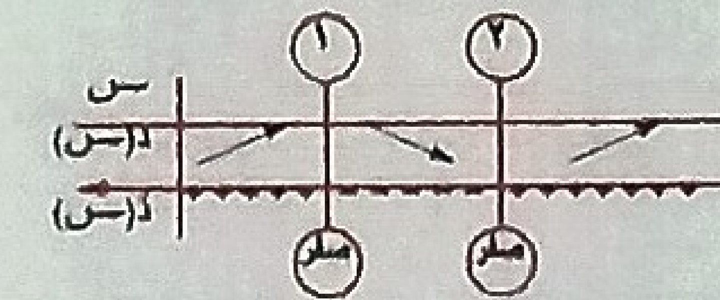


⑥ د (س) = ٢ $س^{٣}$ - ٩ $س^{٢}$ + ١٢ س - ٢

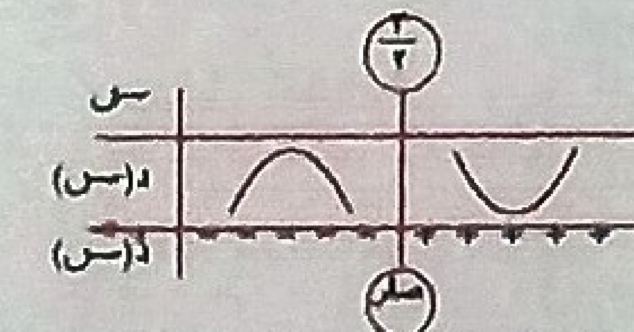
∴ دَ (س) = ٦ $س^{٢}$ - ١٨ س + ١٢

، دً (س) = ١٢ س - ١٨

* بوضع دَ (س) = ٠   ∴ س = ١ أ، ٢



* بوضع دً (س) = ٠   ∴ س = $\frac{٣}{٢}$

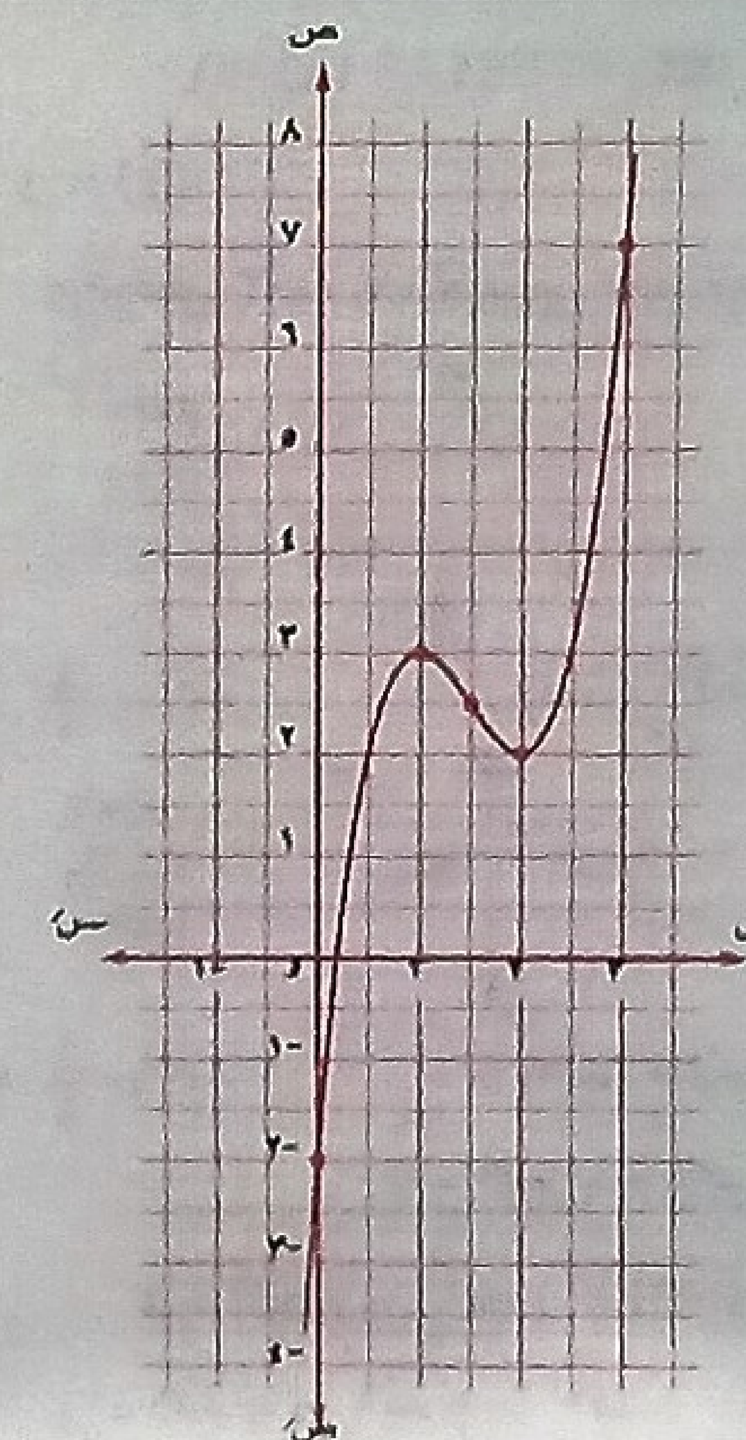


* لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠   ∴ د (٠) = ٠

* نعين نقطة مساعدة : د (٣) = ٧

س	٠	١	$\frac{٣}{٢}$	٢	٣
د (س)	-٢	٣	$\frac{٥}{٢}$	٢	٧

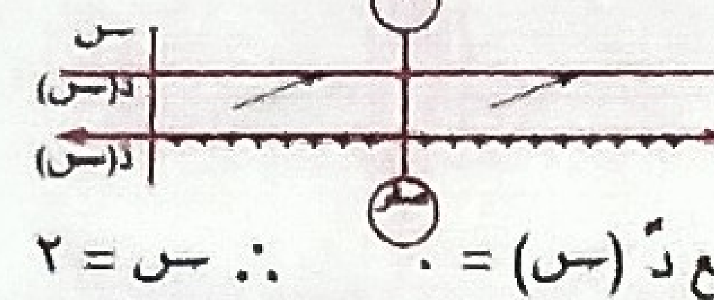


⑦ د (س) = $س^{٣}$ - ٦ $س^{٢}$ + ١٢ س - ٥

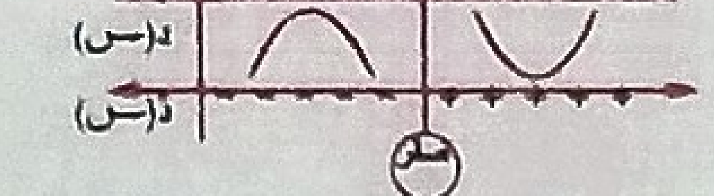
∴ دَ (س) = ٣ $س^{٢}$ - ١٢ س + ١٢

، دً (س) = ٦ س - ١٢

* بوضع دَ (س) = ٠   ∴ س = ٢



* بوضع دً (س) = ٠   ∴ س = ٢

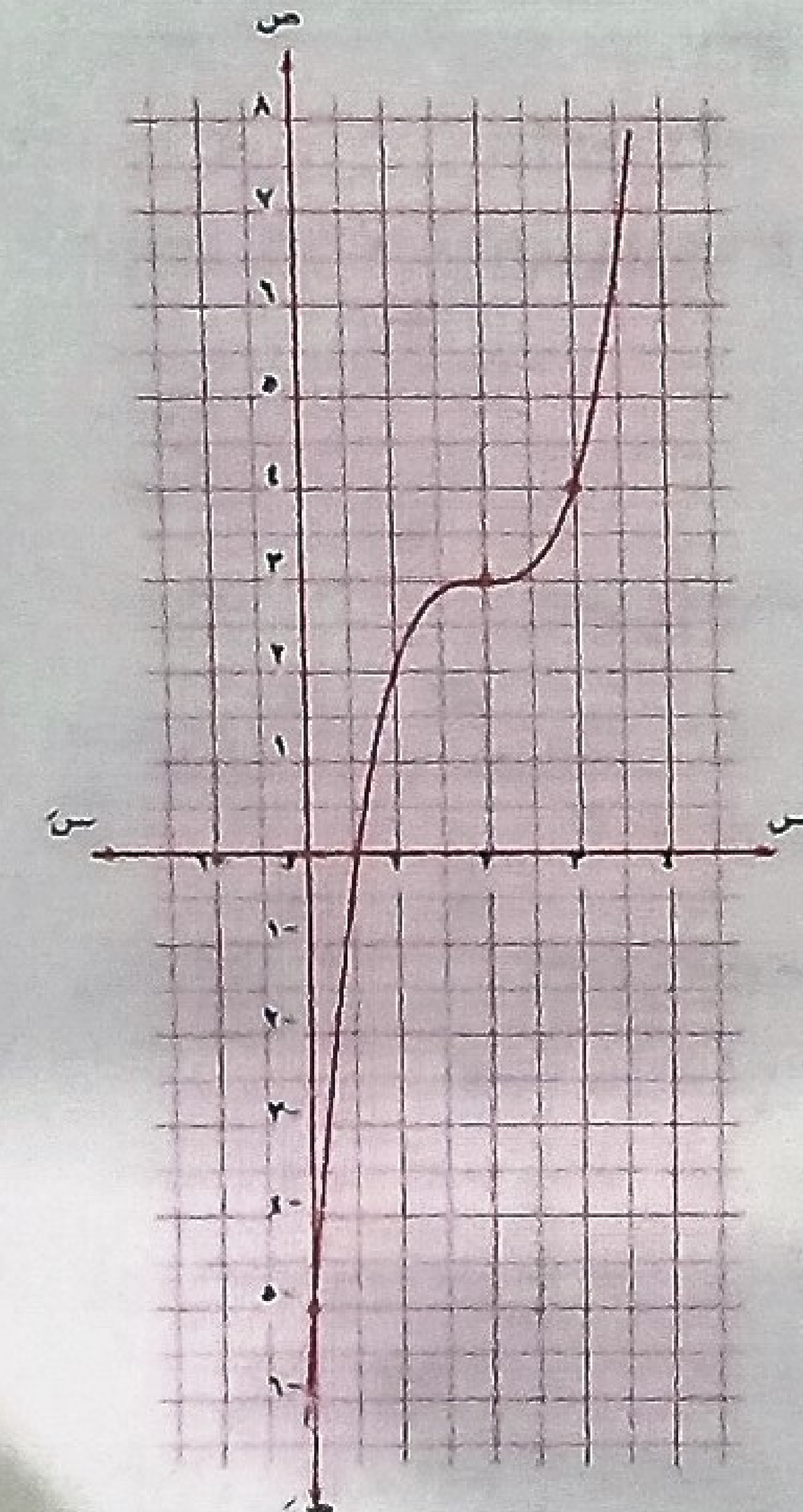


* لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠   ∴ د (٠) = -٥

* نعين نقطة مساعدة : د (٣) = ٤

س	٠	٢	٣
د (س)	-٥	٣	٤

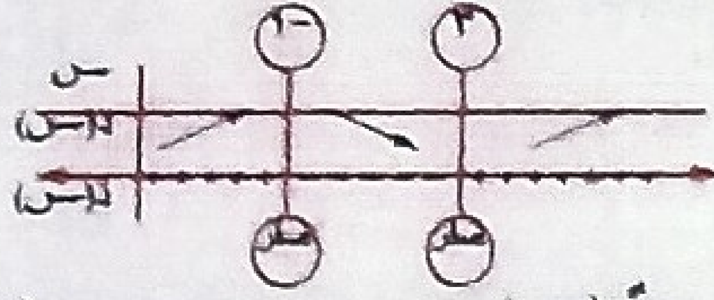


⑧ د (س) = $\frac{١}{٣}$ $س^{٣}$ - $س^{٢}$ - ٣ س + ١

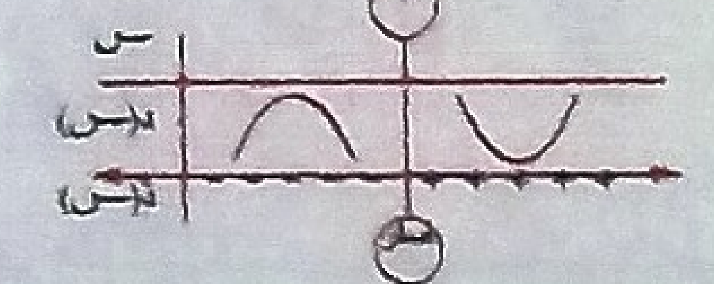
∴ دَ (س) = $س^{٢}$ - ٢ س - ٣

، دً (س) = ٢ س - ٢

* بوضع دَ (س) = ٠   ∴ س = -١ أ، ٢



* بوضع دً (س) = ٠   ∴ س = ١



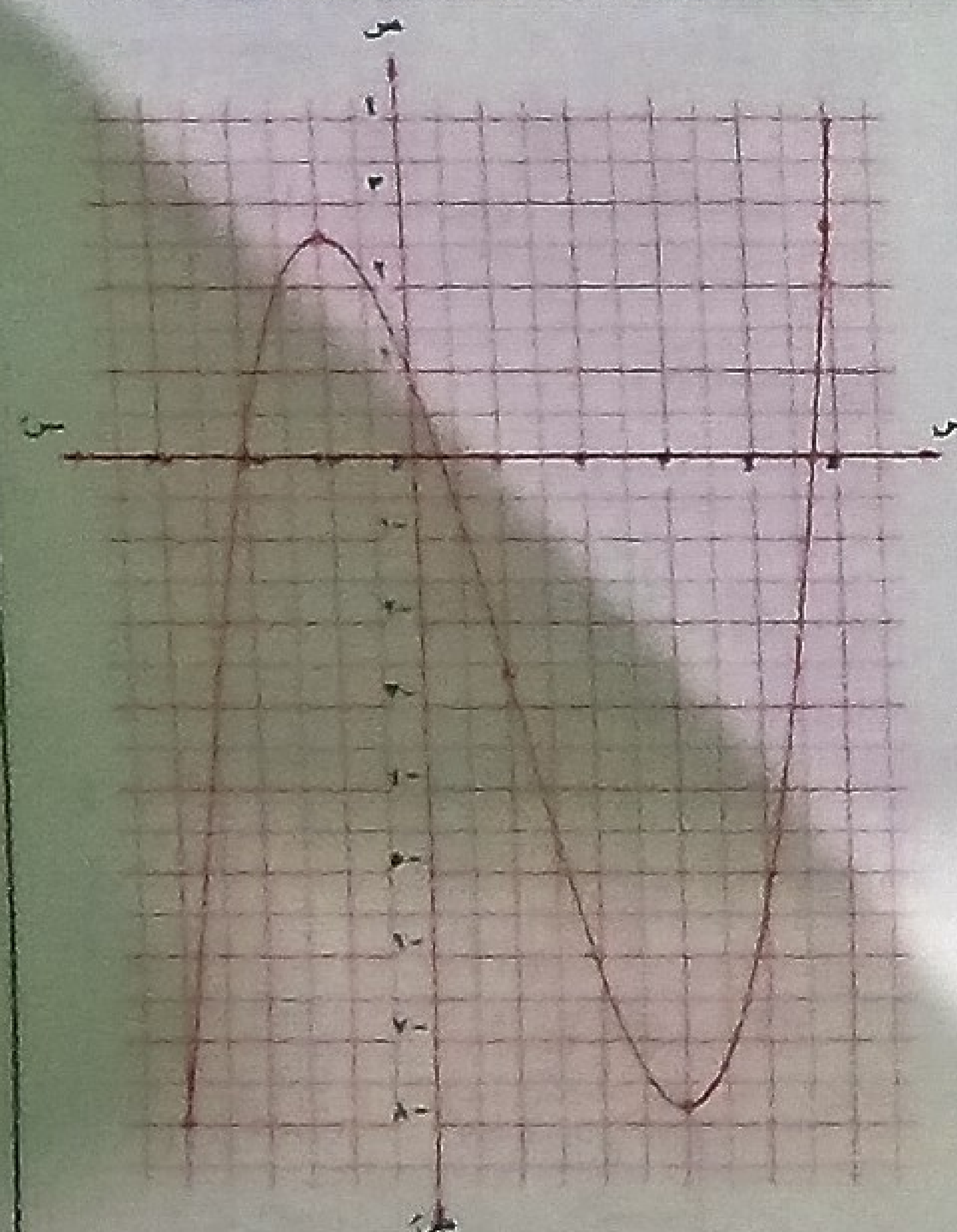
* لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠   ∴ د (٠) = ١

* نعين نقط مساعدة : د (-٣) = -٨

، د (٥) = $\frac{٨}{٣}$

س	-٣	-١	١	٣	٥
د (س)	-٨	$\frac{٨}{٣}$	$\frac{-٨}{٣}$	-٨	$\frac{٨}{٣}$

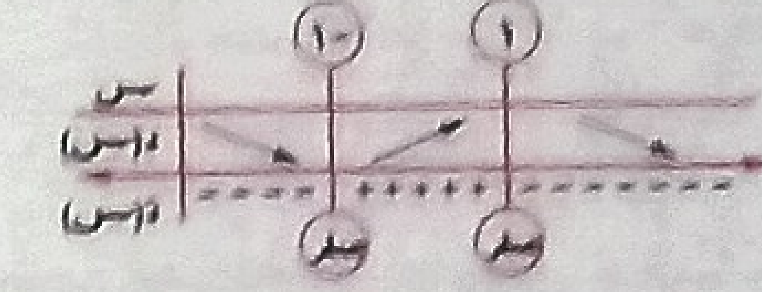


(٩) د (س) = (٢ − س) (س + ١)^٢

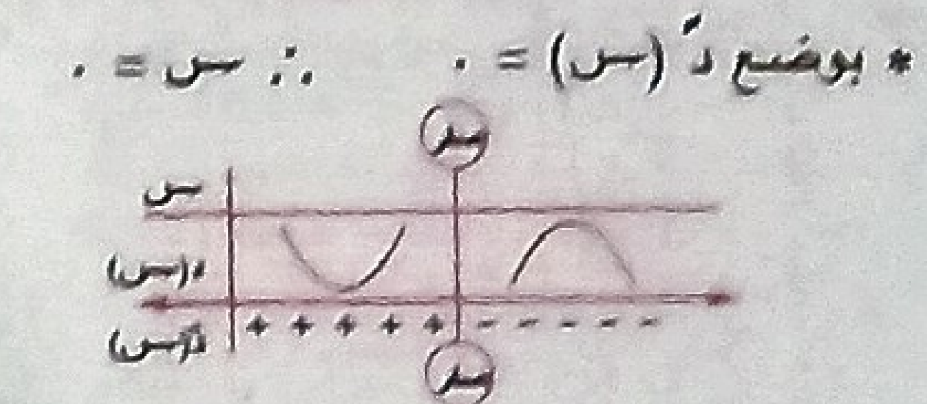
∴ دَ (س) = (٢ − س) × ٢ (س + ١)
+ (−١) (س + ١)^٢
= (−٣ س + ٣) (س + ١)

، دً (س) = (−٣ س + ٣) + −٣ (س + ١) = −٦ س

* بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = −١ أ، ١



* بوضع دً (س) = ٠ ∴ س = ٠

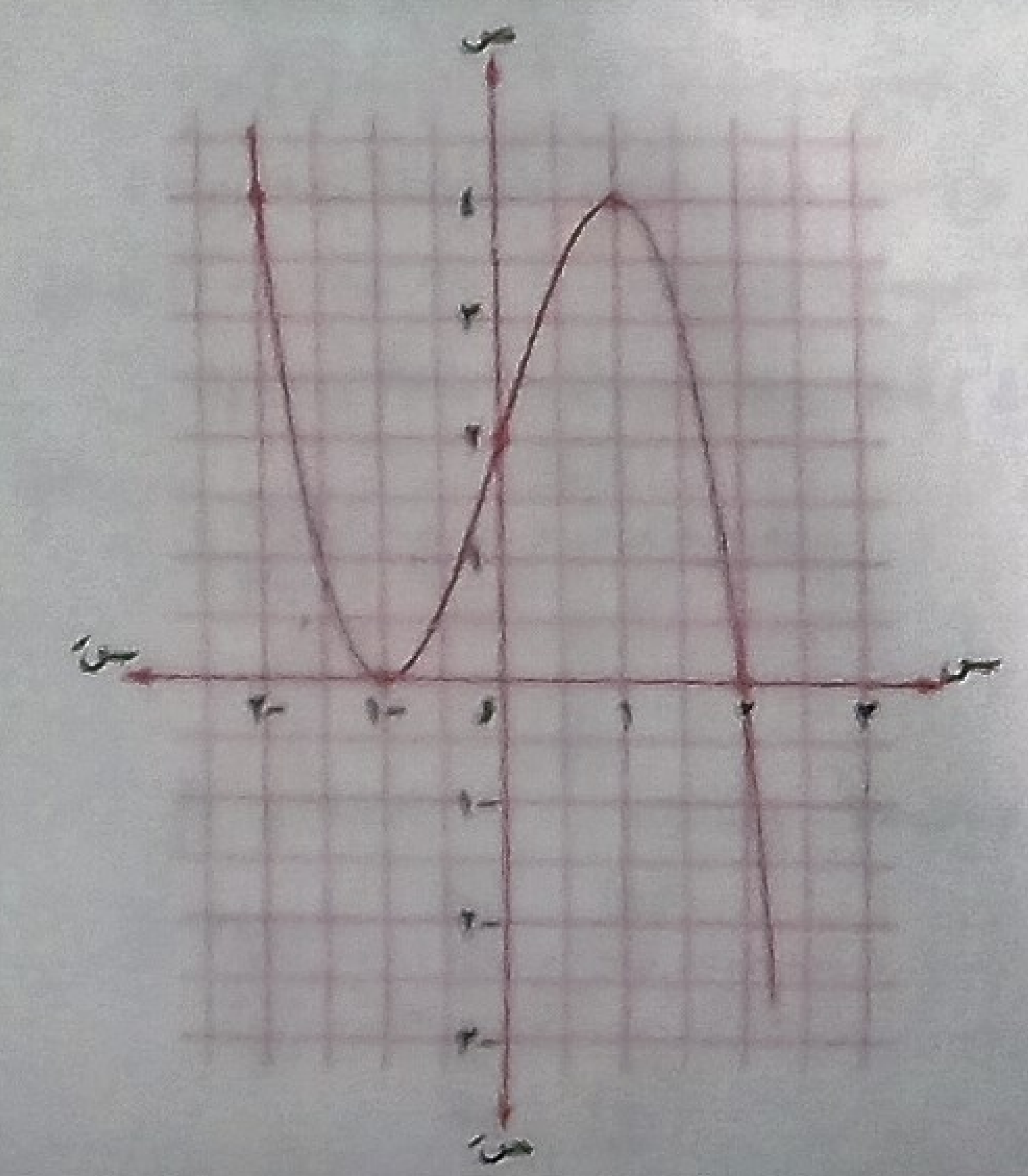


* لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات :
∴ د (س) = ٠ ∴ س = ٢ أ، −١

* لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات :
نضع س = ٠ ∴ د (٠) = ٢

* نعين نقطة مساعدة : د (−٢) = ٤

س	−٢	−١	٠	١	٢
د (س)	٤	٠	٢	٤	٠

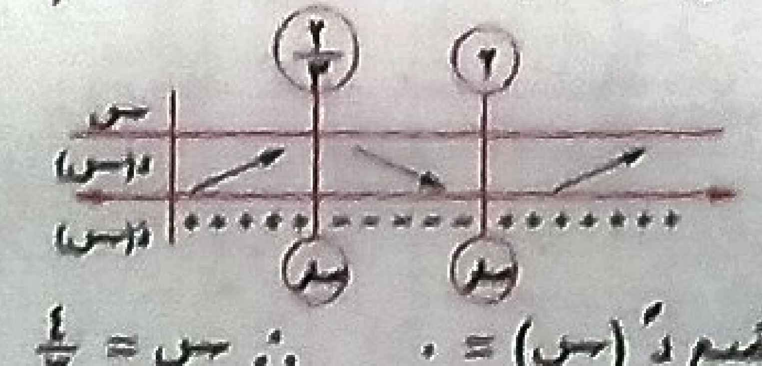


(١٠) د (س) = س (س − ٢)^٢ + ٣
= س^٣ − ٤ س^٢ + ٤ س + ٣

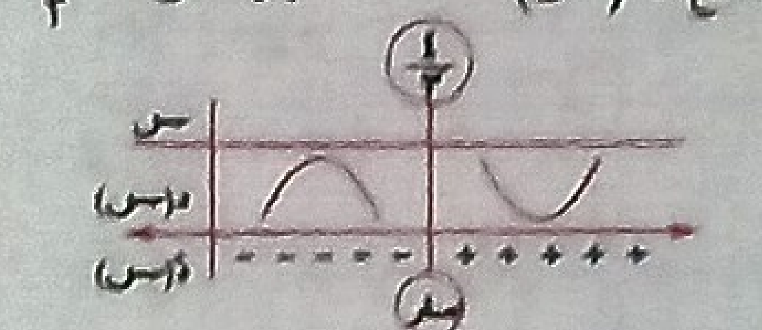
∴ دَ (س) = ٣ س^٢ − ٨ س + ٤

، دً (س) = ٦ س − ٨

* بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = ٢/٣ ، ٢



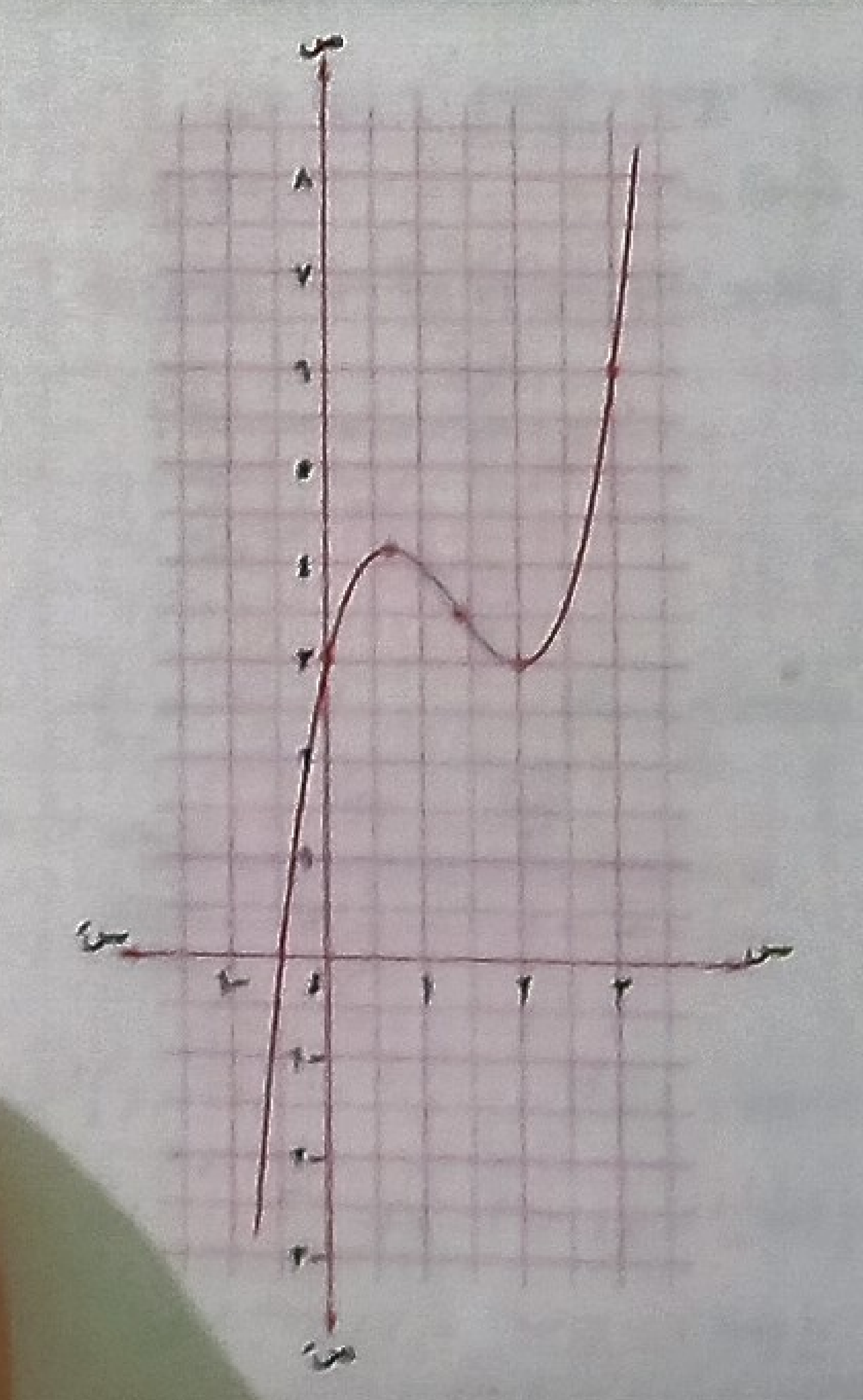
* بوضع دً (س) = ٠ ∴ س = ٤/٣



* لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات
س = ٠ ∴ د (٠) = ٣

* نعين نقطة مساعدة : د (٣) = ٦

س	٠	٢/٣	٤/٣	٢	٣
د (س)	٣	١١٣/٢٧	٩٧/٢٧	٣	٦

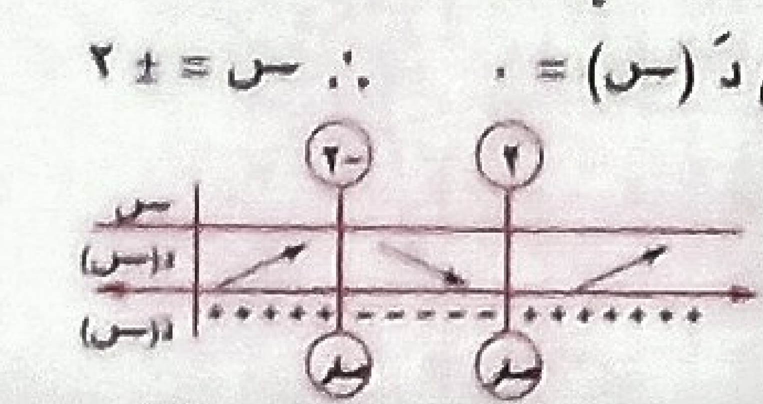


(١١) د (س) = ١/٨ (س + ٤) (س − ٢)^٢

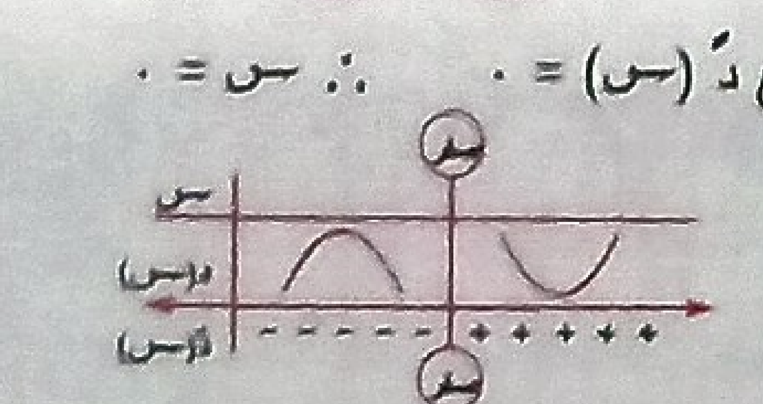
∴ دَ (س) = ١/٨ (س + ٤) × ٢ (س − ٢)
+ ١/٨ (س − ٢)^٢
= ٣/٨ (س − ٢) (س + ٢)
= ٣/٨ (س^٢ − ٤)

∴ دً (س) = ٣/٤ س

* بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = ±٢



* بوضع دً (س) = ٠ ∴ س = ٠

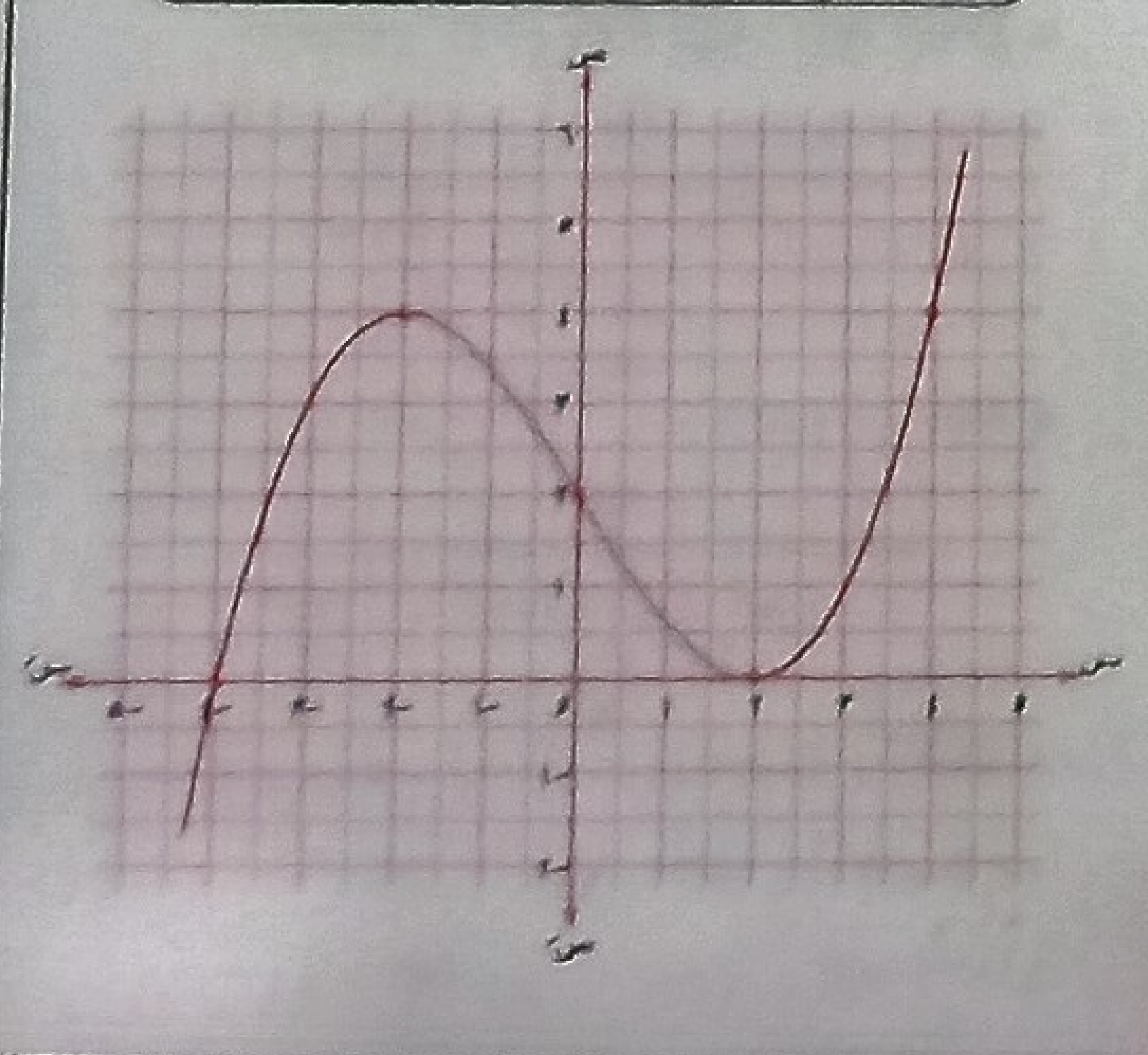


* لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات
نضع د (س) = ٠ ∴ س = −٤ أ، ٢

* لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات
نضع س = ٠ ∴ د (٠) = ٢

* نعين نقطة مساعدة : د (٤) = ٤

س	−٤	−٢	٠	٢	٤
د (س)	٠	٤	٢	٠	٤



(١٢) د (س) = س |س − ٤|

= { −س^٢ + ٤ س ، س < ٤
  { س^٢ − ٤ س ، س ≥ ٤

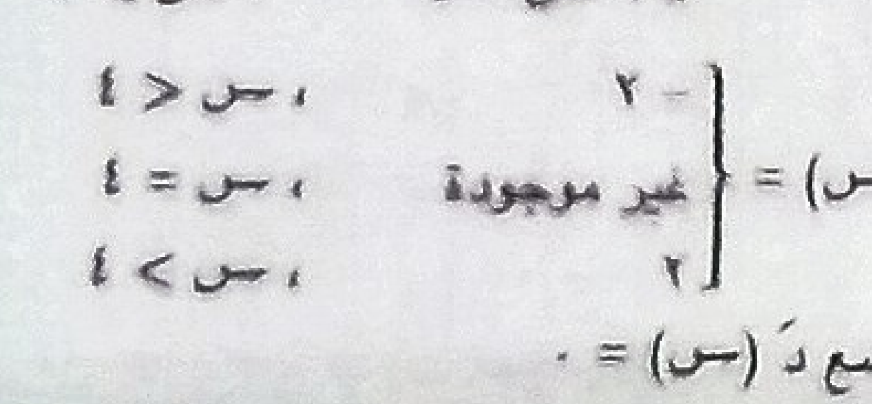
، ∵ دَ (٤^+) ≠ دَ (٤^−)

∴ دَ (س) = { −٢ س + ٤ ، س < ٤
            { غير موجودة ، س = ٤
            { ٢ س − ٤ ، س > ٤

، دً (س) = { −٢ ، س < ٤
           { غير موجودة ، س = ٤
           { ٢ ، س > ٤

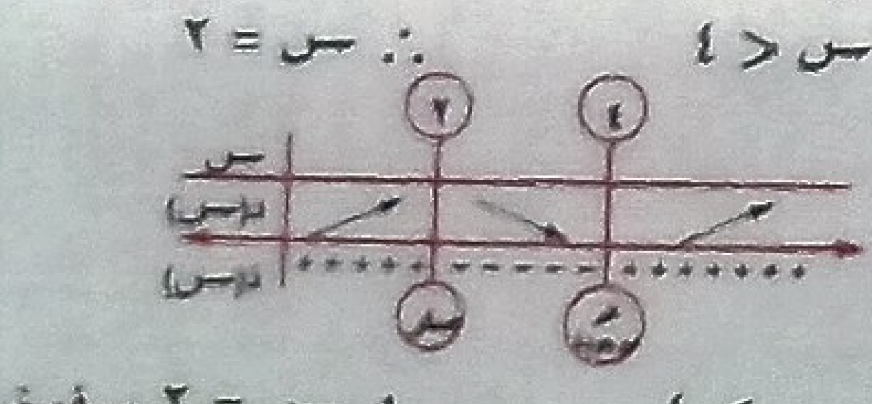
* بوضع دَ (س) = ٠

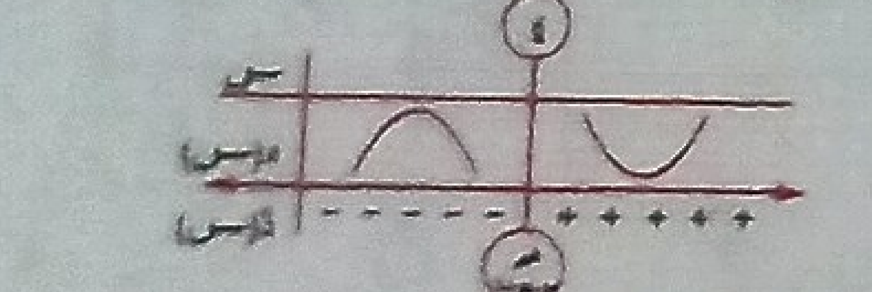
أولاً : س < ٤ ∴ س = ٢



ثانيًا : س > ٤ ∴ س = ٢ مرفوض

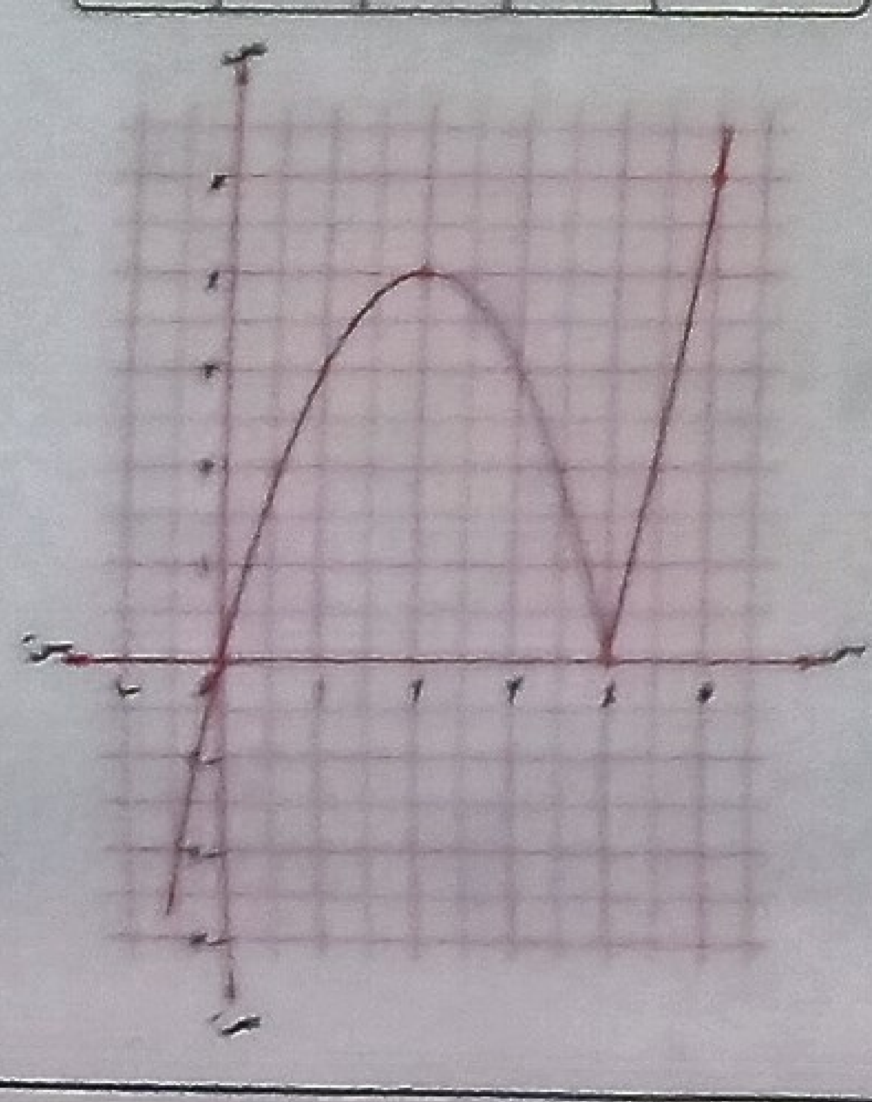
* دً (س) ≠ ٠ لجميع قيم س





* نعين نقط مساعدة : د (٠) = ٠ ، د (٥) = ٥

س	٠	٢	٤	٥
د (س)	٠	٤	٠	٥



(١٣) د (س) = { س^{٣} − ٣ س^{٢} ، س < ٠ ؛ س^{٢} − ٢ س ، س ≥ ٠ }

∵ دَ (٠$^-$) ≠ دَ (٠$^+$) ∴ دَ (٠) غير موجودة.

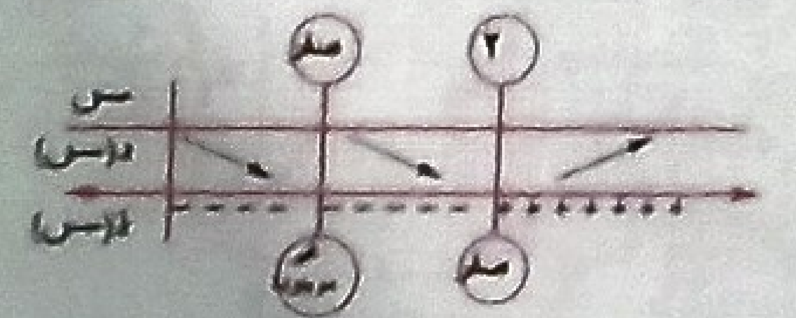
∴ دَ (س) = { ٣ س^{٢} − ٦ س ، س < ٠ ؛ غير موجودة ، س = ٠ ؛ ٢ س − ٢ ، س > ٠ }

، دً (س) = { ٦ س − ٦ ، س < ٠ ؛ غير موجودة ، س = ٠ ؛ ٢ ، س > ٠ }

* بوضع دَ (س) = ٠

أولاً : عند س > ٠ ∴ س = ٢

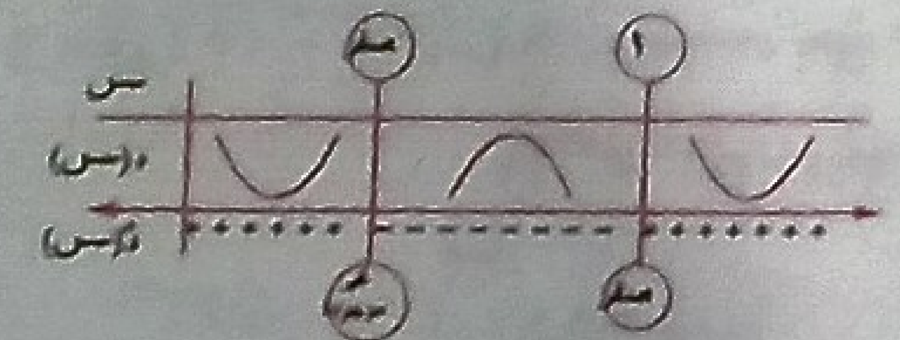
ثانيًا : س < ٠ لا يوجد



* بوضع دً (س) = ٠

عند س > ٠ ∴ س = ١

عند س < ٠ لا يوجد



* لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

نضع د (س) = ٠ ، عند س > ٠ ∴ س = ٣

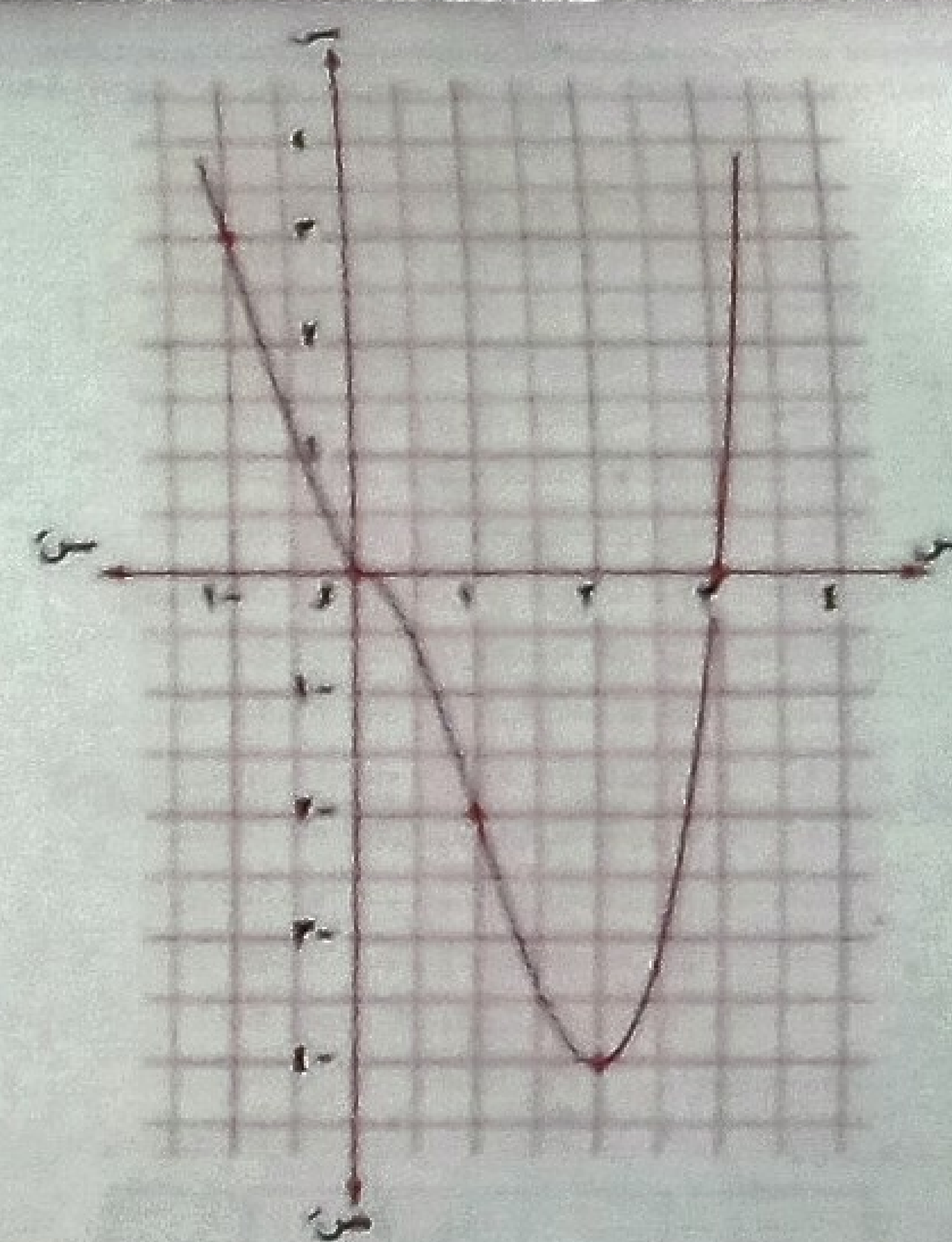
، عند س ≥ ٠ ∴ س = ٠

* لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ د (٠) = ٠

* نعين نقطة مساعدة : د (−١) = ٣

س	−١	٠	١	٢	٣
د (س)	٣	٠	−٢	−٤	٠



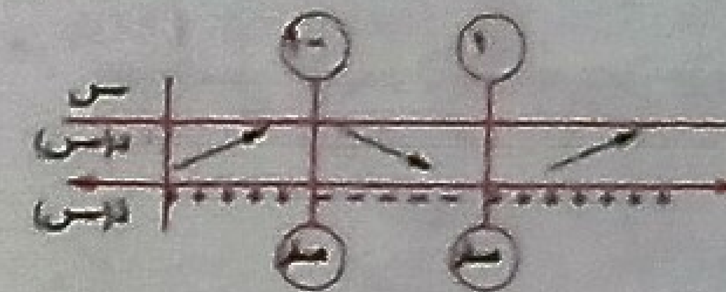
٢

ص = س^{٣} − ٣ س + ٤

∴ صَ = ٣ س^{٢} − ٣

، صً = ٦ س

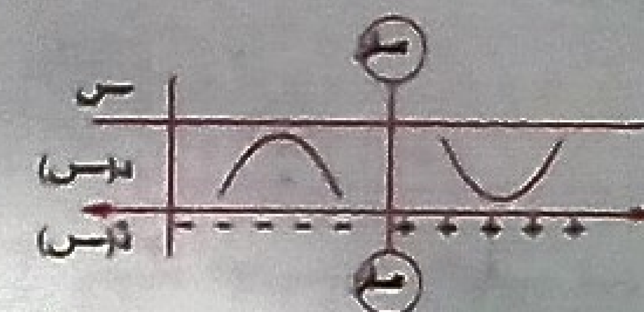
* بوضع صَ = ٠ ∴ س = ± ١



∴ د متزايدة فى]−∞ ، −١[،]١ ، ∞[

، متناقصة فى]−١ ، ١[

* بوضع صً = ٠ ∴ س = ٠

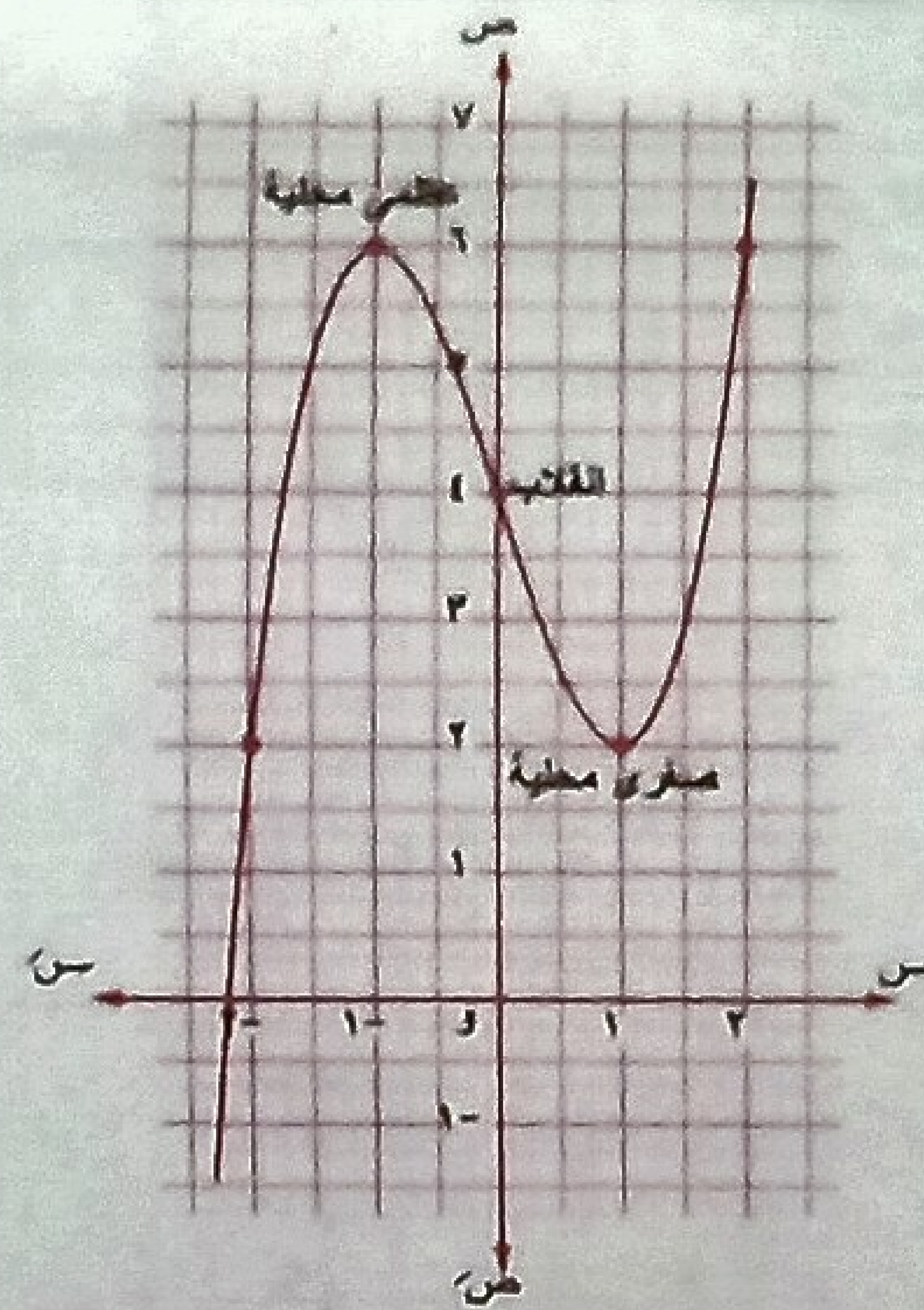


* لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ ص = ٤

* نعين نقط مساعدة : د (−٢) = ٢ ، د (٢) = ٦

س	−٢	−١	٠	١	٢
د (س)	٢	٦	٤	٢	٦



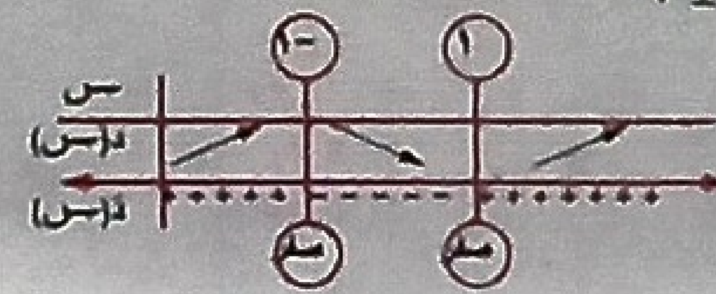
٣

د (س) = (س + ١) (س^{٢} − س − ٢)

∴ دَ (س) = (س + ١) (٢ س − ١)
+ (س^{٢} − س − ٢)
= ٣ س^{٢} − ٣

، دً (س) = ٦ س بوضع دَ (س) = ٠

∴ س = ± ١

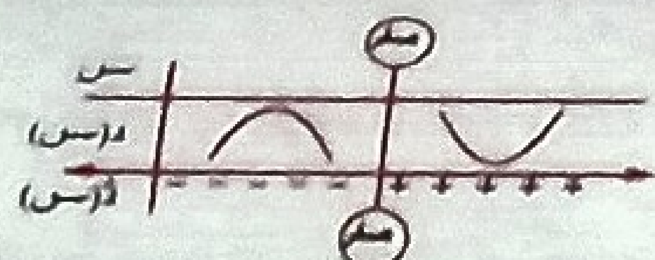


∴ توجد قيمة عظمى محلية د (−١) = صفر

كما توجد قيمة صغرى محلية

د (١) = −٤

بوضع دً (س) = ٠ ∴ س = ٠



∴ توجد نقطة انقلاب (٠ ، −٢)

* لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

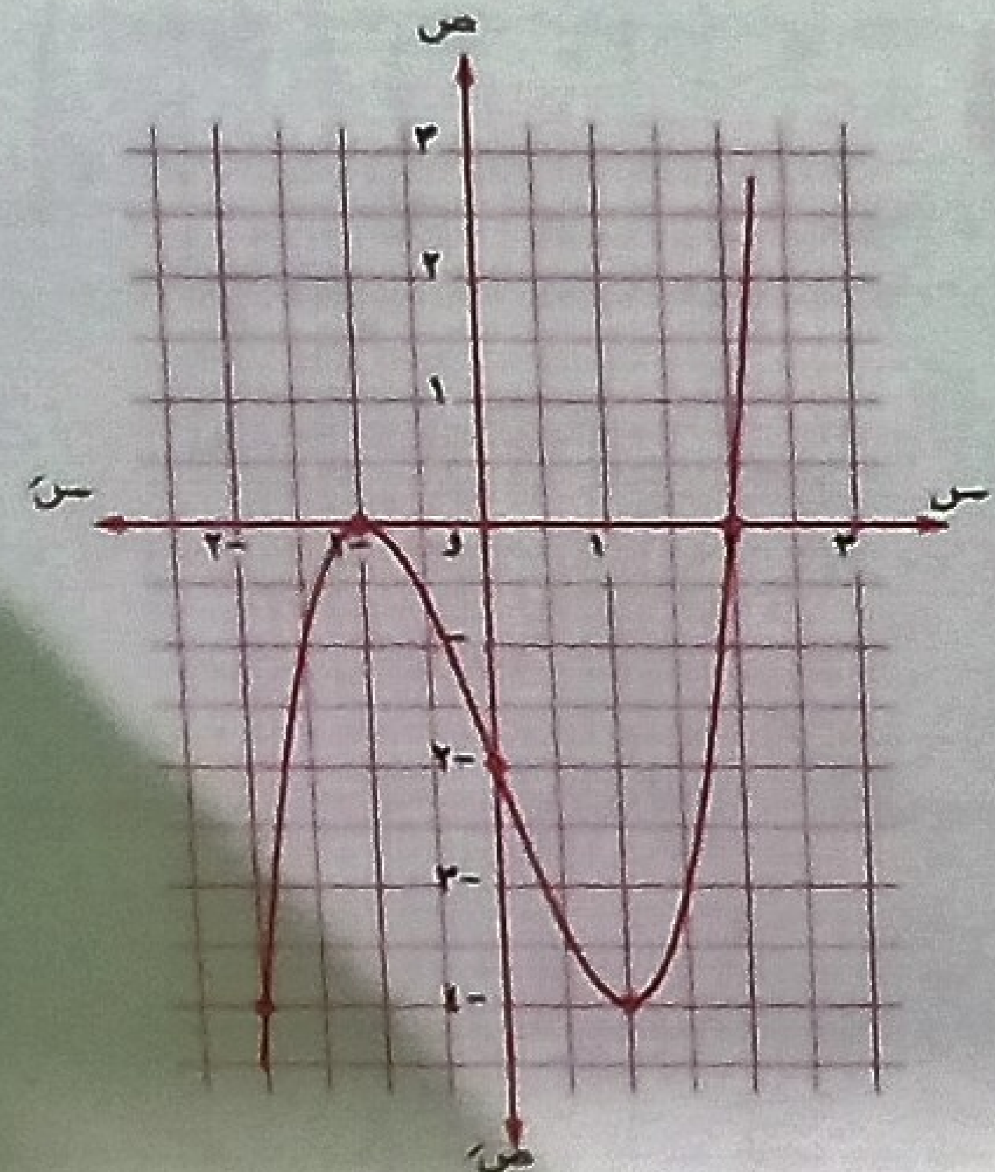
نضع د (س) = ٠ ∴ س = −١ ، ٢

* لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ د (٠) = −٢

* نعين نقطة مساعدة : د (−٢) = −٤

س	−٢	−١	٠	١	٢
د (س)	−٤	٠	−٢	−٤	٠



٤

د (س) = س^{٣} − ٣ س^{٢} + ٤

∴ دَ (س) = ٣ س^{٢} − ٦ س

، دً (س) = ٦ س − ٦

• بوضع د̀ (س) = ٠

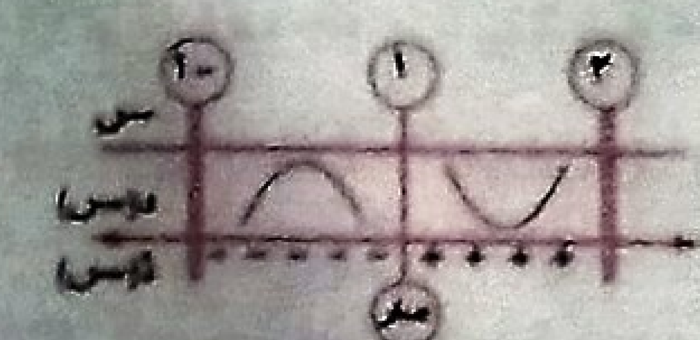
∴ س = ٠ أ، س = ٢



∴ توجد قيمة عظمى محلية د (٠) = ٤

، قيمة صغرى محلية د (٢) = ٠

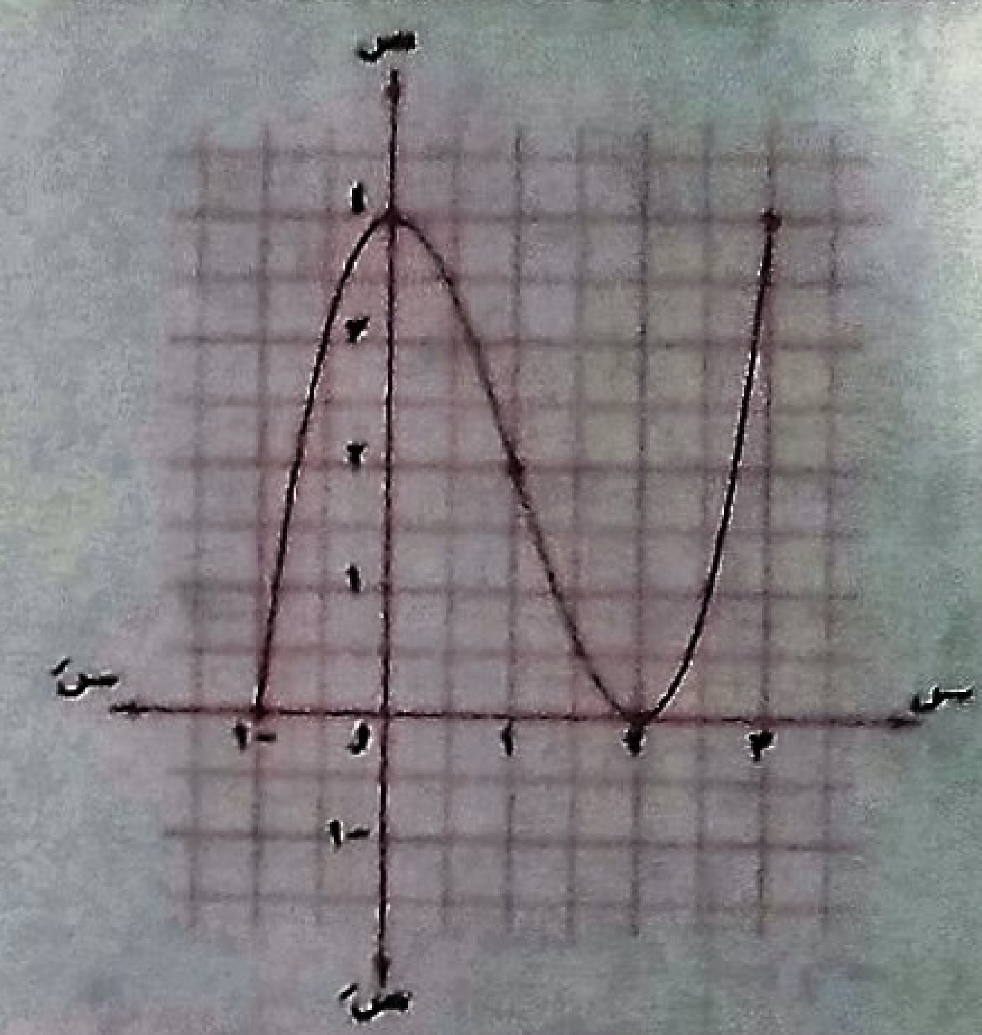
• بوضع د̀̀ (س) = ٠ ∴ س = ١



توجد نقطة انقلاب هي (١ ، ٢)

• تعين نقط مساعدة : د (−١) = ٠ ، د (٣) = ٤

س	١−	٠	١	٢	٣
د (س)	٠	٤	٢	٠	٤



٥

$ص = س^٣ + س^٢ + س$

$∴ ص̀ = ٣ س^٢ + ٢ س + ١$

، ص̀̀ = ٦ س + ٢

• بوضع ص̀ = ٠

$٢ س^٢ + ٢ س + ١ = ٠$

ليس لها قيمة في ح تحققها

∴ لا توجد قيم عظمى أو صغرى محلية



• بوضع ص̀̀ = ٠ ∴ س = $\frac{-١}{٣}$



∴ $\left(\frac{-١}{٣} ، \frac{-٧}{٢٧}\right)$ نقطة انقلاب

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

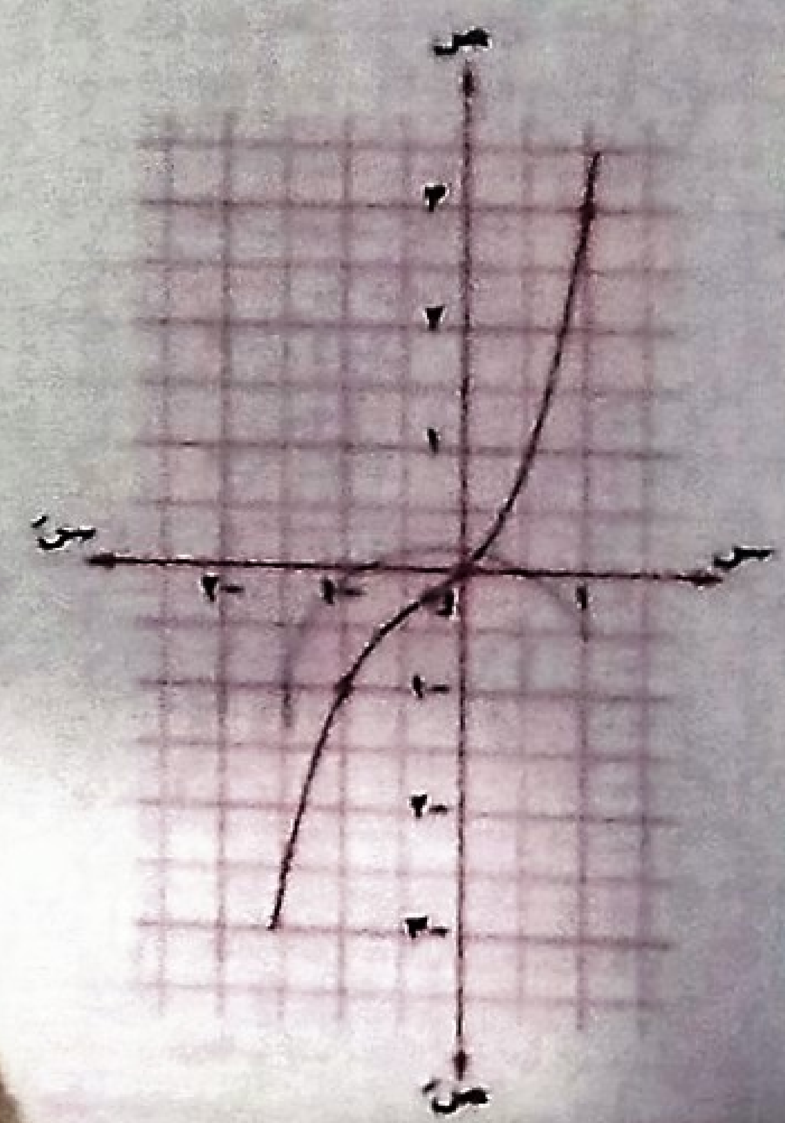
نضع د (س) = ٠ ∴ س = ٠

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

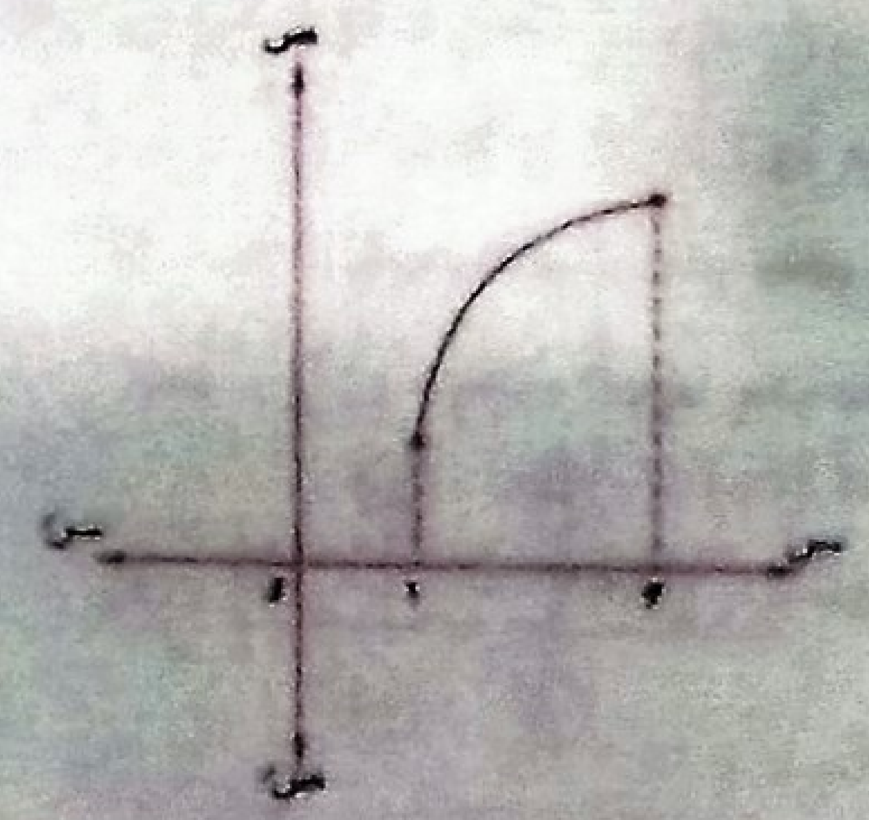
نضع س = ٠ ∴ ص = ٠

• تعين نقطة مساعدة : د (−١) = −١ ، د (١) = ٣

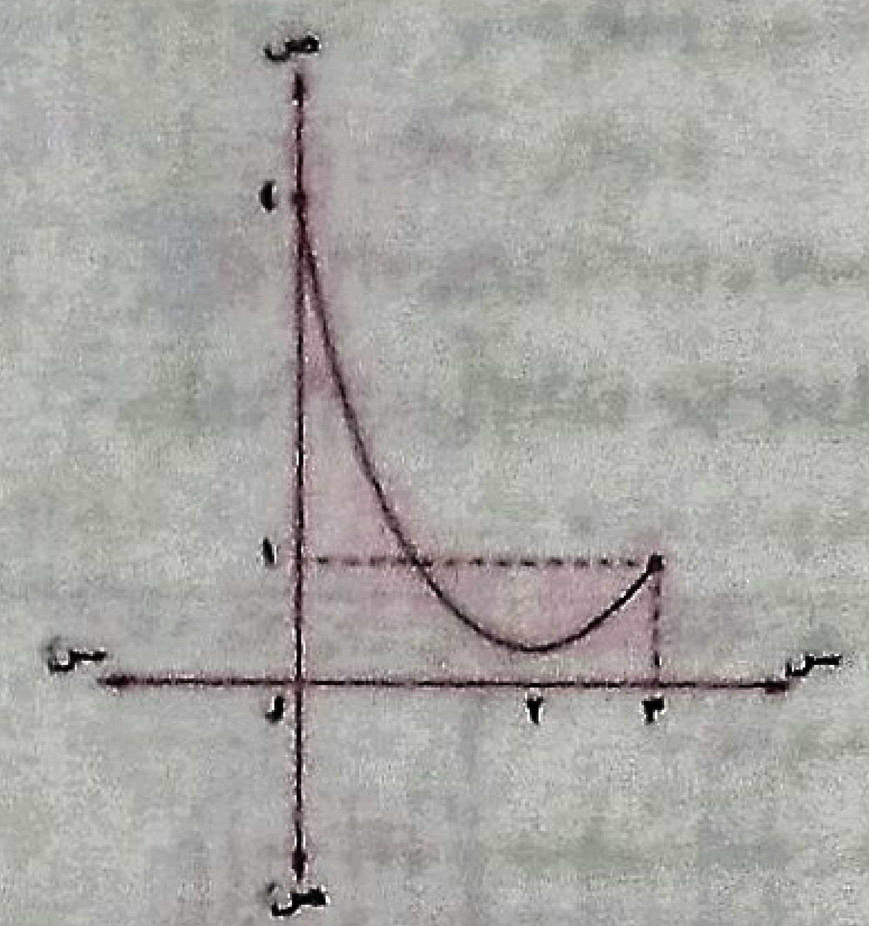
س	١−	$\frac{-١}{٣}$	٠	١
ص	١−	$\frac{-٧}{٢٧}$	٠	٣



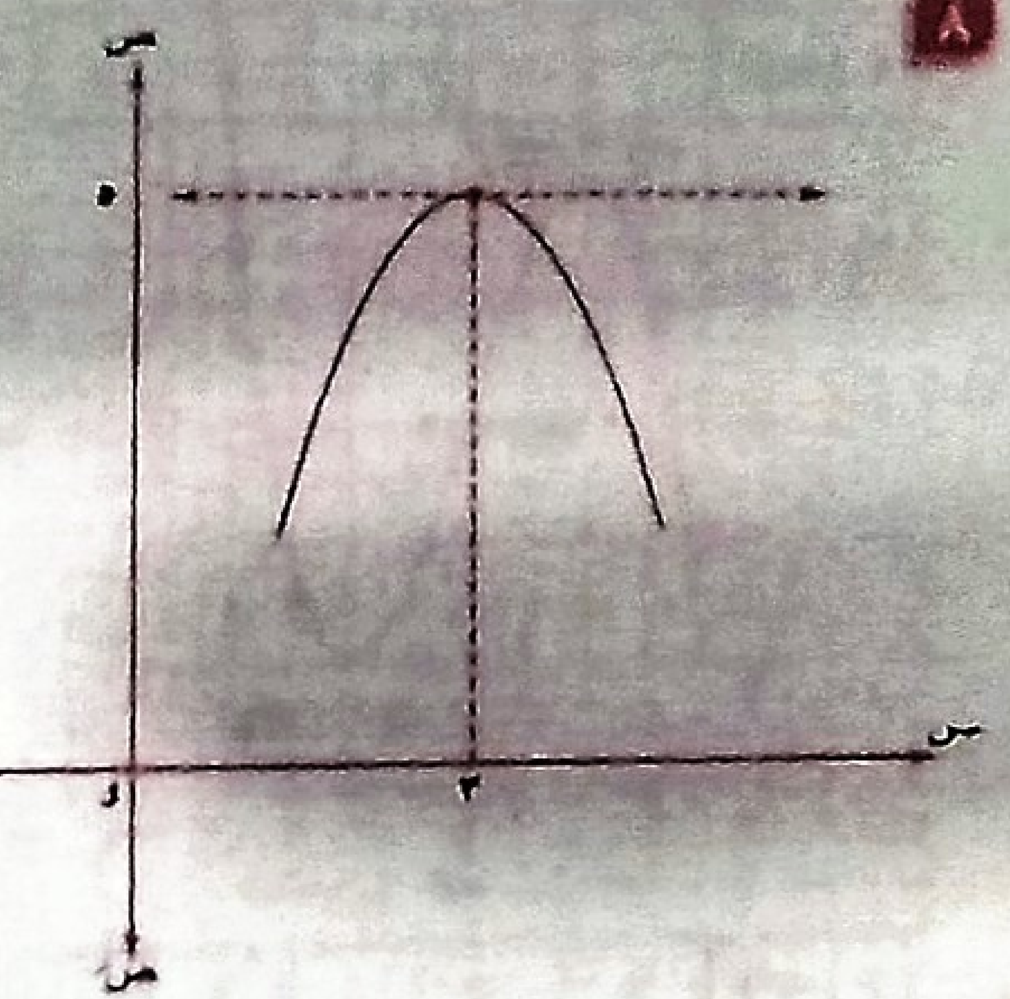
٦



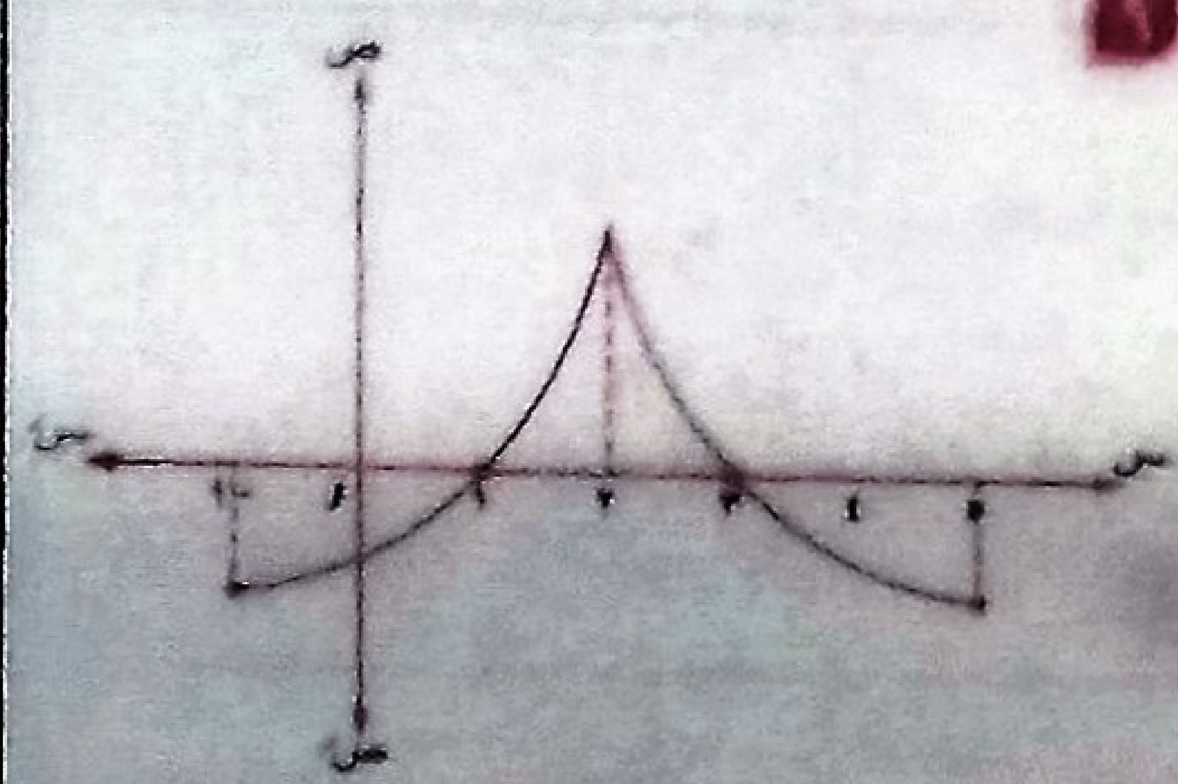
٧



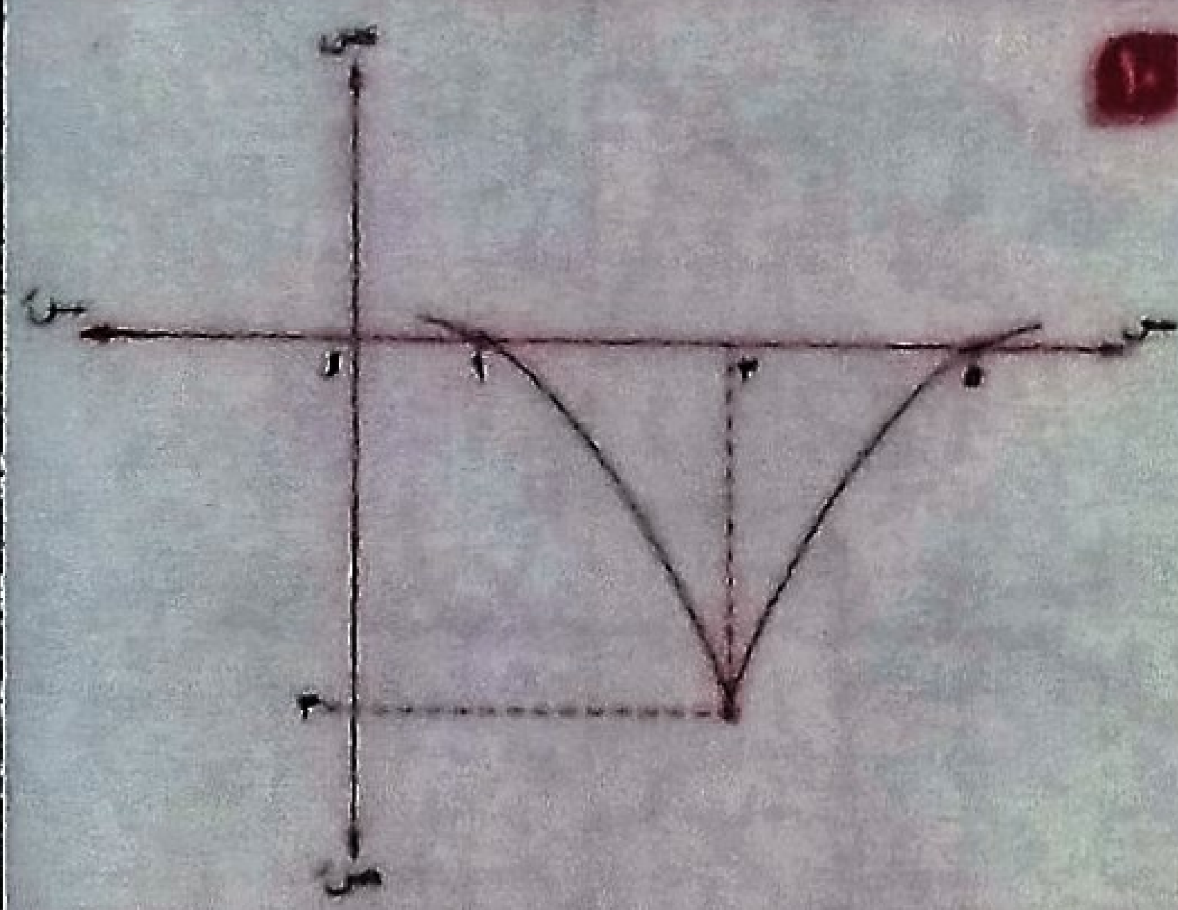
٨



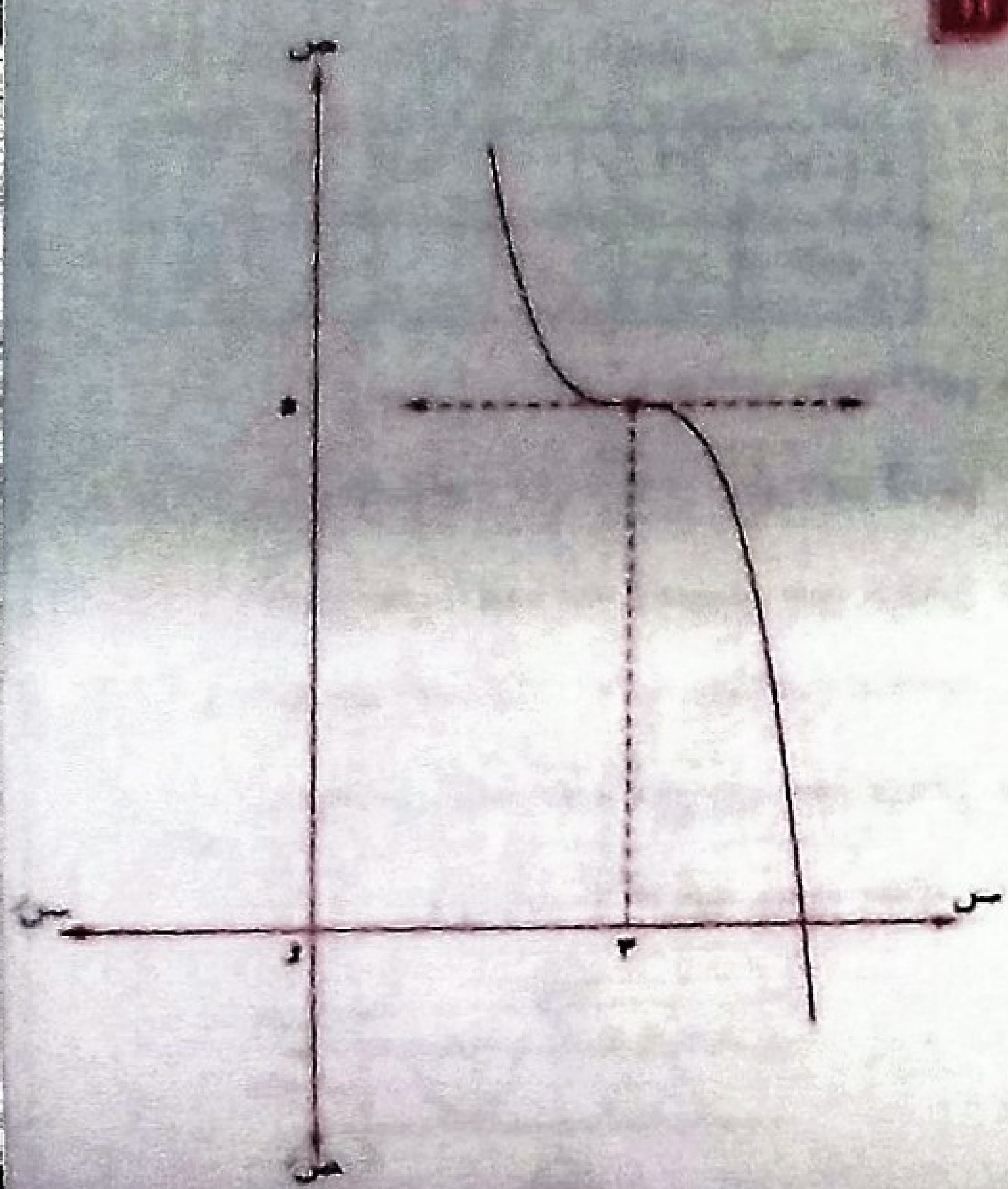
٩



١٠



١١



• لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات نضع س = ٠

نعين نقط مساعدة

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات نضع س = ٠

• نعين نقط مساعدة

١٨

ص = س^{٣} + أ س^{٢} + ب س

∴ صَ = ٣ س^{٢} + ٢ أ س + ب

∴ صً = ٦ س + ٢ أ

∵ المنحنى يمر بالنقطة (-١ ، ١١)

∴ ١١ = -١ + أ - ب ∴ أ - ب = ١٢ (١)

، ∵ توجد نقطة انقلاب عند س = -١

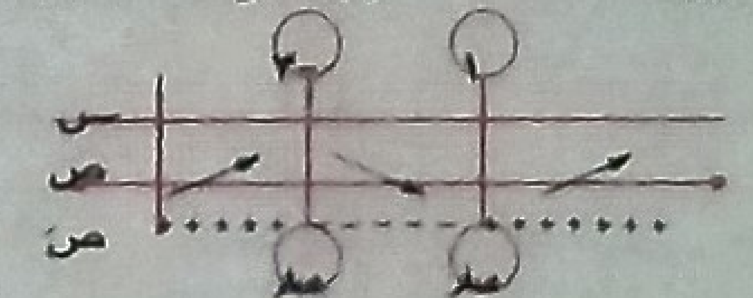
∴ صفر = ٦ (-١) + ٢ أ ∴ أ = ٣ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ب = -٩

∴ معادلة المنحنى : ص = س^{٣} + ٣ س^{٢} - ٩ س

∴ صَ = ٣ س^{٢} + ٦ س - ٩

، بوضع صَ = ٠ ∴ س = -٣ أ، ١



∴ عند س = -٣

قيمة عظمى محلية

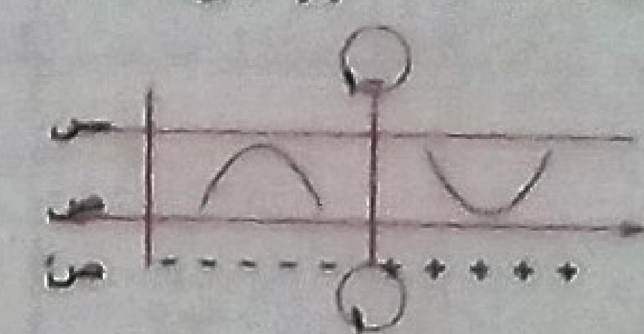
∴ النقطة (-٣ ، ٢٧) نقطة قيمة عظمى محلية

، عند س = ١ قيمة صغرى محلية

∴ النقطة (١ ، -٥) نقطة قيمة صغرى محلية

، صً = ٦ س + ٦

، بوضع صً = ٠ ∴ س = -١



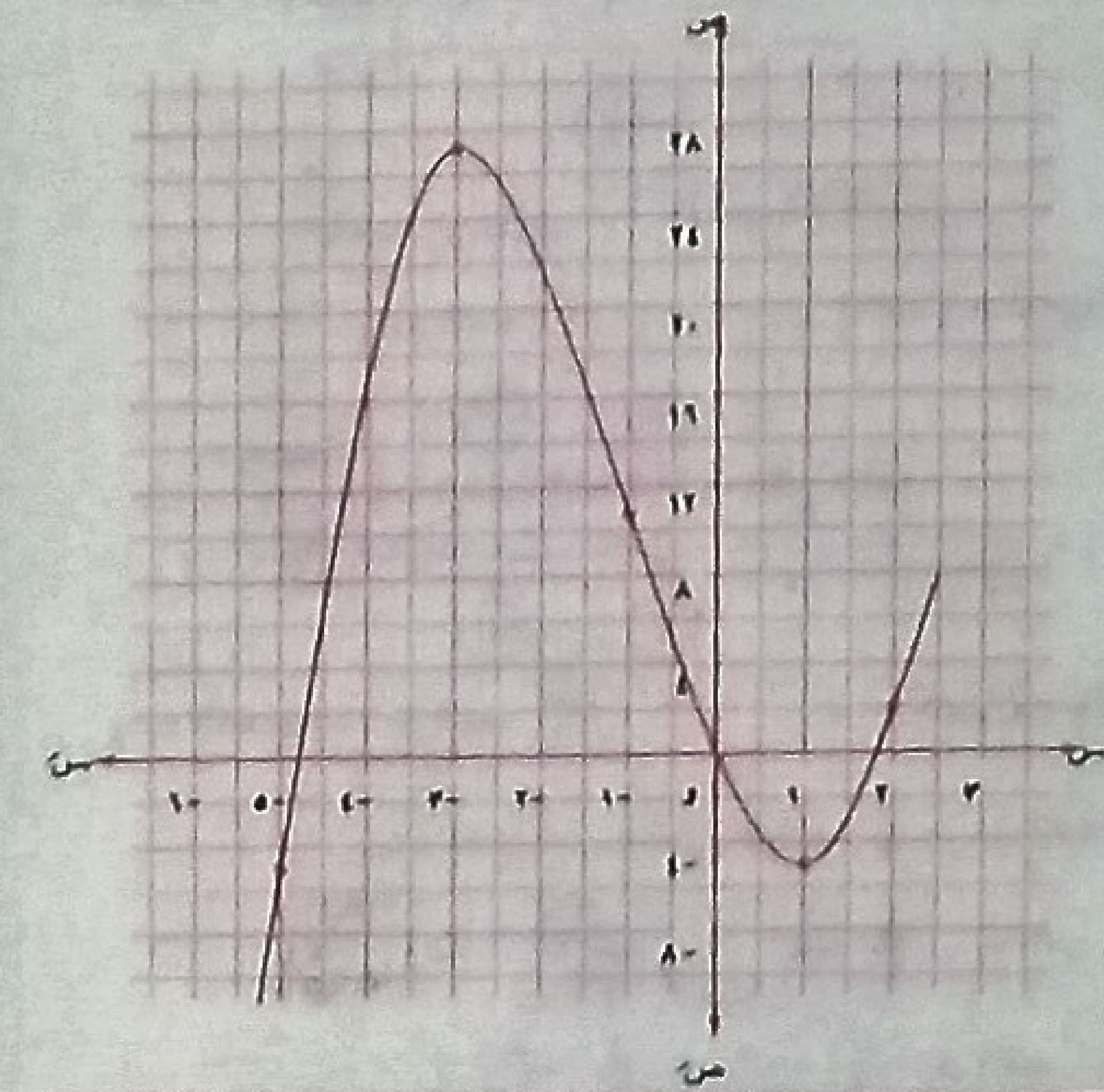
* لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ ص = ٠

* نعين نقط مساعدة : عند س = ٢ فإن : ص = ٢

، عند س = -٥ فإن : ص = -٥

س	-٥	-٣	-١	١	٢
د (س)	-٥	٢٧	١١	-٥	٢



١٩

د (س) = س^{٣} + أ س^{٢} + ب س + ٤

∴ دَ (س) = ٣ س^{٢} + ٢ أ س + ب

، دً (س) = ٦ س + ٢ أ

، ∵ دَ (س) = ٠ عند س = ٢

∴ ٠ = ٣ (٢)^{٢} + ٢ أ (٢) + ب

∴ ٤ أ + ب = -١٢ (١)

، دً (س) = ٠ عند س = ١

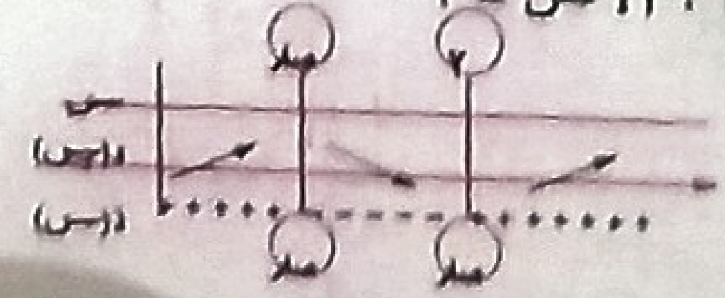
∴ ٠ = ٦ (١) + ٢ أ ∴ أ = -٣ (٢)

من (١) ، (٢) : فإن : ب = ٠

∴ د (س) = س^{٣} - ٣ س^{٢} + ٤

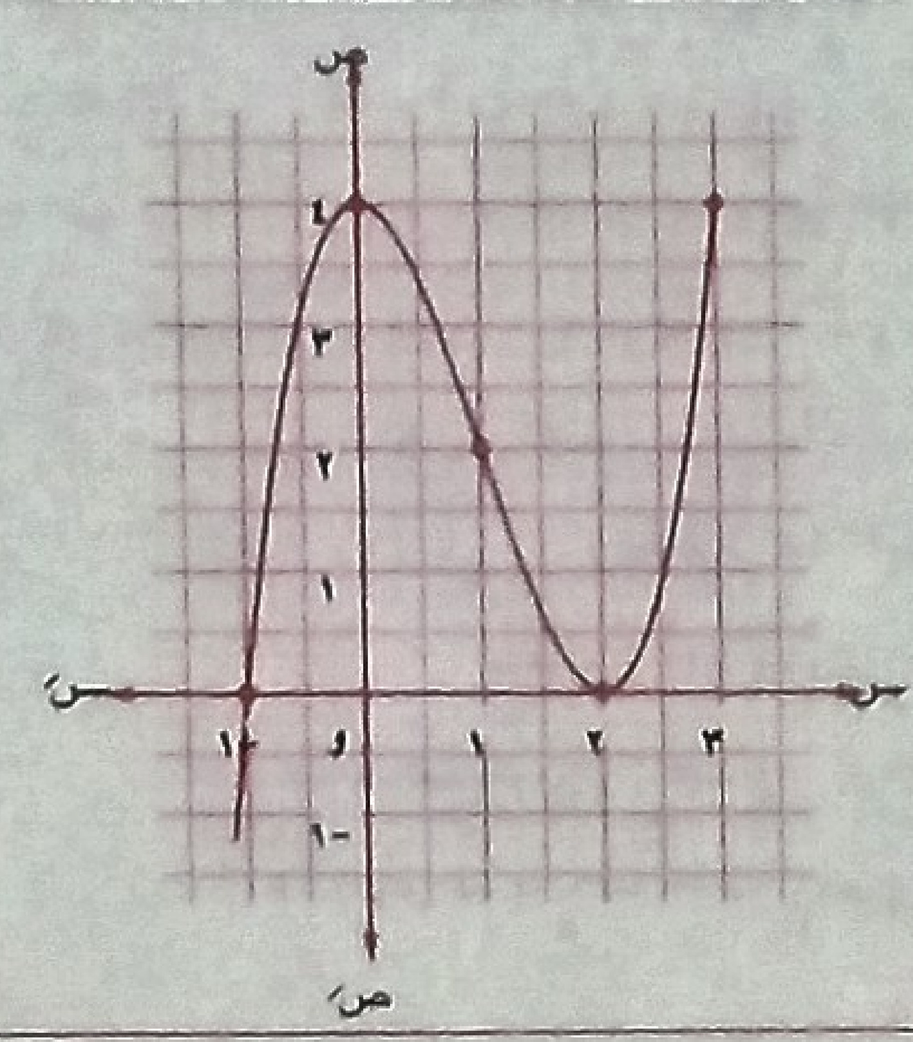
بوضع دَ (س) = ٠ ∴ ٣ س^{٢} - ٦ س = ٠

∴ س = ٠ أ، س = ٢



* نوجد نقط مساعدة : د (-١) = ٠ ، د (٣) = ٤

س	-١	٠	١	٢	٣
د (س)	٠	٤	٢	٠	٤



٢٠

د (س) = { س + ١ ، س < ١ ؛ (س - ٣)^{٢} - ٢ ، س ≥ ١ }

، ∵ دَ (١$^{-}$) ≠ دَ (١$^{+}$)

∴ دَ (س) = { ١ ، س < ١ ؛ غير موجودة ، س = ١ ؛ ٢ (س - ٣) ، س > ١ }

، دً (س) = { ٠ ، س < ١ ؛ غير موجودة ، س = ١ ؛ ٢ ، س > ١ }

، دَ (س) = ٠ عند س < ١ لا تحقق

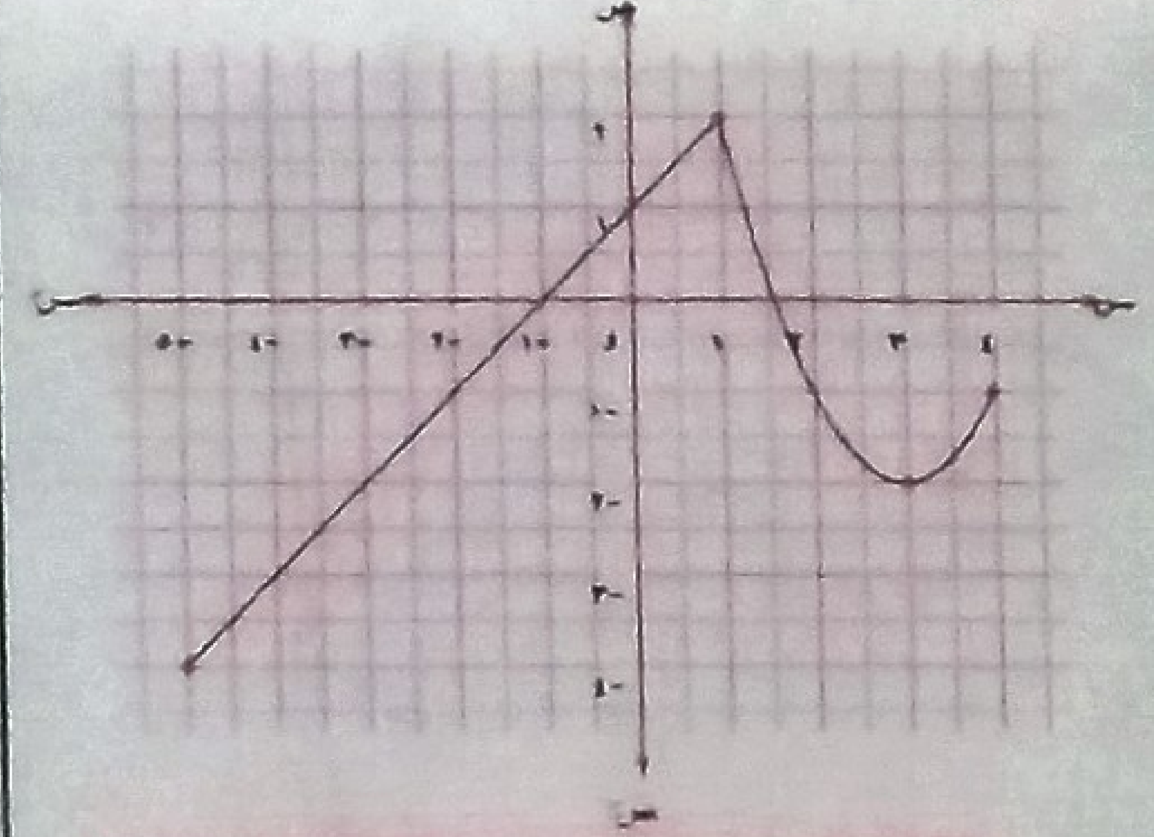
، عند س > ١ ∴ س = ٣

، ∵ دً (٣) = موجبة (صغرى)

س	-٥	١	٣	٤
د (س)	-٤	٢	-٢	-١

∴ يوجد قيمة عظمى مطلقة قيمتها ٢ عند س = ١

، صغرى مطلقة قيمتها -٤ عند س = -٥



ثانيا مسائل على المنحنيات المرسومة

١

(ب) تمثل الدالة د (س) ، (حـ) تمثل الدالة دَ (س)

، (أ) تمثل الدالة دً (س)

٢

① (حـ) ② (ب) ③ (أ) ④ (ب) ⑤ (ب)

٣

① (د) ② (أ)

٤

① د متزايدة فى]-٢ ، ١[

، ومتناقصة فى]-∞ ، -٢[،]١ ، ∞[

②]-∞ ، -١[

٥

① (ب) ② (د) ③ (حـ) ④ (أ) ⑤ (حـ)

٦

① محدب لأعلى فى]-٢ ، ١[ومحدب لأسفل فى]١ ، ٥[

② لها نقطة انقلاب عند س = ١

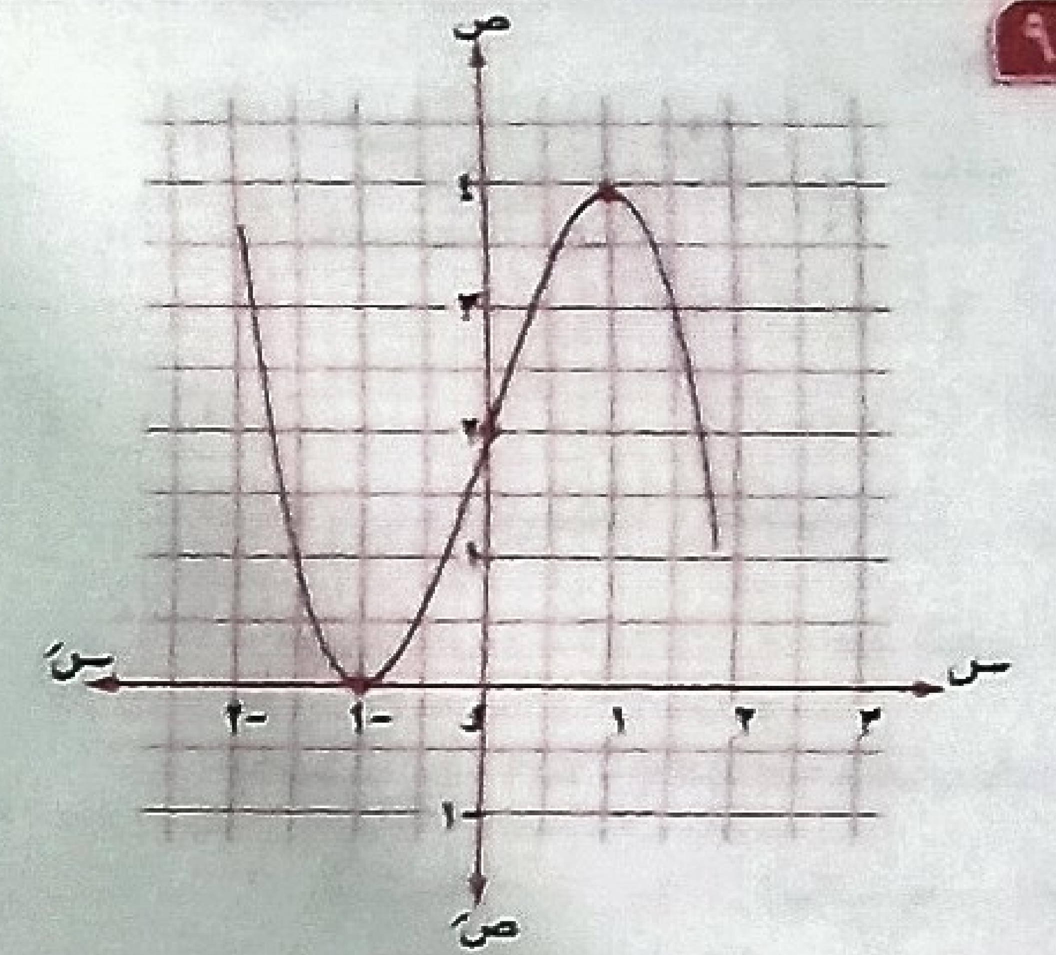
لأن دً (١$^{-}$) سالبة ، دً (١$^{+}$) موجبة

، دً (١) موجودة

٧ (١) (د) (٢) (د) (٣) (د)

٨ (١) (ب) (٢) (ب) (٣) (د) (٤) (د)

٩



١٠

(١) (أ) (٢) (د) (٣) (د) (٤) (جـ)

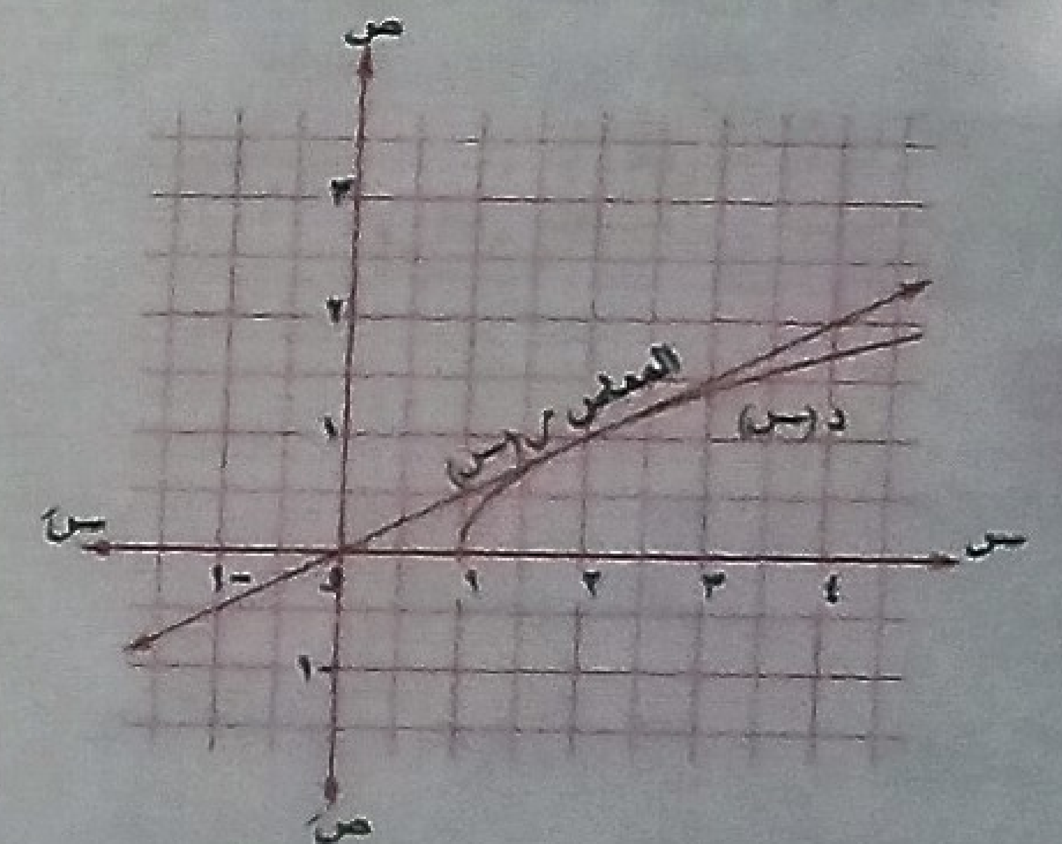
(٥) (جـ) (٦) (ب) (٧) (د)

١١

(١) (جـ) (٢) (جـ) (٣) (د) (٤) (د)

إرشادات لحل رقم ١١

(١) من الرسم نجد أن المماس دائما مرسوم أعلى منحنى الدالة ص = د (س) أى أن : ر (س) ≥ د (س)



(٢) ∵ دَ (س) = ٣ س^{2} + ٤ أ س + ب ∴ دالة من الدرجة الثانية الأحداثى السينى لنقطة رأس المنحنى هى $\frac{-4أ}{2 \times 3} = \frac{-2أ}{3}$

ومن الرسم نجد أن الأحداثى السينى لرأس المنحنى يساوى ٢

∴ $\frac{-2أ}{3}$ = ٢ ∴ أ = -٣

، ∵ دَ (٢) = -١

∴ ١٢ - ٢٤ + ب = -١ ∴ ب = ١١

∴ د (س) = س^{3} - ٦ س^{2} + ١١ س + ١

∴ د (١) = ٧

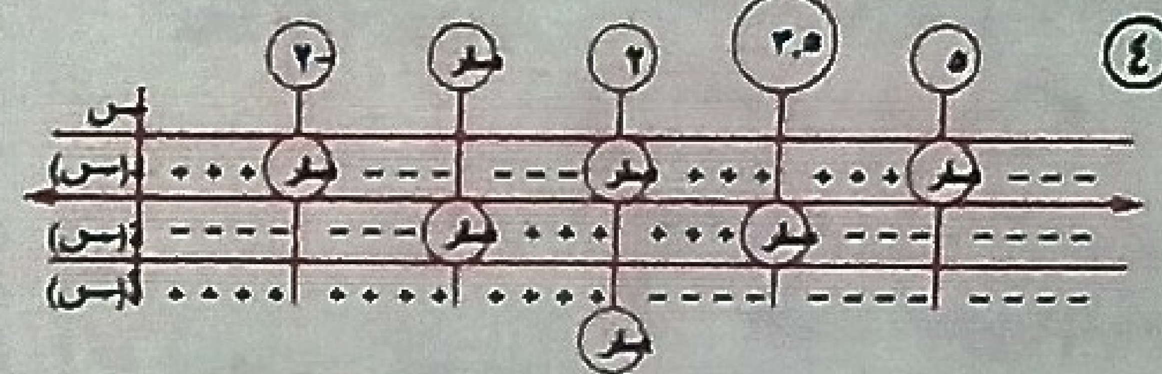
(٣) ∵ دَ (س) = ميل المماس = ١

، ∵ د (س) > دَ (س)

∴ د (س) > ١ وذلك يتحقق لكل س > ٢

أى : س ∈]٢ ، ∞[

(٤)



لاحظ أن د (س) ، دَ (س) ، دً (س) لهم نفس الاشارة لكل س ∈]٥ ، ∞[

إجابات تمارين 14

١

نفرض أن أحد العددين هو س

∴ العدد الآخر هو ٣٠ - س

نفرض أن حاصل ضربهما ص = س (٣٠ - س)

= ٣٠ س - س^{2}

صَ = ٣٠ - ٢ س

نفرض أن صَ = ٠ ∴ س = ١٥

صً = -٢ لجميع قيم س

∴ ص عند س = ١٥ لها قيمة عظمى

العددان هما ١٥ ، ٣٠ - ١٥ = ١٥

٢

نفرض أن العددين هما س ، ١٦ - س

∴ مجموع مربعيهما ص = س^{2} + (١٦ - س)^{2}

= ٢ س^{2} - ٣٢ س + ٢٥٦

∴ صَ = ٤ س - ٣٢ ∴ صً = ٤

بوضع صَ = ٠ ∴ س = ٨

(صً)$_{س = 8}$ = ٤ (موجبة)

∴ عند س = ٨ لها قيمة صغرى

∴ العددان هما ٨ ، ٨

٣

نفرض أن العددين هما س ، $\frac{36}{س}$

∴ مجموعهم ص = س + $\frac{36}{س}$ = س + ٣٦ س$^{-1}$

∴ صَ = ١ - ٣٦ س$^{-2}$ ∴ صً = ٧٢ س$^{-3}$

∴ صَ = ٠ عندما ١ - ٣٦ س$^{-2}$ = ٠

∴ س^{2} = ٣٦ ∴ س = ± ٦

عند س = ٦ ∴ صً > ٠ قيمة صغرى

عند س = -٦ ∴ صً < ٠ قيمة عظمى

∴ أصغر ما يمكن عند س = ٦

∴ العددان ٦ ، ٦

٤

نفرض أن العددين هما س ، ٥ - س

حيث س < ٥ - س

∴ س < $\frac{5}{2}$ ∴ ص = س^{3} + ٢ (٥ - س)^{2}

∴ صَ = ٣ س^{2} + ٤ (٥ - س) (-١)

= ٣ س^{2} + ٤ س - ٢٠

∴ صً = ٦ س + ٤

بوضع صَ = صفر ∴ ٣ س^{2} + ٤ س - ٢٠ = ٠

س = ٢ أو $\frac{-10}{3}$ (مرفوض)

(صً)$_{س = 2}$ = ٦ × ٢ + ٤ = ١٦ (موجبة)

∴ ص لها قيمة صغرى عند س = ٢

∴ العددان هما ٢ ، ٣

٥

نفرض أن الأعداد الثلاثة هى س ، ب ، حـ

∴ أكبرها حـ = ٢ س

∴ س + ب + ٢ س = ٣٦

∴ ب = ٣٦ - ٣ س

حاصل ضربهم :

ص = س × ب × حـ = س × (٣٦ - ٣ س) × ٢ س

= ٧٢ س^{2} - ٦ س^{3}

صَ = ١٤٤ س - ١٨ س^{2} = ١٨ س (٨ - س)

صً = ١٤٤ - ٣٦ س

بوضع صَ = ٠

∴ ١٨ س (٨ - س) = ٠

∴ س = ٠ (مرفوض) أ، س = ٨

(صً)$_{س = 8}$ = -١٤٤

∴ ص لها قيمة صغرى عند س = ٨

الأعداد هى ٨ ، ١٢ ، ١٦

٦

نفرض أن الأعداد : س ، ٣ س ، ع

مجموعها س + ٣ س + ع = ٣٦

∴ ع = ٣٦ - ٤ س

مجموع مربعاتها :

ص = س^{2} + (٣ س)^{2} + (٣٦ - ٤ س)^{2}



عند س = ٦ حاصل الضرب أكبر ما يمكن

∴ ص = ٢ الزوج المرتب هو (٦ ، ٢)

١٦

بفرض أن النقط على الصورة (س ، ص)

∴ المسافة ف

∴ ف = $\sqrt{(س - ٠)^٢ + (ص - ٢)^٢}$

= $\sqrt{س^٢ + ص^٢ - ٤ ص + ٤}$

∵ س^٢ = ص^٢ + ٨

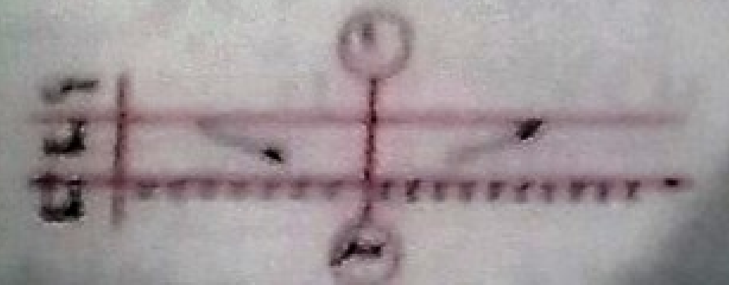
∴ ف = $\sqrt{ص^٢ + ٨ + ص^٢ - ٤ ص + ٤}$

= $\sqrt{٢ ص^٢ - ٤ ص + ١٢}$

∴ $\frac{ء ف}{ء ص} = \frac{٤ ص - ٤}{٢ \sqrt{٢ ص^٢ - ٤ ص + ١٢}}$

= $\frac{٢ ص - ٢}{\sqrt{٢ ص^٢ - ٤ ص + ١٢}}$

∴ $\frac{ء ف}{ء ص} = ٠$ عندما ص = ١



∴ عند ص = ١ هناك قيمة صغرى محلية

∵ س^٢ = ٨ + ١ = ٩ ∴ س = ± ٣

∴ النقط هي (٣ ، ١) ، (-٣ ، ١)

١٧

بفرض أن النقطة (س ، ص) تقع على المنحنى

ص = $\frac{١}{٤}$ س^٢ - ٤

∴ النقطة هي (س ، $\frac{١}{٤}$ س^٢ - ٤)

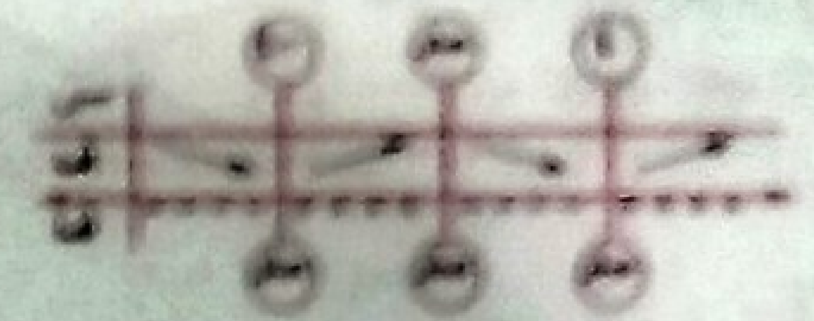
البعد بين النقطتين

ف = $\sqrt{(س - ٠)^٢ + (\frac{١}{٤} س^٢ - ٤ - ٥)^٢}$

= $\sqrt{\frac{١}{١٦} س^٤ - ٨ س^٢ + ٨١}$

∴ ف' = $\frac{س^٣ - ١٦ س}{٢ \sqrt{\frac{١}{١٦} س^٤ - ٨ س^٢ + ٨١}}$

بوضع ف' = ٠ ∴ س = ٠ أو س = ± ٤



ف أقل ما يمكن عند س = -٤ ، ٤

∴ أقرب نقط هي : (-٤ ، ٠) أو (٤ ، ٠)

١٨

بفرض أن (س ، ص) هي نقطة على المنحنى

ص^٢ = ٤ س ∴ س = $\frac{١}{٤}$ ص^٢

∴ النقطة ($\frac{١}{٤}$ ص^٢ ، ص)

البعد بين النقطة والمستقيم

ف = $\frac{|س - ٢ ص + ١٠|}{\sqrt{١^٢ + (-٢)^٢}} = \frac{|\frac{١}{٤} ص^٢ - ٢ ص + ١٠|}{\sqrt{٥}}$

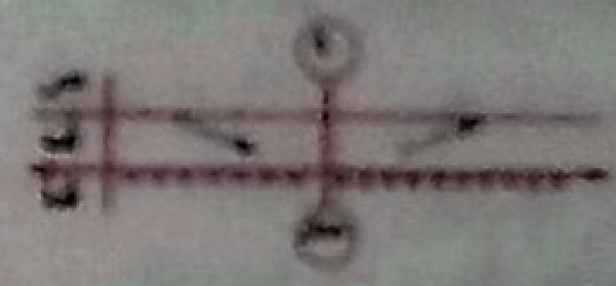
ف = $\frac{١}{\sqrt{٥}} |\frac{١}{٤} ص^٢ - ٢ ص + ١٠|$

∵ $\frac{١}{٤}$ ص^٢ - ٢ ص + ١٠ موجبة لجميع قيم ص

∴ ف = $\frac{١}{\sqrt{٥}} (\frac{١}{٤} ص^٢ - ٢ ص + ١٠)$

∴ ف' = $\frac{١}{\sqrt{٥}} (\frac{١}{٢} ص - ٢)$

بوضع ف' = ٠ ∴ ص = ٤



البعد أقل ما يمكن عند ص = ٤

أصغر بعد هو (ف)$_{ص = ٤}$ = $\frac{٦ \sqrt{٥}}{٥}$ وحدة طول

١٩

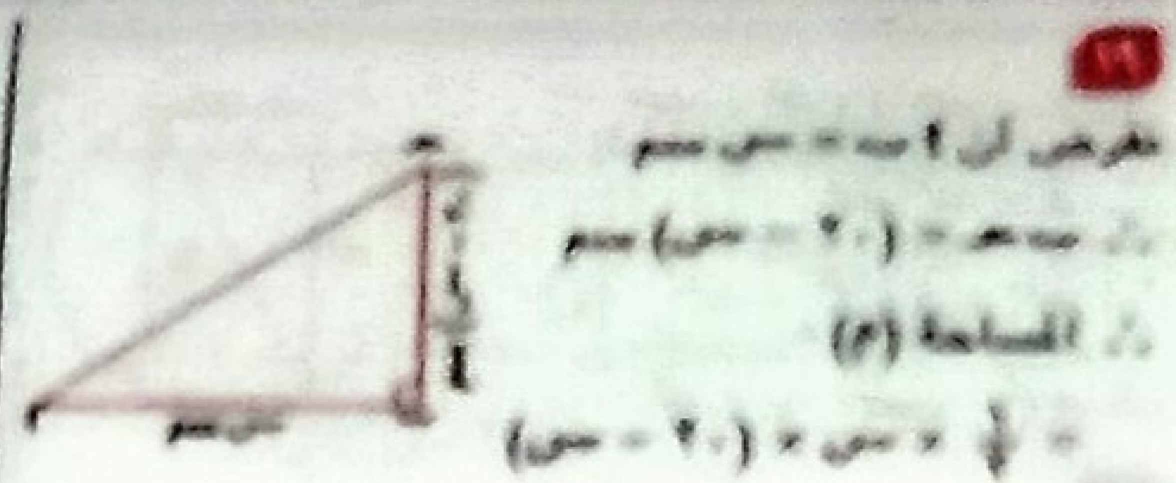
بفرض أن أ ب = س سم

∴ ب حـ = (٢٠ - س) سم

∴ المساحة (م)

= $\frac{١}{٢}$ × س × (٢٠ - س)

∴ م = ١٠ س - $\frac{١}{٢}$ س^٢



∴ $\frac{ء م}{ء س}$ = ١٠ - س بوضع $\frac{ء م}{ء س}$ = ٠

∴ ١٠ - س = ٠ ∴ س = ١٠

∵ $\frac{ء^٢ م}{ء س^٢}$ = -١ < ٠

∴ س = ١٠ تجعل المساحة قيمة عظمى

∴ م = ١٠ × ١٠ - $\frac{١}{٢}$ × ١٠٠ = ٥٠ سم^٢

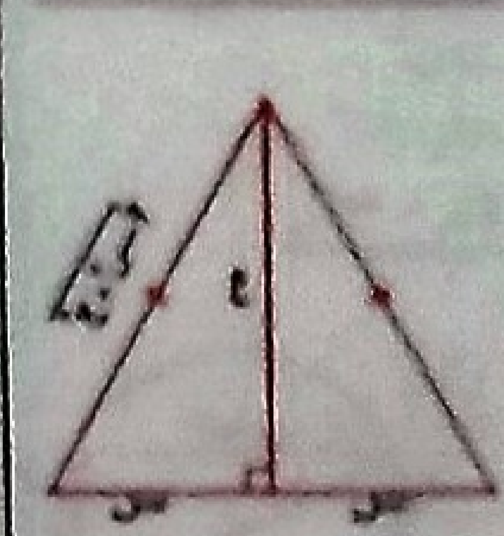
∴ أكبر مساحة ممكنة للمثلث أ ب حـ = ٥٠ سم^٢

٢٠

بفرض أن طول قاعدة

المثلث = ٢ س سم

وارتفاعه = ع سم



∵ المحيط = ٣٠ سم

∴ ٢ س + ٢ $\sqrt{س^٢ + ع^٢}$ = ٣٠

∴ $\sqrt{س^٢ + ع^٢}$ = ١٥ - س

∴ س^٢ + ع^٢ = ٢٢٥ - ٣٠ س + س^٢

∴ ع = $\sqrt{٢٢٥ - ٣٠ س}$

∵ مساحة المثلث م = $\frac{١}{٢}$ × ٢ س × ع

= س ع = س $\sqrt{٢٢٥ - ٣٠ س}$

= (٢٢٥ س^٢ - ٣٠ س^٣)$^{\frac{١}{٢}}$

∴ $\frac{ء م}{ء س}$ = $\frac{١}{٢}$ (٢٢٥ س^٢ - ٣٠ س^٣)$^{-\frac{١}{٢}}$

× (٤٥٠ س - ٩٠ س^٢)

عند القيم العظمى أو الصغرى المحلية

نضع $\frac{ء م}{ء س}$ = صفر

∴ ٤٥٠ س - ٩٠ س^٢ = ٠

∴ س = ٠ (مرفوض) أ، س = ٥

∵ $\frac{ء م}{ء س}$ > ٠ عندما س < ٥

، $\frac{ء م}{ء س}$ < ٠ عندما س > ٥

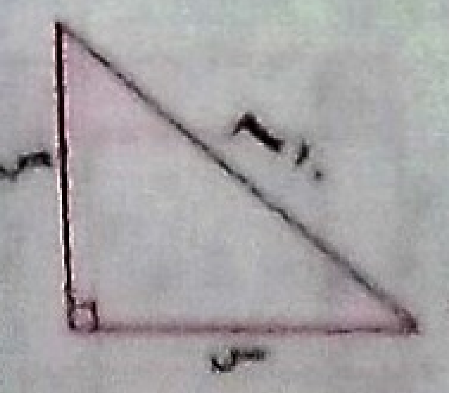
∴ توجد قيمة عظمى عند س = ٥

∴ طول قاعدة المثلث = ١٠ سم

وطول كل من الضلعين الآخرين = ١٠ سم

∴ مساحة المثلث تكون أكبر ما يمكن عندما يكون المثلث متساوي الأضلاع وطول ضلعه = ١٠ سم

٢١



س^٢ + ص^٢ = ١٠٠

ص = $\sqrt{١٠٠ - س^٢}$

مساحة المثلث م = $\frac{١}{٢}$ س × ص

م = $\frac{١}{٢}$ س $\sqrt{١٠٠ - س^٢}$

م' = $\frac{١}{٢}$ س × $\frac{-س}{\sqrt{١٠٠ - س^٢}}$ + $\frac{١}{٢}$ $\sqrt{١٠٠ - س^٢}$

= $\frac{-س^٢ + ١٠٠ - س^٢}{٢ \sqrt{١٠٠ - س^٢}} = \frac{١٠٠ - ٢ س^٢}{٢ \sqrt{١٠٠ - س^٢}}$

م' = ٠ ∴ س = ٥ $\sqrt{٢}$

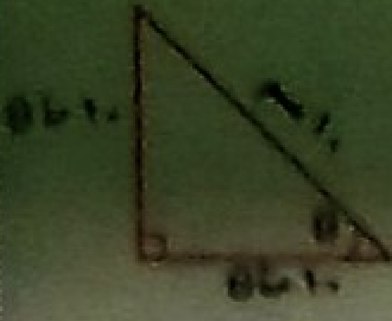


عند س = ٥ $\sqrt{٢}$ تجعل م قيمة عظمى

طولا ضلع القائمة هي ٥ $\sqrt{٢}$ سم ، ٥ $\sqrt{٢}$ سم

حل آخر :

مساحة المثلث (م)



= $\frac{١}{٢}$ × ١٠ جا θ × ١٠ جتا θ

= ٥٠ جا θ جتا θ

= ٢٥ جا ٢ θ

$\because \; \text{م}' = 50 \; \text{جتا} \; 2\theta$ وبوضع $\text{م}' = $ صفر

$\therefore \; \text{جتا} \; 2\theta = $ صفر $\quad \therefore \; 2\theta = 90^\circ \quad \therefore \; \theta = 45^\circ$

، $\because \; \text{م}'' = -100 \; \text{جا} \; 2\theta \quad \therefore \; (\text{م}'') <$ صفر

$\therefore$ المساحة تكون أكبر ما يمكن عندما $\theta = 45^\circ$

$\therefore$ طولي ضلعي القائمة هما $10 \; \text{جا} \; 45^\circ \; ، \; 10 \; \text{جتا} \; 45^\circ$

أي : $5\sqrt{2}$ سم ، $5\sqrt{2}$ سم

١١

$\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 5 \quad \therefore \; \text{ص} = \sqrt{5 - \text{س}^2}$

، $0 < \text{س} < \sqrt{5} \quad \therefore \; \text{م} = 2\,\text{س} + \sqrt{5 - \text{س}^2}$

$$\text{م}' = 2 + \frac{-\text{س}}{\sqrt{5 - \text{س}^2}} = \frac{2\sqrt{5 - \text{س}^2} - \text{س}}{\sqrt{5 - \text{س}^2}}$$

وبوضع $\text{م}' = 0 \quad \therefore \; 2\sqrt{5 - \text{س}^2} = \text{س}$

$\therefore \; 4(5 - \text{س}^2) = \text{س}^2 \quad \therefore \; 5\,\text{س}^2 = 20$

ومنها $\text{س} = \pm 2$

$\text{س} = 2 \quad ، \quad \text{س} = -2$ مرفوض

$\therefore \; \text{م} = 5$ وهي أكبر قيمة ممكنة.

١٣

$\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 900$

$\text{ص} = \sqrt{900 - \text{س}^2}$

$$\text{ع} = \frac{\text{س} \times \text{ص}}{30}$$

$$= \frac{1}{30}\,\text{س}\sqrt{900 - \text{س}^2}$$

$$\text{ع}' = \frac{1}{30}\,\text{س} \times \frac{-2\,\text{س}}{2\sqrt{900 - \text{س}^2}} + \frac{1}{30}\sqrt{900 - \text{س}^2}$$

$$= \frac{1}{30}\left(\frac{-\text{س}^2 + 900 - \text{س}^2}{\sqrt{900 - \text{س}^2}}\right) = \frac{900 - 2\,\text{س}^2}{30\sqrt{900 - \text{س}^2}}$$

وبوضع $\text{ع}' = 0 \quad \therefore \; \text{س} = 15\sqrt{2}$ سم

$\text{س} = 15\sqrt{2}$

نجعل ع أكبر ما يمكن

طولي ضلعيه $15\sqrt{2}$ ، $15\sqrt{2}$ سم

١٤

نفرض أن بعدي المستطيل س ، ص

مساحته = ١٦ سم² $\quad \therefore \; \text{س}\,\text{ص} = 16$

$\therefore \; \text{ص} = \frac{16}{\text{س}}$

طول القطر $\text{ع} = \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2} = \sqrt{\text{س}^2 + \left(\frac{16}{\text{س}}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{\text{س}^4 + 256}{\text{س}^2}}$$

$$\text{ع} = \frac{\sqrt{\text{س}^4 + 256}}{\text{س}}$$

$$\text{ع}' = \frac{\text{س} \times \frac{4\,\text{س}^3}{2\sqrt{\text{س}^4 + 256}} - \sqrt{\text{س}^4 + 256} \times 1}{\text{س}^2}$$

$$= \frac{2\,\text{س}^4 - \text{س}^4 - 256}{\text{س}^2\sqrt{\text{س}^4 + 256}} = \frac{\text{س}^4 - 256}{\text{س}^2\sqrt{\text{س}^4 + 256}}$$

وبوضع $\text{ع}' = 0 \quad \therefore \; \text{س}^4 - 256 = 0$

$\text{س} = \pm 4 \quad \therefore \; \text{س} = 4$

ع أصغر ما يمكن عند $\text{س} = 4$

البعدان هما ٤ ، ٤

حل آخر :

نفرض أن طول القطر = ل

$\therefore$ المساحة $\text{م} = \frac{1}{2}\,\text{ل}^2 \; \text{جا} \; \theta$

$\therefore \; 16 = \frac{1}{2}\,\text{ل}^2 \; \text{جا} \; \theta$

$\therefore \; \text{ل}^2 = \frac{32}{\text{جا} \; \theta} = 32 \; \text{قتا} \; \theta$

وبوضع $\text{ل}^2 = \text{ك} \quad \therefore \; \text{ك} = 32 \; \text{قتا} \; \theta$

$\therefore \; \text{ك}' = 32 \; \text{قتا} \; \theta \; \text{ظتا} \; \theta$

وبوضع $\text{ك}' = $ صفر $\quad \therefore \; \text{قتا} \; \theta \; \text{ظتا} \; \theta = 0$

$\therefore \; \text{قتا} \; \theta = 0$ (مرفوض) أو $\text{ظتا} \; \theta = 0$ ، ومنها $\theta = 90^\circ$

، $\because \; \text{ك}'' = 32 \left[\text{قتا}^3 \, \theta + \text{قتا} \; \theta \; \text{ظتا}^2 \, \theta\right]$

$\therefore \; \left[\text{ك}''\right]_{\theta = 90^\circ} >$ صفر

أي أن عند $\theta = 90^\circ$ يكون طول القطر قيمة صغرى

ويكون الشكل مربع ، $\text{ل}^2 = 32 \; \text{قتا} \; 90^\circ = 32$

أي أن : $\text{ل} = 4\sqrt{2}$

$\therefore$ أبعاد المستطيل هما ٤ سم ، ٤ سم

١٥

$\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 64$

$\text{ص} = \sqrt{64 - \text{س}^2}$

المساحة $\text{م} = \text{س}\,\text{ص}$

$\text{م} = \text{س}\sqrt{64 - \text{س}^2}$

$$\text{م}' = \text{س} \times \frac{-2\,\text{س}}{2\sqrt{64 - \text{س}^2}} + \sqrt{64 - \text{س}^2}$$

$$= \frac{64 - 2\,\text{س}^2}{\sqrt{64 - \text{س}^2}}$$

وبوضع $\text{م}' = 0 \quad \therefore \; \text{س} = 4\sqrt{2}$

أكبر ما يمكن

$\therefore \; \text{س} = 4\sqrt{2} \; ، \; \text{ص} = 4\sqrt{2}$

أكبر مساحة $= 4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 32$ سم²

١٦

$\because \; \text{س}^2 + \text{ص}^2 = 4\,\text{نق}^2$

$\therefore \; \text{ص} = \sqrt{4\,\text{نق}^2 - \text{س}^2} \quad (1)$

$\because \; \text{م} = \text{س}\,\text{ص}$

$\therefore \; \text{م} = \text{س}\sqrt{4\,\text{نق}^2 - \text{س}^2}$

$$\text{م}' = \text{س} \times \frac{-2\,\text{س}}{2\sqrt{4\,\text{نق}^2 - \text{س}^2}} + \sqrt{4\,\text{نق}^2 - \text{س}^2}$$

$$= \frac{4\,\text{نق}^2 - 2\,\text{س}^2}{\sqrt{4\,\text{نق}^2 - \text{س}^2}}$$

$\because \; \text{م}' = 0$ عند $\text{س} = \sqrt{2}\,\text{نق}$

، $\because \; \text{م}'' < 0$ عند $\text{س} = \sqrt{2}\,\text{نق}$

توجد قيمة عظمى

وبالتعويض من (١) $\text{ص} = \sqrt{2}\,\text{نق}$

$\text{س} = \text{ص} = \sqrt{2}\,\text{نق}$

$\therefore$ الشكل مربع مساحته $= \sqrt{2}\,\text{نق} \times \sqrt{2}\,\text{نق}$

$= 2\,\text{نق}^2$ وحدة مربعة

١٧

نفرض أن طول ضلع المربع س حيث $\text{س} \in \,]0 \; ، \; 10[$

$\therefore$ طول قاعدة الصندوق $= 20 - 2\,\text{س}$

ارتفاع الصندوق = س

$\therefore$ حجم الصندوق (ح)

$= (20 - 2\,\text{س})^2 \times \text{س}$

$= \text{س}\,(20 - 2\,\text{س})^2$

$= 4\,\text{س}\,(10 - \text{س})^2 = 400\,\text{س} - 80\,\text{س}^2 + 4\,\text{س}^3$

$\text{ح}' = 400 - 160\,\text{س} + 12\,\text{س}^2$

$\text{ح}' = 0$ فإن $\text{س} = 10$ مرفوض ، $\text{س} = \frac{10}{3}$

$\text{ح}'' = -160 + 24\,\text{س}$

$(\text{ح}'')_{\text{س} = \frac{10}{3}} = -80$

$\therefore$ طول ضلع المربع في الجزء المقطوع $= \frac{10}{3}$ سم

١٨

أبعاد متوازي المستطيلات

$24 - 2\,\text{س}$

، $15 - 2\,\text{س}$ ، س

، $0 < \text{س} < \frac{15}{2}$

حجم العلبة (ح)

$= (٢٤ - ٢س) \times (١٥ - ٢س)(س)$

$= ٢س(١٢ - س)(١٥ - ٢س)$

$= ٣٦٠س - ٧٨س^{٢} + ٤س^{٣}$

$ح' = ٣٦٠ - ١٥٦س + ١٢س^{٢}$

بوضع $ح' = ٠$ ∴ $س = ١٠$ (مرفوض) ، $س = ٣$

$ح'' = -١٥٦ + ٢٤س$

$ح''_{س=٣} < ٠$ (عظمى)

أبعاد العلبة هي ١٨ ، ٩ ، ٣ سم

29

نفرض أن طول ضلع القاعدة = س ، وارتفاعه = ع

∴ $٨س + ٤ع = ٢٤٠$

∴ $٢س + ع = ٦٠$

∴ $ع = ٦٠ - ٢س$ (١)

، ∴ $ح = س^{٢}ع$

ومن (١) : ∴ $ح = ٦٠س^{٢} - ٢س^{٣}$

∴ $ح' = ١٢٠س - ٦س^{٢}$ وعند $ح' = ٠$

∴ $س = ٠$ (مرفوض) أ، $س = ٢٠$

، ∵ $ح'' = ١٢٠ - ١٢س$ ، عند $س = ٢٠$

فإن: $ح'' = -١٢٠ < ٠$ ∴ توجد نهاية عظمى

∴ عند س = ٢٠ سم يكون الحجم أكبر ما يمكن

ومن (١) : ∴ ع = ٢٠ سم

∴ أبعاد متوازي المستطيلات ذو أكبر حجم هي

٢٠ ، ٢٠ ، ٢٠ سم

30

نفرض أن بعدى القاعدة = س ، ٢س والارتفاع ع

∴ $س + ٢س + ع = ١٨٠$

∴ $ع = ١٨٠ - ٣س$

حجم متوازي المستطيلات (ح)

$= س \times ٢س \times ع = ٢س^{٢}(١٨٠ - ٣س)$

$= ٣٦٠س^{٢} - ٦س^{٣}$

$ح' = ٧٢٠س - ١٨س^{٢}$

$ح' = ٠$ ∴ $س = ٠$ (مرفوض) أو $س = ٤٠$

$ح'' = ٧٢٠ - ٣٦س$

$(ح'')_{س=٤٠} < ٠$ أكبر ما يمكن

الأبعاد هي : ٤٠ سم ، ٨٠ سم ، ٦٠ سم

31

نفرض أن طول ضلع القاعدة المربعة = س سم

وارتفاع الصندوق = ع سم

، ∵ المساحة الكلية $= ٢س^{٢} + ٤سع$

∴ $٢س^{٢} + ٤سع = ٣٨٤$

∴ $ع = \frac{٣٨٤ - ٢س^{٢}}{٤س} = \frac{١٩٢ - س^{٢}}{٢س}$

∴ حجم الصندوق (ح) $= س^{٢}ع$

$= \frac{س^{٢}(١٩٢ - س^{٢})}{٢س}$

$= ٩٦س - \frac{١}{٢}س^{٣}$

∴ $\frac{دح}{دس} = ٩٦ - \frac{٣}{٢}س^{٢}$

، ∵ $\frac{دح}{دس} = ٠$ ∴ $\frac{٣}{٢}س^{٢} = ٩٦$

∴ $س^{٢} = ٦٤$ ∴ $س = ٨$

، ∵ $\frac{د^{٢}ح}{دس^{٢}} = -٣س$

∴ عندما س = ٨ فإن: $\frac{د^{٢}ح}{دس^{٢}} <$ صفر

∴ الحجم أكبر ما يمكن

أكبر حجم (ح) $= ٩٦س - \frac{١}{٢}س^{٣}$

$= ٩٦ \times ٨ - \frac{١}{٢} \times (٨)^{٣} = ٥١٢$ سم^{٣}

نفرض أن طولي ضلعي قاعدة متوازي المستطيلات هما

٢س ، س وارتفاعه = ص

∴ حجم متوازي المستطيلات $= س \times ٢س \times ص$

$= ٢س^{٢}ص$

∴ $٢س^{٢}ص = ٥٧٦$

∴ $ص = \frac{٢٨٨}{س^{٢}}$

، ∵ المساحة الكلية (م)

$= ٦سص + ٤س^{٢}$

∴ $م = ٦س \times \frac{٢٨٨}{س^{٢}} + ٤س^{٢}$

$= ١٧٢٨س^{-١} + ٤س^{٢}$

∴ $\frac{دم}{دس} = -١٧٢٨س^{-٢} + ٨س$

، بوضع $\frac{دم}{دس} = ٠$ ∴ $\frac{١٧٢٨}{س^{٢}} = ٨س$

∴ $س^{٣} = ٢١٦$ ∴ س = ٦ سم

، ∵ $\frac{د^{٢}م}{دس^{٢}} = \frac{٣٤٥٦}{س^{٣}} + ٨$

، عند $س = ٦$ ∴ $\frac{د^{٢}م}{دس^{٢}} >$ صفر

∴ المساحة أقل ما يمكن

∴ الأبعاد هي ٦ سم ، ١٢ سم ، ٨ سم

33

نفرض أن طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة = نق سم

، ارتفاع الأسطوانة = ع سم

، حجم الأسطوانة = ح سم^{٣}

، ∵ $نق + ع = ٣٠$ ∴ $ع = ٣٠ - نق$

، ∵ $ح = ط نق^{٢} ع = ط نق^{٢}(٣٠ - نق)$

$= ٣٠ط نق^{٢} - ط نق^{٣}$ (١)

∴ $\frac{دح}{دنق} = ٦٠ط نق - ٣ط نق^{٢}$

، $\frac{د^{٢}ح}{دنق^{٢}} = ٦٠ط - ٦ط نق$

القيم العظمى أو الصغرى تكون عند $\frac{دح}{دنق} = ٠$

∴ $٦٠ط نق - ٣ط نق^{٢} = ٠$

∴ نق = ٢٠ سم

$\left(\frac{د^{٢}ح}{دنق^{٢}}\right)_{نق=٢٠} = ٦٠ط - ١٢٠ط = -٦٠ط <$ صفر

وعندما يكون الحجم أكبر ما يمكن وبالتعويض في (١)

∴ $ح = ١٢٠٠٠ط - ٨٠٠٠ط = ٤٠٠٠ط$ سم^{٣}

34

نفرض أن طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة = نق

ارتفاع الأسطوانة ع سم

∴ حجم الأسطوانة $ح = \pi نق^{٢} ع$

∴ مساحة الأسطوانة الكلية $= ٢\pi نق(ع + نق)$

$= ١٥٠\pi$

∴ $ع = \frac{٧٥ - نق^{٢}}{نق}$

∴ $ح = \pi نق^{٢} \times \frac{٧٥ - نق^{٢}}{نق} = ٧٥\pi نق - \pi نق^{٣}$

$ح' = ٧٥\pi - ٣\pi نق^{٢}$

$ح' = ٠$ ∴ نق = ٥ سم

$ح'' = -٦\pi نق$

$(ح'')_{نق=٥} < ٠$ (عظمى)

∴ أكبر حجم $= ح_{نق=٥} = ٧٥\pi(٥) - \pi(٥)^{٣}$

$= ٢٥٠\pi$ سم^{٣}

35

نفرض أن طول نصف قطر قاعدته = نق

وارتفاعه = ع

ح (سعته) $= \pi نق^{٢} ع = ٨٠٠٠\pi$

∴ $ع = \frac{٨٠٠٠}{نق^{٢}}$

مساحة السطحية $م = \pi نق^{٢} + ٢\pi نق ع$

$= \pi نق^{٢} + ٢\pi نق \times \frac{٨٠٠٠}{نق^{٢}}$

$= \pi نق^{٢} + ١٦٠٠٠\pi نق^{-١}$

$\therefore \text{م}' = ٢\pi\,\text{نق} - ١٦٠٠٠\,\pi\,\text{نق}^{-٢}$

، $\text{م}'' = ٢\pi + ٣٢٠٠٠\,\pi\,\text{نق}^{-٣}$

$\text{م}' = ٠$ عندما $٢\pi\,\text{نق} - ١٦٠٠٠\,\pi\,\text{نق}^{-٢} = ٠$

$\therefore \text{نق} - \frac{٨٠٠٠}{\text{نق}^{٢}} = ٠ \qquad \therefore \text{نق}^{٣} = ٨٠٠٠$

$\therefore \text{نق} = ٢٠$

، $\because \text{م}'' = ٦\pi > ٠$ أقل ما يمكن

$\therefore$ الأبعاد : نق = ٢٠ سم ، ع = ٢٠ سم

٣٦

الحجم $\text{ك} = \pi\,\text{نق}^{٢}\,\text{ع} \qquad \therefore \text{ع} = \frac{\text{ك}}{\pi\,\text{نق}^{٢}}$

المادة التي تصنع منها العلبة = المساحة الكلية للأسطوانة × السُمك

$\text{م} = ٢\pi\,\text{نق}\,(\text{ع} + \text{نق}) \times \text{هـ}$

$= ٢\pi\,\text{نق} \times \left(\frac{\text{ك}}{\pi\,\text{نق}^{٢}} + \text{نق}\right) \times \text{هـ}$

$= ٢\,\text{هـ}\,(\text{ك}\,\text{نق}^{-١} + \pi\,\text{نق}^{٢})$

$\text{م}' = ٢\,\text{هـ}\,(٢\pi\,\text{نق} - \text{ك}\,\text{نق}^{-٢})$

$\therefore \text{م}'' = ٢\,\text{هـ}\,(٢\pi + ٢\,\text{ك}\,\text{نق}^{-٣})$

$\text{م}' = ٠$ فإن : $\text{نق} = \sqrt[٣]{\frac{\text{ك}}{٢\pi}}$

عند $\text{نق} = \sqrt[٣]{\frac{\text{ك}}{٢\pi}}$ فإن : $\text{م}'' > ٠$ (قيمة صغرى)

$\therefore \frac{\text{ع}}{\text{نق}} = \frac{\text{ك}}{\pi \times \text{نق}^{٣}} = \frac{\text{ك}}{\pi \times \left(\frac{\text{ك}}{٢\pi}\right)} = \frac{٢}{١}$

٣٧

الربح = سعر البيع − سعر التكلفة

$\text{ر} = (١٠٠ - ٠{,}٠٢\,\text{س}) \times \text{س} - (٤٠\,\text{س} + ١٥٠٠٠)$

$= -٠{,}٠٢\,\text{س}^{٢} + ٦٠\,\text{س} - ١٥٠٠٠$

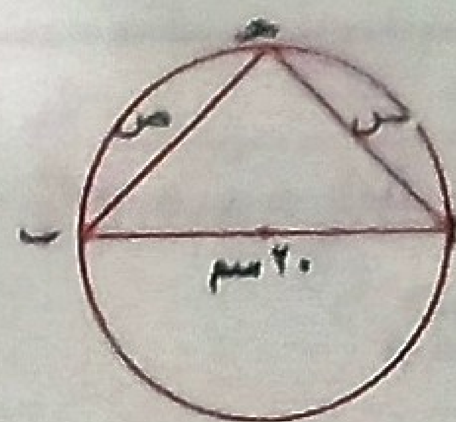
$\text{ر}' = -٠{,}٠٤\,\text{س} + ٦٠$

$\text{ر}' = ٠ \qquad \therefore \text{س} = ١٥٠٠$

$\text{ر}'' = -٠{,}٠٤ < ٠$ عظمى

$\therefore$ عدد الوحدات التي يجب إنتاجها = ١٥٠٠

٣٨



$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٤٠٠$

$\text{ص} = \sqrt{٤٠٠ - \text{س}^{٢}}$

مجموع العددين م = س + ص

$= \text{س} + \sqrt{٤٠٠ - \text{س}^{٢}}$

$\text{م}' = ١ + \frac{-٢\text{س}}{٢\sqrt{٤٠٠ - \text{س}^{٢}}} = ١ + \frac{-\text{س}}{\sqrt{٤٠٠ - \text{س}^{٢}}}$

$\text{م}' = ٠ \qquad \therefore \text{س} = \sqrt{٤٠٠ - \text{س}^{٢}}$

$\therefore \text{س}^{٢} = ٤٠٠ - \text{س}^{٢} \qquad \therefore \text{س}^{٢} = ٢٠٠$

$\therefore \text{س} = ١٠\sqrt{٢}$

$(\text{م}'')_{\text{س} = ١٠\sqrt{٢}} < ٠$ (أكبر ما يمكن)

$\therefore$ البعدين $\text{س} = ١٠\sqrt{٢}$ ، $\text{ص} = ١٠\sqrt{٢}$

٣٩

$\because \text{د}(\text{س}) = \frac{٦}{\text{س}^{٢} + ٣}$

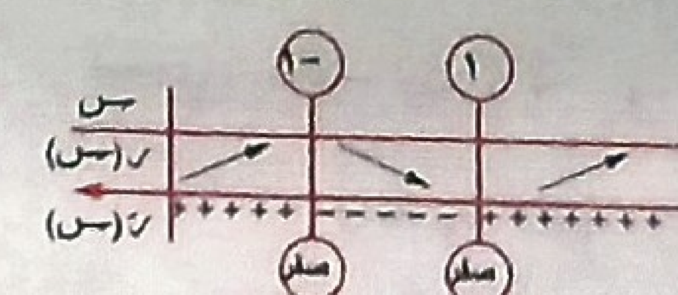
$\therefore$ ميل المماس $\text{ر}(\text{س}) = \frac{-١٢\text{س}}{(\text{س}^{٢} + ٣)^{٢}}$

$\therefore \text{ر}'(\text{س}) = \frac{-١٢(\text{س}^{٢}+٣)^{٢} + ١٢\text{س} \times ٤\text{س}(\text{س}^{٢}+٣)}{(\text{س}^{٢}+٣)^{٤}}$

$= \frac{٣٦(\text{س}^{٢} - ١)}{(\text{س}^{٢}+٣)^{٣}}$

ميل المماس ر(س) يكون أكبر ما يمكن أو أصغر ما يمكن عندما يكون ر'(س) = صفر

$\therefore \text{س}^{٢} - ١ = ٠ \qquad \therefore \text{س} = ١$ أ، $\text{س} = -١$



$\therefore$ توجد قيمة عظمى عند س = −١

وهي $\left(-١ ، \frac{٣}{٢}\right)$ ، توجد قيمة صغرى عند س = ١

وهي $\left(١ ، \frac{٣}{٢}\right)$

$\therefore$ ميل المماس يكون أكبر ما يمكن عند النقطة $\left(-١ ، \frac{٣}{٢}\right)$

، ميل المماس يكون أصغر ما يمكن عند النقطة (١ ، ٣

٤٠

بفرض أي مثلث وليكن س ص ع

$\therefore$ مساحة المثلث (م) $= \frac{١}{٢}\,\text{أ}\,\text{ب}\,\text{جا}\,\text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءم}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢}\,\text{أ}\,\text{ب}\,\text{جتا}\,\text{س}$ ويوضع $\frac{\text{ءم}}{\text{ءس}} = ٠$

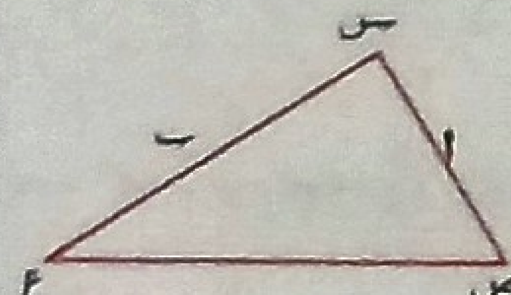
$\therefore \frac{١}{٢}\,\text{أ}\,\text{ب}\,\text{جتا}\,\text{س} = ٠ \qquad \therefore \text{جتا}\,\text{س} = ٠$

$\therefore \text{س} = ٩٠^{\circ}$

، $\because \frac{\text{ء}^{٢}\text{م}}{\text{ءس}^{٢}} = -\frac{١}{٢}\,\text{أ}\,\text{ب}\,\text{جا}\,\text{س}$

ويوضع $\text{س} = ٩٠^{\circ}$

$\therefore \frac{\text{ء}^{٢}\text{م}}{\text{ءس}^{٢}} = -\frac{١}{٢}\,\text{أ}\,\text{ب} < ٠$



أي أن عند س = ٩٠° فهناك قيمة عظمى للدالة أي أن مساحة المثلث أكبر ما يمكن عندما تكون الزاوية بين الضلعين اللذين طولاهما أ ، ب قائمة أي أن الضلع الثالث قطر في الدائرة المارة برؤوس المثلث.

٤١

نفرض أن $\text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{أس}^{٢} + \text{ب}}$

$\text{ص}' = \frac{(\text{أس}^{٢} + \text{ب})(١) - \text{س}(٢\text{أس})}{(\text{أس}^{٢} + \text{ب})^{٢}}$

$= \frac{\text{ب} - \text{أس}^{٢}}{(\text{أس}^{٢} + \text{ب})^{٢}}$

$\text{ص}' = ٠ \qquad \therefore \text{س} = \pm\sqrt{\frac{\text{ب}}{\text{أ}}}$

$\text{ص}'' = \frac{-٢\text{أس}(\text{أس}^{٢}+\text{ب})^{٢} - (\text{ب}-\text{أس}^{٢})\,٢(\text{أس}^{٢}+\text{ب})(٢\text{أس})}{(\text{أس}^{٢}+\text{ب})^{٤}}$

$= \frac{٢\text{أ}^{٢}\text{س}^{٣} - ٦\text{أب}\,\text{س}}{(\text{أس}^{٢}+\text{ب})^{٣}}$

، $\text{ص}''_{\text{س} = \sqrt{\frac{\text{ب}}{\text{أ}}}} < ٠$ (قيمة عظمى)

$\therefore (\text{ص})_{\text{س} = \sqrt{\frac{\text{ب}}{\text{أ}}}} = \frac{\sqrt{\frac{\text{ب}}{\text{أ}}}}{\text{أ}\left(\frac{\text{ب}}{\text{أ}}\right) + \text{ب}} = \frac{\sqrt{\frac{\text{ب}}{\text{أ}}}}{٢\text{ب}}$

$= \frac{١}{٢\sqrt{\text{أب}}}$

$\therefore \frac{\text{س}}{\text{أس}^{٢} + \text{ب}} \le \frac{١}{٢\sqrt{\text{أب}}}$ لجميع قيم أ ، ب الموجبة.

٤٢

ΔΔ ء هـ جـ ، ب جـ و متشابهان

$\therefore \frac{\text{س}}{٩} = \frac{٤}{\text{ص}}$

حيث س ، ص > ٠

$\therefore \text{ص} = \frac{٣٦}{\text{س}}$

مساحة المثلث أ و هـ (م) $= \frac{١}{٢}(٤ + \text{ص})(٩ + \text{س})$

$\therefore \text{م} = \frac{١}{٢}\left(٤ + \frac{٣٦}{\text{س}}\right)(٩ + \text{س})$

$= ٢\text{س} + ٣٦ + \frac{١٦٢}{\text{س}}$

$\therefore \text{م}' = ٢ + \frac{-١٦٢}{\text{س}^{٢}}$ بوضع م' = ٠

$\therefore \text{س}^{٢} = ٨١ \qquad \therefore \text{س} = ٩$ ، $\text{م}'' = ٣٢٤\,\text{س}^{-٣}$

$\text{م}''_{\text{عند س} = ٩} > ٠$ قيمة صغرى

$\therefore$ أصغر مساحة للمثلث $= \text{م}_{\text{عند س} = ٩}$

$= ٢ \times ٩ + ٣٦ + \frac{١٦٢}{٩}$

$= ٧٢$ سم^{٢}

٤٣

بفرض أن : ء ب = ص

، ب هـ = س

$\therefore$ أ ء = ٤ − ص

، هـ جـ = ٣ − س

، $\because$ ء و // ب جـ

$\therefore \frac{\text{س}}{٣} = \frac{٤ - \text{ص}}{٤}$

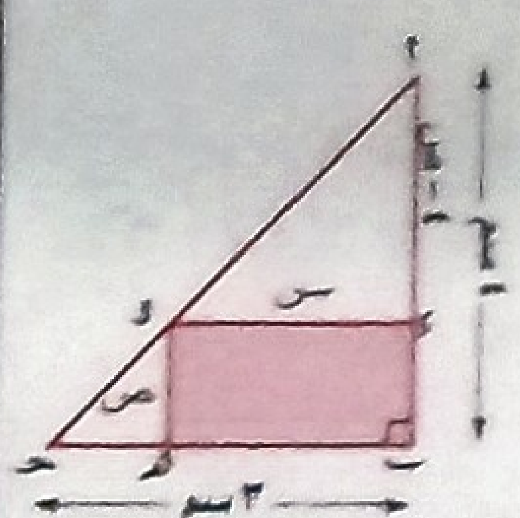
$\therefore \text{س} = \frac{١٢ - ٣\text{ص}}{٤} = ٣ - \frac{٣}{٤}\text{ص} \qquad (١)$

$\therefore$ مساحة المستطيل (م) $= \text{ص}\,\text{س} = \text{ص}\left(٣ - \frac{٣}{٤}\text{ص}\right)$

$\therefore \text{م} = ٣\text{ص} - \frac{٣}{٤}\text{ص}^{٢}$

$\therefore \frac{\text{ءم}}{\text{ءص}} = ٣ - \frac{٣}{٢}\text{ص}$ ، بوضع $\frac{\text{ءم}}{\text{ءص}} = ٠$

$\therefore \text{ص} = ٢$



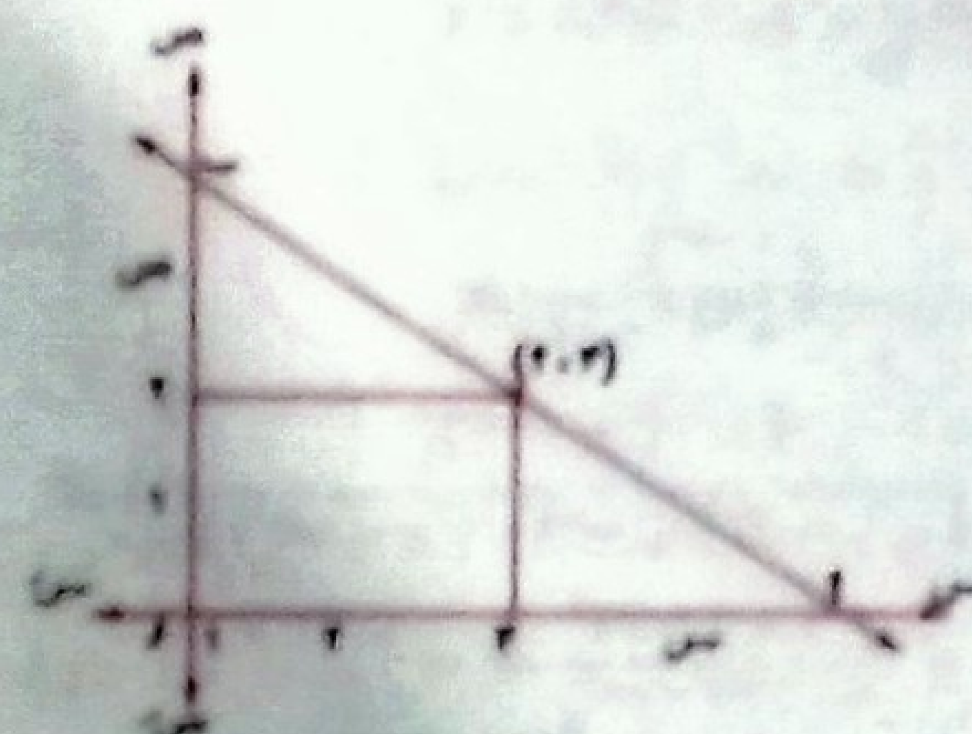
∴ عند ص = ٢ تكون
مساحة المستطيل أكبر
ما يمكن



ومن معادلة (١) ∴ س = ٣ − $\frac{3}{4}$ × ٢ = $\frac{3}{2}$

أي أن: أبعاد المستطيل هي ٢ سم ، $\frac{3}{2}$ سم

٤٤



من تشابه المثلثات : $\frac{\text{ص}}{3} = \frac{2}{\text{س}}$ ∴ ص = $\frac{6}{\text{س}}$

مساحة Δ أ و ب

م = $\frac{1}{2}$ (س + ٣) (ص + ٢)

= $\frac{1}{2}$ (س + ٣) $\left(\frac{6}{\text{س}} + 2\right)$ = ٦ + س + ٩ س^{-1}

∴ م' = ١ − ٩ س^{-2} ∴ م'' = ١٨ س^{-3}

بوضع م' = ٠ ١ − $\frac{9}{\text{س}^2}$ = ٠

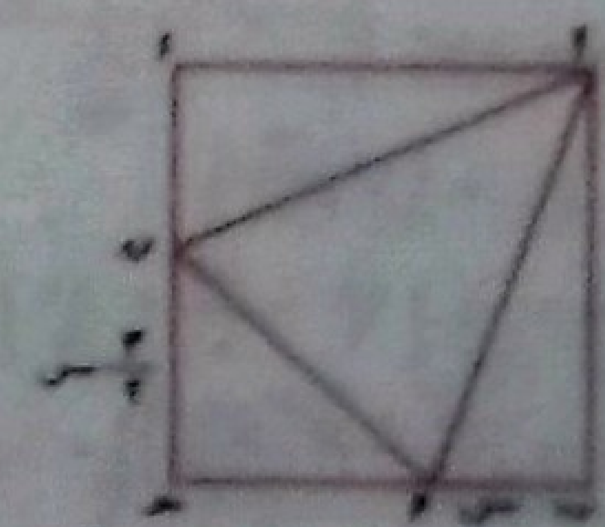
∴ س^2 = ٩ منها س = ٣

$\text{م}''_{\text{عند س} = 3}$ > ٠ أقل ما يمكن

∴ أقل مساحة :

$\text{م}_{\text{عند س} = 3}$ = ٦ + ٣ + $\frac{9}{3}$ = ١٢ وحدة مربعة.

٤٥



مساحة Δ أ م ن

م = مساحة المربع أ ب جـ د − [م (المثلث أ ب م) + م (المثلث م جـ ن) + م (المثلث أ ن د)]

= ١٠٠ − ($\frac{1}{2}$ × س × ١٠ + $\frac{1}{2}$ (١٠ − س) × $\frac{3}{4}$ س + $\frac{1}{2}$ (١٠ − $\frac{3}{4}$ س) × ١٠)

= $\frac{3}{8}$ س^2 − ٥ س + ٥٠

م' = $\frac{3}{4}$ س − ٥ م' = ٠ فإن س = $\frac{20}{3}$

م'' = $\frac{3}{4}$ > ٠

∴ عند س = $\frac{20}{3}$ المساحة أصغر ما يمكن.

٤٦

من تطابق ΔΔ هـ ب د ، ل و ج ينتج أن هـ د = ج ل

من تطابق ΔΔ أ هـ ج ، جـ ل د ينتج أن هـ ج = د ل

∴ الشكل متوازي أضلاع ، مساحته م

م = مساحة المستطيل − ٢ × مساحة Δ ب د هـ

− ٢ × مساحة Δ د جـ ل = ٦ × ١٠ − ٢ × $\frac{1}{2}$

× س (٦ − س) − ٢ × $\frac{1}{2}$ × (١٠ − س)

× س = ٢ س^2 − ١٦ س + ٦٠ وهو المطلوب (١)

م' = ٤ س − ١٦
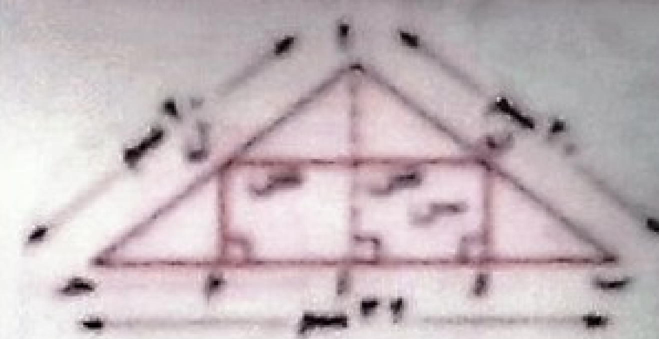
بوضع م' = ٠ ∴ س = ٤

م'' = ٤ > ٠ أصغر ما يمكن

∴ أصغر قيمة ممكنة للمساحة

= $\text{م}_{\text{س} = 4}$ = ٢٨ وحدة مربعة.

٤٧



أ و = $\sqrt{20^2 - 16^2}$

= ١٢

من تشابه المثلثين أ ب و ، ن ب و

$\frac{\text{س}}{12} = \frac{16 - \text{ص}}{16}$ ∴ ص = ١٦ − $\frac{4}{3}$ س

مساحة المستطيل = ٢ س ص

م = ٢ س (١٦ − $\frac{4}{3}$ س) = ٣٢ س − $\frac{8}{3}$ س^2

م' = ٣٢ − $\frac{16}{3}$ س

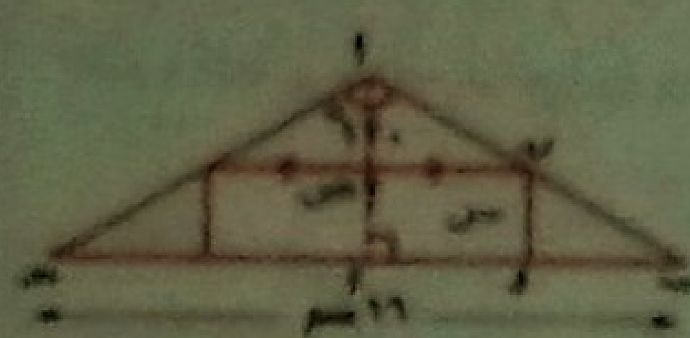
بوضع م' = ٠ ∴ س = ٦

م'' = − $\frac{16}{3}$ < ٠ قيمة عظمى

∴ بعدي المستطيل هما س = ٦ سم

، ٢ ص = ٢ × (١٦ − $\frac{4}{3}$ × ٦) = ١٦ سم

٤٨



من هندسة الشكل

أ و = $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ سم

ومن تشابه ΔΔ أ ب و ، ن ب و :

$\frac{\text{س}}{\frac{8\sqrt{3}}{3}} = \frac{8 - \text{ص}}{8}$ ∴ $\frac{\text{س}}{8 - \text{ص}} = \frac{\frac{8\sqrt{3}}{3}}{8}$

ص = ٨ − $\sqrt{3}$ س

مساحة المستطيل م = س × ٢ ص = ٢ س ص

= ٢ س (٨ − $\sqrt{3}$ س)

= ١٦ س − ٢ $\sqrt{3}$ س^2

م' = ١٦ − ٤ $\sqrt{3}$ س بوضع م' = ٠

∴ س = $\frac{16}{4\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

م'' = −٤ $\sqrt{3}$ < ٠ قيمة عظمى

∴ أكبر مساحة للمستطيل $\text{م}_{\text{س} = \frac{4\sqrt{3}}{3}}$

= ٢ × $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ × (٨ − $\sqrt{3}$ × $\frac{4\sqrt{3}}{3}$) = $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ سم^2

٤٩

بفرض أن عدد الأجهزة الزائدة = س جهاز

∴ العدد الكلي للأجهزة = ٥٠ + س جهاز

∴ المكسب في كل جهاز = ٣٠ − $\frac{1}{2}$ س جنيه

∴ الربح ر = (٥٠ + س) (٣٠ − $\frac{1}{2}$ س)

= ١٥٠٠ + ٥ س − $\frac{1}{2}$ س^2

∴ ر' = ٥ − س

بوضع ر' = ٠ ∴ س = ٥

، ∵ ر'' = −١ < ٠ قيمة عظمى

∴ عدد الأجهزة التي تحقق أكبر ربح = ٥٥ جهازاً.

٥٠

ت = ٢ جتاهـ + ٢ جاهـ

ت' = −٢ جاهـ + ٢ جتاهـ

بوضع ت' = ٠

∴ −٢ جاهـ + ٢ جتاهـ = ٠

∴ جاهـ = جتاهـ ∴ هـ = $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{4}$

ت'' = −٢ جتاهـ − ٢ جاهـ

$\text{ت}''_{\text{هـ} = \frac{\pi}{4}}$ = −٢ $\sqrt{2}$ < ٠ عظمى

$\text{ت}''_{\text{هـ} = \frac{5\pi}{4}}$ = ٢ $\sqrt{2}$ > ٠ صغرى

∴ أقصى قيمة للتيار عند هـ = $\frac{\pi}{4}$

∴ تكون ت = ٢ $\sqrt{2}$

٥١

ح (ن) = ٢٠٠٠ + $\frac{5000\,\text{ن}}{100 + \text{ن}^2}$

ح' (ن) = $\frac{(100 + \text{ن}^2) \times 5000 - 5000\,\text{ن} \times 2\,\text{ن}}{(100 + \text{ن}^2)^2}$

= $\frac{5000\,(100 - \text{ن}^2)}{(100 + \text{ن}^2)^2}$

بوضع ح' (ن) = ٠ ∴ ن = ١٠

ح'' (١٠) < ٠

∴ القيمة العظمى لحجم المزرعة

= ٢٠٠٠ + $\frac{5000 \times 10}{100 + (10)^2}$ = ٢٢٥٠

٥٢

(١) $ع(ن) = ٢٠ \left[\frac{ن}{١٢} - لو_هـ \left(\frac{ن}{١٢}\right)\right] + ٣٠$

$\therefore ع'(ن) = ٢٠ \left[\frac{١}{١٢} - \frac{١٢}{ن} \times \frac{١}{١٢}\right]$

$= ٢٠ \left[\frac{ن - ١٢}{١٢ ن}\right]$

$\because ع'(ن) = صفر$

عندما ن = ١٢ يوم

∴ عدد البكتريا يكون أقل ما يمكن بعد ١٢ يوم.

(٢) أقل عدد من البكتريا

$= ٢٠ \left[\frac{١٢}{١٢} - لو_هـ \left(\frac{١٢}{١٢}\right)\right] + ٣٠ = ٥٠$ لكل سم^٣

٥٣

نفرض أن سعر الطن من الحديد الأقل جودة = ك

∴ سعر الطن من الحديد الجيد = ٢ ك

الإيراد «ى» = ك س + ٢ ك ص

$= ك س + ٢ ك \times \frac{٤٠ - ٥ س}{١٠ - س}$

$= ك \times \frac{١٠ س - س^٢ + ٨٠ - ١٠ س}{(١٠ - س)}$

$= \frac{٨٠ - س^٢}{١٠ - س} ك$

$ى' = \frac{(١٠ - س)(-٢ س) - (٨٠ - س^٢)(-١)}{(١٠ - س)^٢} ك$

$= \frac{س^٢ - ٢٠ س + ٨٠}{(١٠ - س)^٢} ك$

$ى' = ٠$

∴ س ≈ ١٤,٥ ، س ≈ ٥,٥

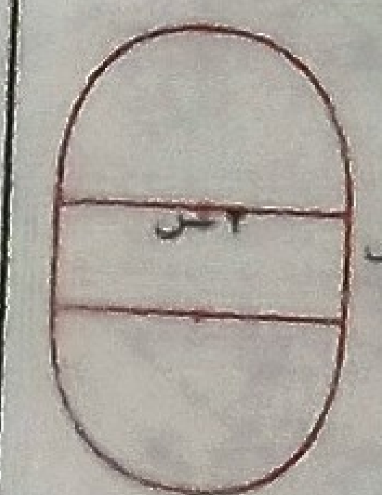
$ى''_{س = ١٤,٥} > ٠$ صغرى

$ى''_{س = ٥,٥} < ٠$ عظمى

الكمية التي ينتجها المصنع من الصنف س ≈ ٥,٥ طن

، ص ≈ ٢,٨ طن.

٥٤



المحيط = ٤٠٠

$٢ ص + ٢ \pi س = ٤٠٠$

$ص = ٢٠٠ - \pi س$

مساحة سطح الملعب «م»

$م = ٢ س ص + \pi س^٢$

$= ٢ س (٢٠٠ - \pi س) + \pi س^٢$

$= ٤٠٠ س - ٢ \pi س^٢ + \pi س^٢$

$= ٤٠٠ س - \pi س^٢$

$م' = ٤٠٠ - ٢ \pi س$

بوضع م′ = ٠ ∴ $س = \frac{٢٠٠}{\pi}$

$م'' = -٢ \pi < ٠$ عظمى

في حالة المساحة أكبر ما يمكن

$س = \frac{٢٠٠}{\pi}$ ، $ص = ٢٠٠ - \pi \times \frac{٢٠٠}{\pi} = صفر$

أى أن البعد ص يتلاشى ويصبح الشكل دائرة نصف قطرها $\frac{٢٠٠}{\pi}$

٥٥

مساحة سطح الكرة = $٤ \pi نق^٢$

مساحة سطح الأسطوانة = $٢ \pi نق (نق + ع)$

مجموع المساحتين م = $٤ \pi نق^٢ + ٢ \pi نق (نق + ع) = ٢٥٠ \pi$ ∴ $٦ \pi نق^٢ + ٢ \pi نق ع$

$= ٢٥٠ \pi$

$ع = \frac{٢٥٠ \pi - ٦ \pi نق^٢}{٢ \pi نق} = \frac{١٢٥ - ٣ نق^٢}{نق}$

الحجم «ح» = $\frac{٤}{٣} \pi نق^٣ + \pi نق^٢ ع$

$= \frac{٤}{٣} \pi نق^٣ + \pi نق^٢ \times \frac{١٢٥ - ٣ نق^٢}{نق}$

$= \frac{٤}{٣} \pi نق^٣ + ١٢٥ \pi نق - ٣ \pi نق^٣$

$ح' = ٤ \pi نق^٢ + ١٢٥ \pi - ٩ \pi نق^٢$

$= ١٢٥ \pi - ٥ \pi نق^٢$

بوضع ح′ = ٠ ∴ نق = ٥ سم

$ح'' = -١٠ \pi نق < ٠$ عظمى

∴ نصف قطرها = ٥ سم

٥٦

المساحة = $\pi نق^٢ + ٢ \pi نق ع$

$+ \frac{١}{٢} \times ٤ \pi نق^٢ = ٣ \pi نق^٢$

$+ ٢ \pi نق ع = ٢٠٠٠ \pi$

$ع = \frac{٢٠٠٠ - ٣ نق^٢}{٢ نق}$

الحجم = $ح = \pi نق^٢ ع + \frac{١}{٢} \times \frac{٤}{٣} \pi نق^٣$

$= \pi نق^٢ ع + \frac{٢}{٣} \pi نق^٣$

$ح = \pi نق^٢ \times \frac{٢٠٠٠ - ٣ نق^٢}{٢ نق} + \frac{٢}{٣} \pi نق^٣$

$= ١٠٠٠ \pi نق - \frac{٣}{٢} \pi نق^٣ + \frac{٢}{٣} \pi نق^٣$

$= ١٠٠٠ \pi نق - \frac{٥}{٦} \pi نق^٣$

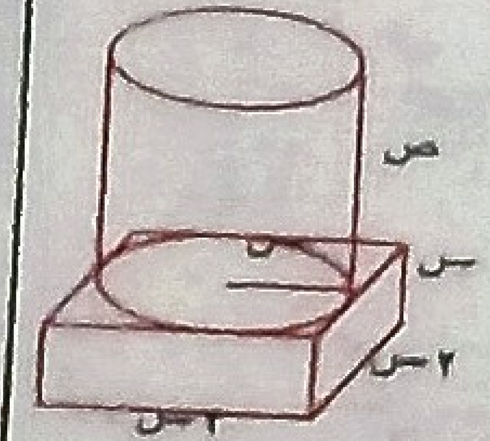
$ح' = ١٠٠٠ \pi - \frac{٥}{٢} \pi نق^٢$

بوضع ح′ = ٠ ∴ نق^٢ = ٤٠٠ ∴ نق = ٢٠ سم

$ح'' = -\frac{٥}{٢} \pi \times ٢ نق < ٠$ لجميع قيم نق

∴ نق = ٢٠ سم ، ع = ٢٠ سم

٥٧



ح = ٢٧ متر^٣

٢ س × ٢ س × س

$+ \pi س^٢ ص = ٢٧$ متر^٣

$ص = \frac{٢٧ - ٤ س^٣}{\pi س^٢}$

المساحة السطحية م = ٢ (٢ س × س + ٢ س × س

+ ٢ س × ٢ س) + ٢ π س ص

∴ $م = ١٦ س^٢ + ٢ \pi س ص$

$= ١٦ س^٢ + ٢ \pi س \times \frac{(٢٧ - ٤ س^٣)}{\pi س^٢}$

$= \frac{١٦ س^٣ + ٥٤ - ٨ س^٣}{س} = \frac{٨ س^٣ + ٥٤}{س}$

$م' = \frac{س (٢٤ س^٢) - (٨ س^٣ + ٥٤) \times ١}{س^٢}$

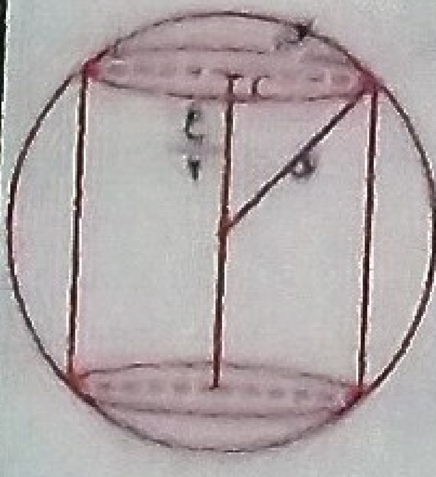
$= \frac{١٦ س^٣ - ٥٤}{س^٢}$

عند $س = \frac{٣}{٢}$ تجعل مساحة الخزان أقل ما يمكن

٥٨

بفرض أن طول نصف قطر الأسطوانة نق$_١$

، طول نصف قطر الكرة نق



∵ $ح = \pi نق_١^٢ ع$

∵ $نق_١^٢ = نق^٢ - \frac{١}{٤} ع^٢$

∴ $ح = \pi ع (نق^٢ - \frac{١}{٤} ع^٢)$

∴ $ح = \pi (نق^٢ ع - \frac{١}{٤} ع^٣)$

∴ $\frac{دح}{دع} = \pi [نق^٢ - \frac{٣}{٤} ع^٢]$

∴ $\frac{دح}{دع} = ٠$ عندما $نق^٢ = \frac{٣}{٤} ع^٢$

∴ $ع^٢ = \frac{٤}{٣} نق^٢$ ∴ $ع = \frac{٢}{\sqrt{٣}} نق$

∴ $ع = \frac{٢}{\sqrt{٣}} نق$

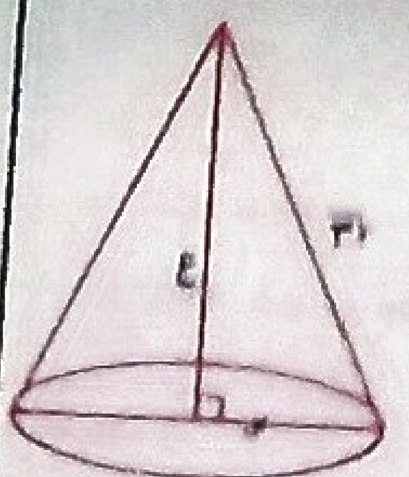
∴ $\frac{د^٢ح}{دع^٢} = -\frac{٣}{٢} \pi ع < ٠$

∴ الحجم أكبر ما يمكن عند $ع = \frac{٢}{\sqrt{٣}} نق$

∴ $ح = \pi (نق^٢ \times \frac{٢}{\sqrt{٣}} نق - \frac{١}{٤} \times \frac{٨}{٣\sqrt{٣}} نق^٣)$

$= \frac{٤ \pi نق^٣}{٣\sqrt{٣}}$

٥٩



$نق^٢ = ٣ - ع^٢$

، ∵ $ح = \frac{١}{٣} \pi نق^٢ ع$

∴ $ح = \frac{١}{٣} \pi ع (٣ - ع^٢)$

$= \pi ع - \frac{١}{٣} \pi ع^٣$

$\frac{دح}{دع} = \pi - \pi ع^٢$

وبوضع $\frac{دح}{دع} = صفر$ ∴ $ع^٢ = ١$ ∴ ع = ١ سم

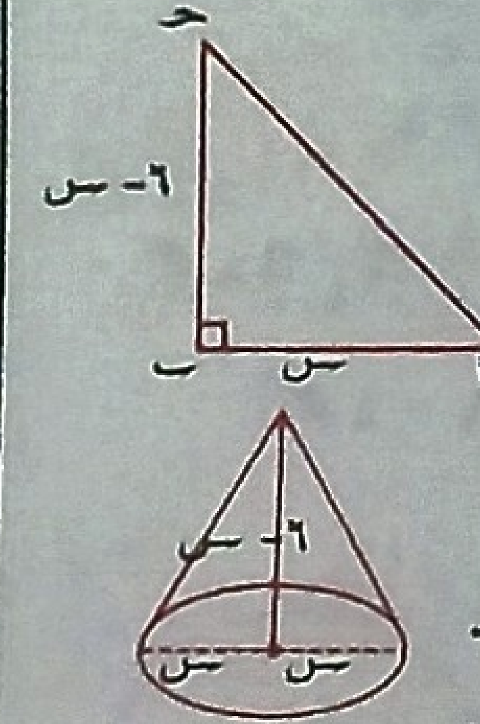
ومنها نق = $\sqrt{٢}$ سم

، ∵ $\frac{د^2 ح}{د ع^2} = -2\pi$ ع (سالبة)

∴ حجم المخروط يكون أكبر ما يمكن عندما يكون طولى ضلعى المثلث ١ سم ، $\sqrt{2}$ سم

٦٠

حجم الجسم الناشئ من دوران المثلث حول $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$ دورة كاملة



ح $= \frac{1}{3}\pi$ س^2 × (٦ − س)

$= \frac{1}{3}\pi$ (٦ س^2 − س^3)

∴ ح$'$ $= \frac{1}{3}\pi$ (١٢ س − ٣ س^2)

وبوضع ح$'$ = ٠

∴ $\frac{1}{3}\pi$ × ٣ س (٤ − س) = ٠

∴ س = ٠ (مرفوض) أ، س = ٤

، ∵ ح$''$ $= \frac{1}{3}\pi$ (١٢ − ٦ س)

∴ $(ح'')_{س=4} < 0$

∴ الحجم أكبر ما يمكن عند أب = ٤ سم

٦١

مساحة المستطيل (م)

= ٢ س × ص

= ٢ س × (٤ − س^2)

= ٨ س − ٢ س^3

∴ $\frac{دم}{دس}$ = ٨ − ٦ س^2

، ∵ $\frac{دم}{دس}$ = ٠ ∴ س = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ والسالب مرفوض

وفى هذه الحالة ص = $\frac{8}{3}$

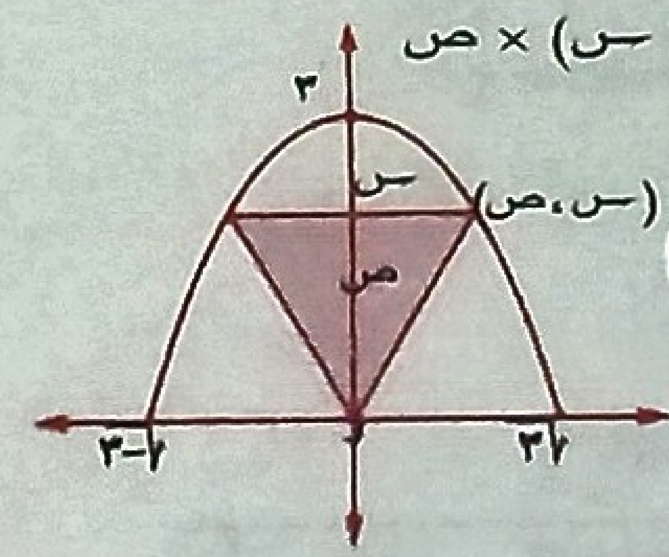
، ∵ $\frac{د^2م}{دس^2}$ = −١٢ س < ٠

∴ توجد قيمة عظمى

∴ بعدا المستطيل هما $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ، $\frac{8}{3}$

٦٢

(م) مساحة Δ = $\frac{1}{2}$ (٢ س) × ص



م = س ص

م = س (٣ − $\frac{1}{12}$ س^2)

م = ٣ س − $\frac{1}{12}$ س^3

م$'$ = ٣ − $\frac{1}{4}$ س^2

عند م$'$ = ٠ ∴ س = ± ٢ $\sqrt{3}$

∴ س = ٢ $\sqrt{3}$

م$''$ = − $\frac{1}{2}$ س

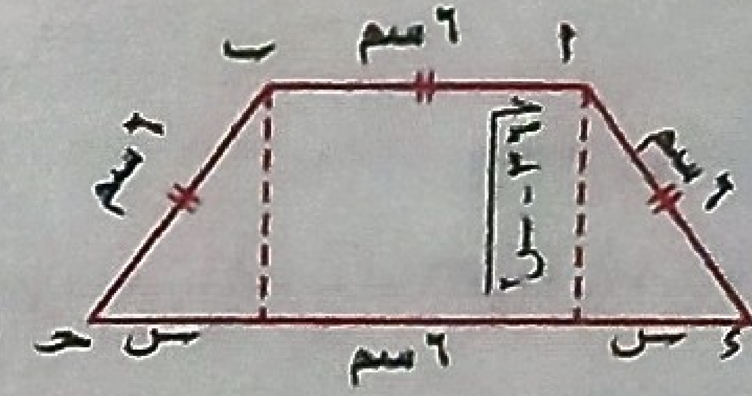
∴ عند س = ٢ $\sqrt{3}$ فإن م$''$ < ٠ عظمى

∴ المساحة أكبر ما يمكن عند س = ٢ $\sqrt{3}$

م$_{س = 2\sqrt{3}}$ = ٣ (٢ $\sqrt{3}$) − $\frac{1}{12}$ (٢ $\sqrt{3}$)^3

= ٤ $\sqrt{3}$ وحدة مربعة

٦٣



∴ م = $\frac{1}{2}$ (أب + دحـ) × ع

∴ م = $\frac{6 + (2س + 6)}{2}$ × $\sqrt{36 - س^2}$

∴ م = (٦ + س) $\sqrt{36 - س^2}$

∴ $\frac{دم}{دس}$ = (٦ + س) × $\frac{-2س}{2\sqrt{36 - س^2}}$ + $\sqrt{36 - س^2}$

∴ $\frac{دم}{دس}$ = $\frac{-6س - س^2 + 36 - س^2}{\sqrt{36 - س^2}}$

= $\frac{-2س^2 - 6س + 36}{\sqrt{36 - س^2}}$

∴ $\frac{دم}{دس}$ = ٠ ∴ س^2 + ٣ س − ١٨ = ٠

∴ (س − ٣) (س + ٦) = ٠

∴ س = ٣ أ، س = −٦ (مرفوض)

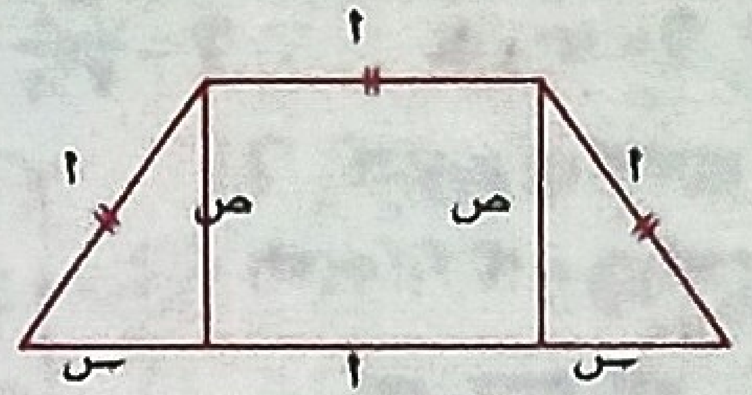
، عندما س > ٣ تكون $\frac{دم}{دس}$ < ٠

، عندما س < ٣ تكون $\frac{دم}{دس}$ > ٠

∴ عندما س = ٣ تكون المساحة قيمة عظمى

وعندها تكون م = (٩) $\sqrt{36 - 9}$ = ٢٧ $\sqrt{3}$ سم^2

٦٤



من الشكل ص = $\sqrt{أ^2 - س^2}$

م (مساحة شبه المنحرف) = $\frac{1}{2}$ (أ + أ + ٢ س) × ص

= (أ + س) $\sqrt{أ^2 - س^2}$

م$'$ = (أ + س) × $\frac{-2س}{2\sqrt{أ^2 - س^2}}$ + $\sqrt{أ^2 - س^2}$

= $\frac{-أس - س^2 + أ^2 - س^2}{\sqrt{أ^2 - س^2}}$ = $\frac{أ^2 - أس - 2س^2}{\sqrt{أ^2 - س^2}}$

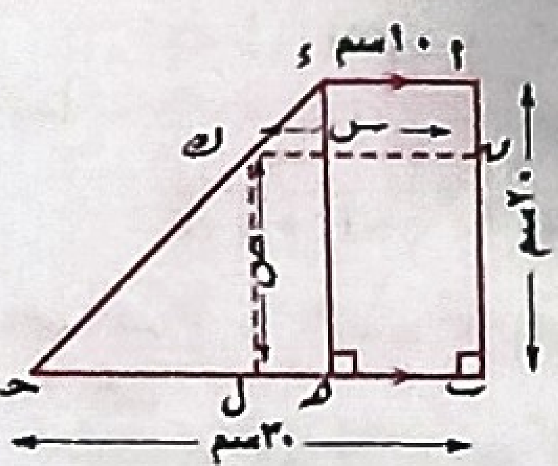
م$'$ = ٠ فإن أ^2 − أ س − ٢ س^2 = ٠

س = $\frac{أ}{2}$ أ، − أ (مرفوض)

م$''_{س = \frac{أ}{2}}$ < ٠ قيمة عظمى

فى حالة س = $\frac{أ}{2}$ تكون المساحة أكبر ما يمكن وتكون قاعدته الكبرى = أ + ٢ س = أ + ٢ × $\frac{أ}{2}$ = ٢ أ

٦٥



نفرض أن بعدى المستطيل هما س ، ص ثم

نرسم $\overline{\text{دهـ}} \perp \overline{\text{بحـ}}$

∴ دهـ = أب = ٢٠ سم

، هـحـ = ٣٠ − ١٠ = ٢٠ سم

، ل حـ = (٣٠ − س) سم فى Δ حـ د هـ

، ∵ $\frac{هـل}{دهـ} = \frac{حـل}{حـهـ}$ ∴ $\frac{ص}{20} = \frac{30 - س}{20}$

∴ ص = ٣٠ − س

مساحة المستطيل (م) = س × ص

∴ م = س (٣٠ − س) = ٣٠ س − س^2

∴ $\frac{دم}{دس}$ = ٣٠ − ٢ س

، ∵ $\frac{دم}{دس}$ = ٠ عندما س = ١٥

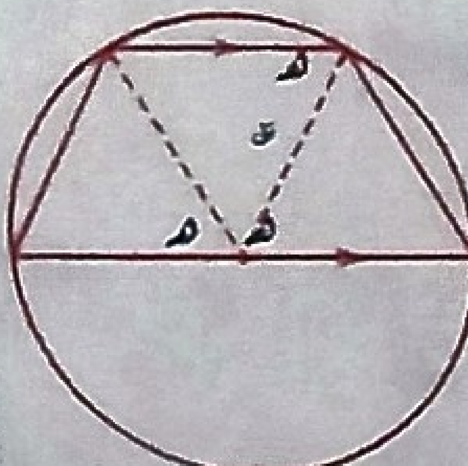
، ∵ $\frac{د^2م}{دس^2}$ = −٢ < ٠

∴ عند س = ١٥ تكون م قيمة عظمى

، ص = ٣٠ − ١٥ = ١٥

∴ أكبر مستطيل يمكن رسمه يكون مربعًا طول ضلعه ١٥ سم

٦٦



مساحة شبه المنحرف

م = ($\frac{1}{2}$ (١)^2 جا هـ) × ٢

+ $\frac{1}{2}$ (١)^2 جا (١٨٠ − ٢ هـ)

م = جا هـ + $\frac{1}{2}$ (٢ جا هـ جتا هـ) = جا هـ (١ + جتا هـ)

م$'$ = جتا هـ (١ + جتا هـ) + جا هـ (− جا هـ)

= جتا هـ + جتا^2 هـ − جا^2 هـ = ٢ جتا^2 هـ + جتا هـ − ١

بوضع م$'$ = ٠ ∴ جتا هـ = $\frac{1}{2}$

منها هـ = ٦٠°

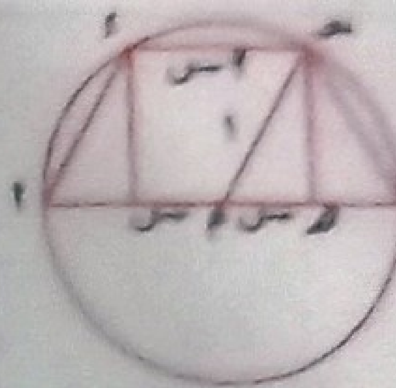
أو جتا هـ = −١ منها هـ = ١٨٠° (مرفوضة)

م$''$ = −٢ جتا هـ جا هـ − جا هـ

م$''_{عند\ هـ = 60}$ = − $\sqrt{3}$ < ٠ قيمة عظمى

أكبر مساحة = م = $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ وحدة مربعة.

حل آخر :



$\text{أب} = ٢$ نفرض $\text{حـ ء} = ٢\,\text{س}$

$\therefore \text{حـ هـ} = \sqrt{١ - \text{س}^{٢}}$

المساحة $\text{م} = \frac{١}{٢}(٢\,\text{س} + ٢)\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}$

$= (\text{س} + ١)\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}$

$\text{م}' = \sqrt{١ - \text{س}^{٢}} + (\text{س} + ١)\frac{-٢\,\text{س}}{٢\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}}$

$= \frac{١ - \text{س}^{٢} - \text{س}^{٢} - \text{س}}{\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}} = \frac{-٢\,\text{س}^{٢} - \text{س} + ١}{\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}}$

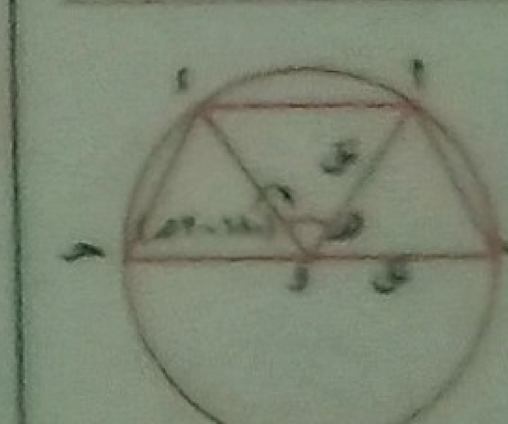
$\text{م}' = ٠$ عند $\text{س} = \frac{١}{٢}$ ، -١ مرفوض

$\text{م}''_{\text{عند س} = \frac{١}{٢}} < ٠$ عظمى

المساحة تكون أكبر ما يمكن عند $\text{س} = \frac{١}{٢}$

$\therefore \text{م} = \left(\frac{١}{٢} + ١\right)\sqrt{١ - \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٤}$ وحدة مربعة.

٦٧



مساحة شبه المنحرف م

$= \text{م}\,\Delta\,\text{و ب أ} + \text{م}\,\Delta\,\text{و أ ء}$

$+ \text{م}\,\Delta\,\text{و ء حـ}$

$= \frac{١}{٢}\text{نق}^{٢}\,\text{جا هـ} + \frac{١}{٢}\text{نق}^{٢}\,\text{جا}(١٨٠ - ٢\,\text{هـ})$

$+ \frac{١}{٢}\text{نق}^{٢}\,\text{جا هـ} = \text{نق}^{٢}\,\text{جا هـ} + \frac{١}{٢}\text{نق}^{٢}\,\text{جا ٢هـ}$

$\text{م}' = \text{نق}^{٢}\,\text{جتا هـ} + \frac{١}{٢}\text{نق}^{٢}\,\text{جتا ٢هـ} \times ٢$

$= \text{نق}^{٢}\,\text{جتا هـ} + (٢\,\text{جتا}^{٢}\,\text{هـ} - ١)\,\text{نق}^{٢}$

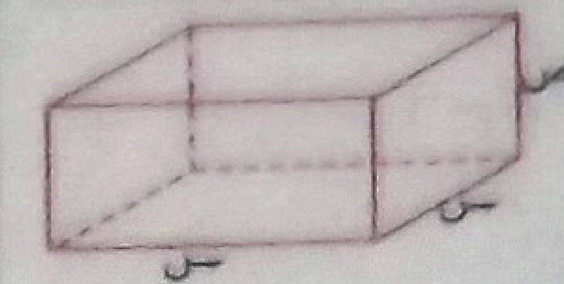
$\text{م}' = ٠ \qquad \therefore \text{نق}^{٢}(٢\,\text{جتا}^{٢}\,\text{هـ} + \text{جتا هـ} - ١) = ٠$

$\text{جتا هـ} = \frac{١}{٢}$ أو $\text{جتا هـ} = -١$ مرفوض

$\therefore \text{هـ} = ٦٠ \qquad \text{م}''_{\text{هـ} = ٦٠} < ٠$ عظمى

منها زاوية القاعدة $(\text{د أ ب حـ}) = \frac{١٨٠ - ٦٠}{٢} = ٦٠^{\circ}$

٦٨



الأبعاد = س ، س ، ص

الحجم $= \text{س}^{٢}\,\text{ص} = ١٠٨$

$\therefore \text{ص} = \frac{١٠٨}{\text{س}^{٢}}$

مساحة الصاج $= \text{س}^{٢} + ٤\,\text{س ص} = \text{س}^{٢} + \frac{٤ \times ١٠٨}{\text{س}}$

$\text{م} = \frac{\text{س}^{٣} + ٤٣٢}{\text{س}}$

$\text{م}' = \frac{\text{س}(٣\,\text{س}^{٢}) - (\text{س}^{٣} + ٤٣٢) \times ١}{\text{س}^{٢}} = \frac{٢\,\text{س}^{٣} - ٤٣٢}{\text{س}^{٢}}$

$\text{م}' = ٠$ فإن : $\text{س} = ٦$

$\text{م}''_{\text{عند س} = ٦} > \text{صفر}$

مساحة الصاج تكون أقل ما يمكن عند $\text{س} = ٦$

أبعادها ٦ ، ٦ ، ٣ وتكون $= \frac{٦^{٣} + ٤٣٢}{٦} = ١٠٨$ متر^{٢}

وتكلفتها = ١٢٩٦ جنيهًا.

٦٩

نفرض أن أبعاده س ، س ، ص مترًا

حجمه $= \text{س}^{٢}\,\text{ص} = ٢٥٢ \qquad \therefore \text{ص} = \frac{٢٥٢}{\text{س}^{٢}}$

تكلفة الطلاء $= ٥٠ \times \text{س}^{٢} + ٢٠ \times \text{س}^{٢} + ٣٠ \times ٤\,\text{س ص}$

$\text{ت} = ٧٠\,\text{س}^{٢} + ١٢٠\,\text{س ص}$

$= ٧٠\,\text{س}^{٢} + ١٢٠\,\text{س} \times \frac{٢٥٢}{\text{س}^{٢}}$

$\text{ت} = \frac{٧٠\,\text{س}^{٣} + ٣٠٢٤٠}{\text{س}}$

$\text{ت}' = \frac{\text{س}(٢١٠\,\text{س}^{٢}) - (٧٠\,\text{س}^{٣} + ٣٠٢٤٠)(١)}{\text{س}^{٢}}$

$= \frac{١٤٠\,\text{س}^{٣} - ٣٠٢٤٠}{\text{س}^{٢}}$

$\text{ت}' = ٠ \qquad \therefore \text{س} = ٦$

$\text{ت}'' > ٠$ أقل ما يمكن عند $\text{س} = ٦$

$\therefore$ أبعاد الصندوق هي ٦ ، ٦ ، ٧ متر.

٧٠

بفرض أن أبعاد الصندوق الداخلية هي س ، س ، ص

، سعة الخزان $= \text{ك} = \text{س}^{٢}\,\text{ص} \qquad \therefore \text{ص} = \frac{\text{ك}}{\text{س}^{٢}}$

مساحة سطح الخزان من الداخل $= \text{س}^{٢} + ٤\,\text{س ص}$

$\therefore \text{م} = \text{س}^{٢} + ٤\,\text{س}\left(\frac{\text{ك}}{\text{س}^{٢}}\right) = \frac{\text{س}^{٣} + ٤\,\text{ك}}{\text{س}}$

$\therefore \text{م}' = \frac{\text{س}(٣\,\text{س}^{٢}) - (\text{س}^{٣} + ٤\,\text{ك})(١)}{\text{س}^{٢}}$

$= \frac{٢\,\text{س}^{٣} - ٤\,\text{ك}}{\text{س}^{٢}}$

، $\text{م}'' = \frac{\text{س}^{٢}(٦\,\text{س}^{٢}) - ٢\,\text{س}(٢\,\text{س}^{٣} - ٤\,\text{ك})}{\text{س}^{٤}}$

$= \frac{٢\,\text{س}^{٣} + ٨\,\text{ك}}{\text{س}^{٣}}$

$\text{م}' = ٠$ فإن : $\text{س} = \sqrt[٣]{٢\,\text{ك}}$

$\text{م}'' > ٠$ صغرى

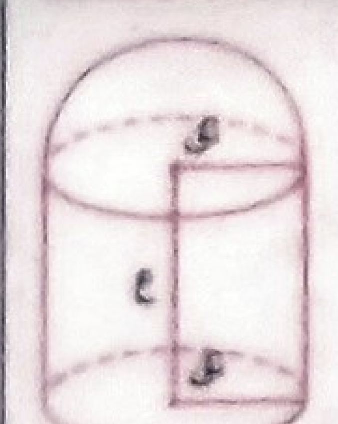
أقل تكلفة تكون عند $\text{س} = \sqrt[٣]{٢\,\text{ك}}$

فإن : $\text{ص} = \frac{\text{ك}}{\text{س}^{٢}} \times \frac{\text{س}}{\text{س}} = \frac{\text{ك س}}{\text{س}^{٣}} = \frac{\text{ك س}}{\left(\sqrt[٣]{٢\,\text{ك}}\right)^{٣}}$

$= \frac{\text{ك س}}{٢\,\text{ك}} = \frac{١}{٢}\text{س}$

أى نصف طول القاعدة.

٧١



نفرض أن : طول نصف قطر

قاعدة الأسطوانة = نق وارتفاعها = ع

$\therefore$ حجم الأسطوانة $= \pi\,\text{نق}^{٢}\,\text{ع}$

$\therefore \pi\,\text{نق}^{٢}\,\text{ع} = ١٠٨\,\pi \qquad \therefore \text{ع} = \frac{١٠٨}{\text{نق}^{٢}}$

ويفرض أن تكلفة الوحدة المربعة ص الجدار = ك

$\therefore$ التكلفة $\text{ت} = ٢\,\pi\,\text{نق ع} \times \text{ك} + ٢\,\pi\,\text{نق}^{٢} \times ٢\,\text{ك}$

$= ٢\,\pi\,\text{ك}\left(\text{نق} \times \frac{١٠٨}{\text{س}^{٢}} + ٢\,\text{نق}^{٢}\right)$

$= ٤\,\pi\,\text{ك}\,(٥٤\,\text{نق}^{-١} + \text{نق}^{٢})$

$\therefore \text{ت}' = ٤\,\pi\,\text{ك}\,(-٥٤\,\text{نق}^{-٢} + ٢\,\text{نق})$

، $\text{ت}'' = ٤\,\pi\,\text{ك}\,(١٠٨\,\text{نق}^{-٣} + ٢)$

بوضع ت' = صفر

$\therefore -٥٤\,\text{نق}^{-٢} + ٢\,\text{نق} = ٠ \qquad \therefore \text{نق} = ٣$

، $\because (\text{ت}'')_{\text{نق} = ٣} = ٤\,\pi\,\text{ك}\left(\frac{١٠٨}{٢٧} + ٢\right) > ٠$ قيمة صغرى

$\therefore$ أقل تكلفة عند نق = ٣ ، ع = ١٢

٧٢

بفرض طول ضلع المربع = س

وطول نصف قطر الدائرة = نق

$\therefore ٤\,\text{س} + ٢\,\pi\,\text{نق} = ٨٠$

$\therefore \text{س} = ٢٠ - \frac{١}{٢}\,\pi\,\text{نق}$ (١)

، $\because$ مجموع مساحتى الشكلين (م)

$\text{م} = \text{س}^{٢} + \pi\,\text{نق}^{٢}$ (٢)

من (١) ، (٢) :

$\therefore \text{م} = \left(٢٠ - \frac{١}{٢}\,\pi\,\text{نق}\right)^{٢} + \pi\,\text{نق}^{٢}$

$\therefore \frac{\text{ءم}}{\text{ء نق}} = ٢\left(٢٠ - \frac{١}{٢}\pi\,\text{نق}\right) \times \left(-\frac{١}{٢}\,\pi\right) + ٢\,\pi\,\text{نق}$

$= -٢٠\,\pi + \frac{١}{٢}\,\pi^{٢}\,\text{نق} + ٢\,\pi\,\text{نق}$

، عند $\frac{\text{ءم}}{\text{ء نق}} = \text{صفر} \qquad \therefore \frac{١}{٢}\,\pi\,\text{نق} + ٢\,\text{نق} = ٢٠$

$\text{نق}\left(٢ + \frac{١}{٢}\,\pi\right) = ٢٠ \qquad \therefore \text{نق} = \frac{٢٠}{٢ + \frac{١}{٢}\,\pi} = \frac{٤٠}{٤ + \pi}$

، $\because \frac{\text{ء}^{٢}\text{م}}{\text{ء نق}^{٢}} = \frac{١}{٢}\,\pi^{٢} + ٢\,\pi > \text{صفر}$

$\therefore$ المساحة قيمة صغرى عندما $\text{نق} = \frac{٤٠}{٤ + \pi}$

$\therefore \text{س} = ٢٠ - \frac{٢٠\,\pi}{٤ + \pi} = \frac{٨٠ + ٢٠\,\pi - ٢٠\,\pi}{٤ + \pi}$

$\therefore \text{س} = \frac{٨٠}{٤ + \pi} \qquad \therefore \text{س} = ٢\,\text{نق}$

$\therefore$ عندما يكون مجموع مساحتى الدائرة والمربع قيمة صغرى فإن طول ضلع المربع = طول قطر الدائرة.

٧٣

نفرض أن طول ضلع المربع = س

طول نصف قطر الدائرة = نق

∴ ٤ س + ٢ π . نق = ٣٤

∴ س = $\frac{١٧}{٢}$ - $\frac{١}{٢}$ π نق   م = س^{٢} + π نق^{٢}

م = $\frac{٢٨٩}{٤}$ - $\frac{١٧}{٢}$ π نق + $\frac{١}{٤}$ π^{٢} نق^{٢} + π نق^{٢}

مَ = - $\frac{١٧}{٢}$ π + $\frac{١}{٢}$ π^{٢} نق + ٢ π نق

مَ = ٠ عند نق = $\frac{\frac{١٧}{٢}}{\frac{١}{٢}π + ٢}$ = $\frac{١٧}{π + ٤}$

مً = $\frac{١}{٢}$ π^{٢} + ٢ π > ٠ قيمة صغرى

∴ طول الجزء الأول = ٤ س = ٣٤ - ٢ π $\left(\frac{١٧}{π + ٤}\right)$

= $\frac{٣٤ π + ١٣٦ - ٣٤ π}{π + ٤}$

= $\frac{١٣٦}{π + ٤}$

طول الجزء الثانى = ٢ π نق = ٢ π × $\frac{١٧}{π + ٤}$ = $\frac{٣٤ π}{π + ٤}$

٧٤

(١٧ - $\frac{٣}{٢}$ س)

٢ س

س

نفرض أن عرض المستطيل = س

∴ طوله = ٢ س سم

∴ محيط المستطيل = (س + ٢ س) × ٢ = ٦ س

∴ محيط المربع = ٦٨ - ٦ س

∴ طول ضلع المربع = $\frac{٦٨ - ٦ س}{٤}$

= (١٧ - $\frac{٣}{٢}$ س) سم

∴ مجموع مساحتى المستطيل والمربع (م)

= س × ٢ س + (١٧ - $\frac{٣}{٢}$ س)^{٢}

∴ م = ٢ س^{٢} + (١٧ - $\frac{٣}{٢}$ س)^{٢}

∴ $\frac{ءم}{ءس}$ = ٤ س + ٢ (١٧ - $\frac{٣}{٢}$ س) × $\frac{-٣}{٢}$

= ٤ س + $\frac{٩}{٢}$ س - ٥١

= $\frac{١٧}{٢}$ س - ٥١

، ∵ $\frac{ءم}{ءس}$ = ٠ ⇐ س = ٦ ، $\frac{ء^{٢}م}{ءس^{٢}}$ = $\frac{١٧}{٢}$ > ٠

∴ مجموع المساحتين أصغر ما يمكن

عندما س = ٦ سم

٧٥

$\frac{٥}{٨}$ س

$\frac{٣}{٨}$ س

$\frac{١}{٢}$ س $\frac{١}{٢}$ س

ص

س

المحيط = ٢ ص + س + ٢ × $\frac{٥}{٨}$ س

= ٢ ص + $\frac{٩}{٤}$ س

= ١٢٠ سم

∴ ص = ٦٠ - $\frac{٩}{٨}$ س

مساحة النافذة (م) = س ص + $\frac{١}{٢}$ (س) ($\frac{٣}{٨}$ س)

= س ص + $\frac{٣}{١٦}$ س^{٢}

∴ م = س (٦٠ - $\frac{٩}{٨}$ س) + $\frac{٣}{١٦}$ س^{٢}

= ٦٠ س - $\frac{١٥}{١٦}$ س^{٢}

مَ = ٦٠ - $\frac{١٥}{٨}$ س

مَ = ٠   عند س = ٣٢ سم

مً = - $\frac{١٥}{٨}$ < ٠   عظمى محلية عند س = ٣٢

بعدا المستطيل هما ٣٢ سم ٢٤ سم

٧٦

س   س

ص

بفرض أن بعدى المستطيل

= ص ، ٢ س

∴ نصف قطر (نصف الدائرة) = س

محيط النافذة = ٢ س + ٢ ص + $\frac{١}{٢}$ (٢ π س)

= ٢ ص + ٢ س + π س = ٦

∴ ص = ٣ - س - $\frac{π}{٢}$ س

مساحة النافذة = م = ٢ س × ص + $\frac{١}{٢}$ π س^{٢}

= ٢ س (٣ - س - $\frac{π}{٢}$ س)

+ $\frac{١}{٢}$ π س^{٢} = ٦ س - ٢ س^{٢}

- π س^{٢} + $\frac{١}{٢}$ π س^{٢}

= ٦ س - ٢ س^{٢} - $\frac{١}{٢}$ π س^{٢}

مَ = ٦ - ٤ س - π س

بوضع مَ = ٠   ∴ س = $\frac{٦}{٤ + π}$

مً = -٤ - π < ٠   قيمة عظمى

∴ نصف قطر (نصف الدائرة) التى يجعل المساحة

أكبر ما يمكن هو $\frac{٦}{٤ + π}$

٧٧

ص

٤

(س ، ص)

ب

أ

سَ   س

و   ٢

صَ

نفرض أن أ = (س ، ص)

تنتمى لمنحنى الدالة

ص = (س - ٢)^{٢}

∴ م (مساحة Δ أ ب و)

= $\frac{١}{٢}$ س ص = $\frac{١}{٢}$ س (س - ٢)^{٢}

= $\frac{١}{٢}$ س^{٣} - ٢ س^{٢} + ٢ س

∴ $\frac{ءم}{ءس}$ = $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} - ٤ س + ٢ وبوضع $\frac{ءم}{ءس}$ = ٠

∴ ٣ س^{٢} - ٨ س + ٤ = ٠

∴ (٣ س - ٢) (س - ٢) = ٠

∴ س = $\frac{٢}{٣}$ أ، س = ٢

$\frac{٢}{٣}$ ٢

س

م

مَ

صفر   صفر

∴ م تكون أكبر

مساحة عند س = $\frac{٢}{٣}$

ومنها ص = $\frac{١٦}{٩}$

∴ النقطة أ = ($\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١٦}{٩}$)

٧٨

ص

س = ٩

أ

θ

θ

ح

سَ   س

و   (١ ، ٠) ب   ء

صَ

من هندسة الشكل نجد أن :

أ ب = قتا θ

، ب ح = ٨ قا θ

، وبفرض ل = أ ب + ب ح

∴ ل = قتا θ + ٨ قا θ

، ∵ $\frac{ءل}{ءθ}$ = - قتا θ ظتا θ + ٨ قا θ ظا θ

وبوضع $\frac{ءل}{ءθ}$ = ٠

∴ - قتا θ ظتا θ + ٨ قا θ ظا θ = ٠

∴ ٨ $\frac{جا θ}{جتا^{٢} θ}$ = $\frac{جتا θ}{جا^{٢} θ}$

∴ ٨ جا^{٣} θ = جتا^{٣} θ   ∴ ظا^{٣} θ = $\frac{١}{٨}$

∴ ظا θ = $\frac{١}{٢}$ ∴ θ ≃ ٢٦° ٣٤َ

٢٦° ٣٤َ

θ

ل

لَ

صفر

∴ أ ب + ب ح أقل ما يمكن عندما ظا θ = $\frac{١}{٢}$

٧٩

بفرض أن ق (د ء) = ق (د ح) = θ

فى Δ أ ء هـ   أ ء = $\frac{١}{جا θ}$

فى Δ أ ب ح   أ ح = $\frac{٣\sqrt{٣}}{جتا θ}$

∵ هـ = أ ء + أ ح = $\frac{١}{جا θ}$ + $\frac{٣\sqrt{٣}}{جتا θ}$

∴ $\frac{ءهـ}{ءθ}$ = $\frac{- جتا θ}{جا^{٢} θ}$ + $\frac{٣\sqrt{٣} جا θ}{جتا^{٢} θ}$

وبوضع $\frac{ءهـ}{ءθ}$ = صفر   ∴ ٣$\sqrt{٣}$ جا^{٣} θ = جتا^{٣} θ

∴ ظا^{٣} θ = $\frac{١}{٣\sqrt{٣}}$ ∴ ظا θ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ θ = $\frac{π}{٦}$

$\frac{π}{٦}$

θ

هـ

هـَ

صفر

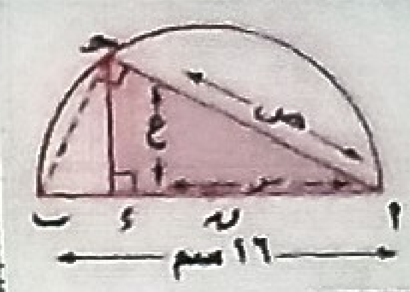
∴ أ ء + أ ح أصغر ما يمكن عندما θ = $\frac{π}{٦}$

∴ ظا (ح) = $\frac{أ ب}{ب ح}$ ⇐ $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{أ ب}{٣\sqrt{٣}}$

∴ أ ب = ٣

∴ هـ ب = ٣ - ١ = ٢ سم

٨٠



من هندسة الشكل نجد أن :

$\text{ص}^{٢} = \text{س} \times ١٦$ (إقليدس)

، $\text{ع} = \sqrt{\text{ص}^{٢} - \text{س}^{٢}} = \sqrt{١٦\text{س} - \text{س}^{٢}}$

∴ م (مساحة المثلث) = $\frac{١}{٢}$ س ع

$= \frac{١}{٢}\text{س}\sqrt{١٦\text{س} - \text{س}^{٢}}$

∴ $\text{م}' = \frac{١}{٢} \times \frac{١٦ - ٢\text{س}}{٢\sqrt{١٦\text{س} - \text{س}^{٢}}} + \frac{١}{٢}\sqrt{١٦\text{س} - \text{س}^{٢}}$

$= \frac{١٢\text{س} - \text{س}^{٢}}{\sqrt{١٦\text{س} - \text{س}^{٢}}}$

وبوضع م' = ٠ ∴ $١٢\text{س} - \text{س}^{٢} = ٠$

∴ س (١٢ − س) = ٠

∴ س = ٠ (مرفوض) أ، س = ١٢

، ∵ م' تتغير اشارتها حول س = ١٢

من الموجب إلى السالب

∴ توجد قيمة عظمى للمساحة

عند س = ١٢

ومنها ع = $٤\sqrt{٣}$

∴ م = $\frac{١}{٢} \times ١٢ \times ٤\sqrt{٣} = ٢٤\sqrt{٣}$ سم²

حل آخر :

فى Δ أ ب حـ :

∵ أ ب = ١٦ سم

∴ أ حـ = ١٦ حتا θ

، فى Δ أ حـ ء : ∴ أ ء = أ حـ حتا θ = ١٦ حتا² θ

∴ م (مساحة Δ أ حـ ء)

$= \frac{١}{٢} \times ١٦$ حتا θ × ١٦ حتا² θ × حا θ

= ١٢٨ حتا³ θ حا θ

∴ $\frac{dم}{dθ}$

= ١٢٨ [حتا³ θ × حتا θ + حا θ × ٣ حتا² θ × − حا θ]

= ١٢٨ [حتا⁴ θ − ٣ حتا² θ حا² θ]

∴ $\frac{dم}{dθ} = ٠$

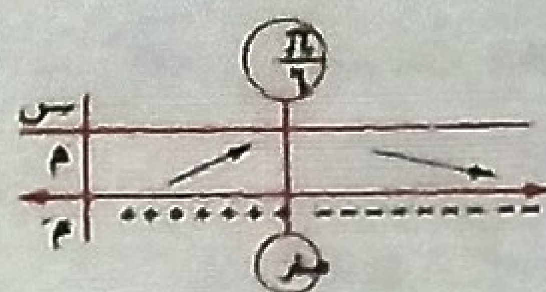
∴ حتا⁴ θ − ٣ حتا² θ حا² θ = ٠

∴ حتا θ = ٠ ومنها θ = $\frac{\pi}{٢}$ (مرفوض)

أ، حتا² θ = ٣ حا² θ ∴ ظا² θ = $\frac{١}{٣}$

∴ ظا θ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ومنها θ = $\frac{\pi}{٦}$

، ∵ إشارة م' تتغير



حول θ = $\frac{\pi}{٦}$

من الموجب إلى السالب

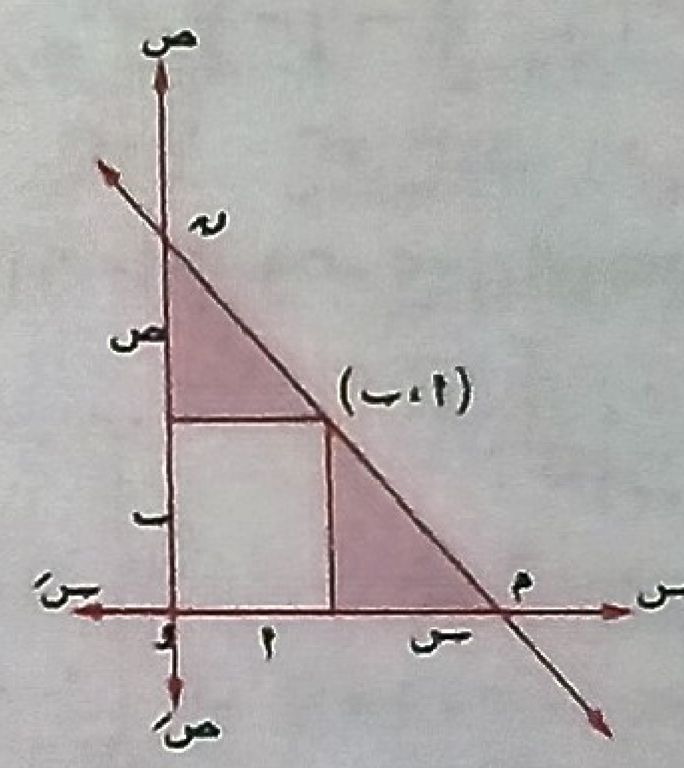
∴ توجد قيمة عظمى للمساحة عند θ = $\frac{\pi}{٦}$

، المساحة = ١٢٨ حتا³ $\frac{\pi}{٦}$ حا $\frac{\pi}{٦}$ = $٢٤\sqrt{٣}$ سم²

٨١

① (جـ)	② (جـ)	③ (أ)	④ (جـ)
⑤ (ب)	⑥ (جـ)	⑦ (أ)	⑧ (جـ)
⑨ (أ)	⑩ (د)	⑪ (ب)	⑫ (ب)
⑬ (ب)	⑭ (أ)	⑮ (أ)	⑯ (ب)
⑰ (جـ)	⑱ (أ)	⑲ (أ)	⑳ (جـ)
㉑ (ب)			

٨٢



من تشابه المثلثات $\frac{\text{س}}{\text{ب}} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}}$ ، ص = $\frac{\text{أب}}{\text{س}}$

مجموع الجزئين المقطوعين = ج = س + أ + ب + ص

∴ ج = س + أ + ب + $\frac{\text{أب}}{\text{س}}$ ∴ ج' = ١ − $\frac{\text{أب}}{\text{س}^{٢}}$

بوضع ج' = ٠ ∴ ١ − $\frac{\text{أب}}{\text{س}^{٢}}$ = ٠

∴ س = $\sqrt{\text{أب}}$

∴ ج'' = + $\frac{٢\text{أب}}{\text{س}^{٢}}$ > ٠ صغرى

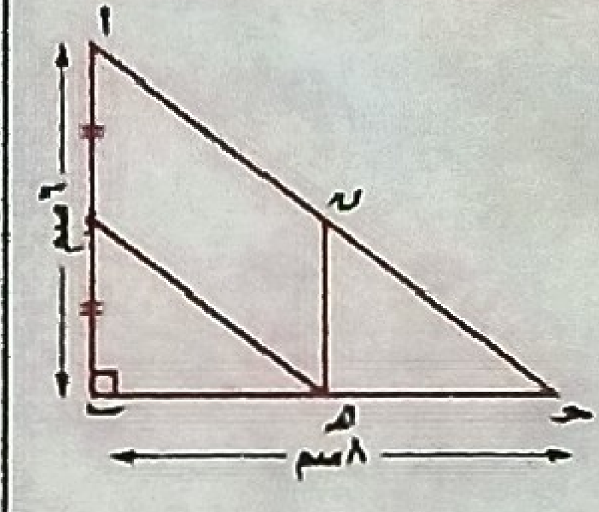
∴ أقل مجموع = س + ص + أ + ب

= $\sqrt{\text{أب}} + \frac{\text{أب}}{\sqrt{\text{أب}}}$ + أ + ب

= أ + $٢\sqrt{\text{أب}}$ + ب

= $(\sqrt{\text{أ}} + \sqrt{\text{ب}})^{٢}$

٨٣



نفرض أن :

م = ب هـ × هـ حـ

ويفرض أن :

ب هـ = س سم

∴ م = س (٨ − س) = ٨ س − س²

∴ م' = ٨ − ٢ س

م'' = −٢ < صفر (قيمة عظمى)

∴ م' = ٠ عندما س = ٤ سم

∴ هـ منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

، ∵ أ حـ = $\sqrt{(٦)^{٢} + (٨)^{٢}}$ = ١٠ سم

نفرض أن : ل = (أ ن)² + (ن حـ)²

ويفرض أن : أ ن = ص سم

∴ ل = ص² + (١٠ − ص)²

= ٢ ص² − ٢٠ ص + ١٠٠

∴ ل' = ٤ ص − ٢٠

، ل'' = ٤ > ٠ (قيمة صغرى)

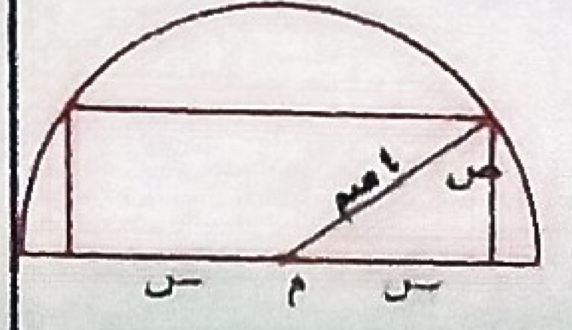
∴ ل' = ٠ عندما ص = ٥ ∴ ن منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$

∴ الشكل أ ء هـ ن متوازى أضلاع

∴ مساحة الشكل = طول القاعدة × الارتفاع

= ٣ × ٤ = ١٢ سم²

٨٤



نفرض أن بعدى المستطيل هما :

٢ س ، ص سم

∴ س² + ص² = (٤)²

∴ ص = $\sqrt{١٦ - \text{س}^{٢}}$

∴ المساحة (م) = ٢ س ص = ٢ س $\sqrt{١٦ - \text{س}^{٢}}$

∴ $\frac{dم}{dس}$ = ٢ س × $\frac{-٢\text{س}}{٢\sqrt{١٦ - \text{س}^{٢}}}$ + ٢ $\sqrt{١٦ - \text{س}^{٢}}$

= $\frac{-٢\text{س}^{٢} + ٢(١٦ - \text{س}^{٢})}{٢\sqrt{١٦ - \text{س}^{٢}}} = \frac{٣٢ - ٤\text{س}^{٢}}{\sqrt{١٦ - \text{س}^{٢}}}$

، عندما $\frac{dم}{dس}$ = ٠ ∴ ٣٢ − ٤ س² = ٠

∴ س² = ٨ ∴ س = $٢\sqrt{٢}$ سم

، ∴ ص = $٢\sqrt{٢}$

، ∵ $\frac{dم}{dس}$ > ٠ عندما س < $٢\sqrt{٢}$

، $\frac{dم}{dس}$ < ٠ عندما س > $٢\sqrt{٢}$

∴ عند س = $٢\sqrt{٢}$ تكون م أكبر ما يمكن

∴ بعدا المستطيل هما : $٤\sqrt{٢}$ ، $٢\sqrt{٢}$ سم

حل آخر :

∵ س = ٤ حتا θ

، ص = ٤ حا θ

∴ المساحة (م) = ٢ س ص

= ٣٢ حا θ حتا θ

= ١٦ حا ٢ θ

$\frac{dم}{dس}$ = ٣٢ حتا ٢ θ

، عندما $\frac{dص}{dس}$ = ٠ ∴ حتا ٢ θ = ٠

∴ ٢ θ = $\frac{\pi}{٢}$ ∴ θ = $\frac{\pi}{٤}$

، ∵ $\frac{d^{٢}م}{dس^{٢}}$ = −٦٤ حا ٢ θ ، عند θ = $\frac{\pi}{٤}$

$\therefore \frac{\text{ء}^2\text{م}}{\text{ءس}^2} < ٠$

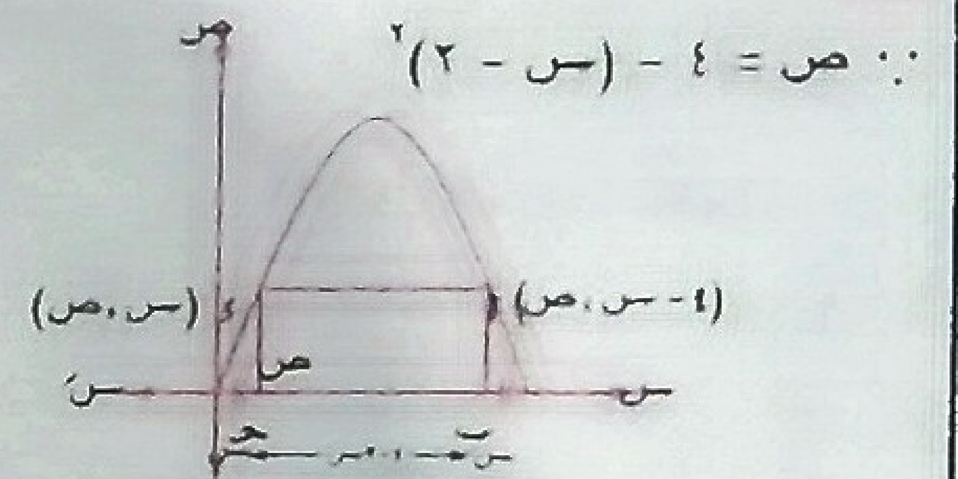
$\therefore$ عند $\theta = \frac{\pi}{٤}$ تكون م أكبر ما يمكن

$\therefore$ بعدا المستطيل هما ٨ جتا $\frac{\pi}{٤}$ ، ٤ جا $\frac{\pi}{٤}$

أى ٤ $\sqrt{٢}$ ، ٢ $\sqrt{٢}$ سم

٨٥

$\because$ ص = ٤ - (س - ٢)^2



$\because$ محيط المستطيل (ح) = ٨ - ٤ س + ٢ ص

= ٨ - ٤ س + ٢ [٤ - (س - ٢)^2]

= -٢ س^2 + ٤ س + ٨

$\therefore \frac{\text{ءح}}{\text{ءس}}$ = -٤ س + ٤

$\therefore \frac{\text{ءح}}{\text{ءس}}$ = ٠ عندما س = ١

، $\because \frac{\text{ء}^2\text{ح}}{\text{ءس}^2}$ = -٤ < ٠

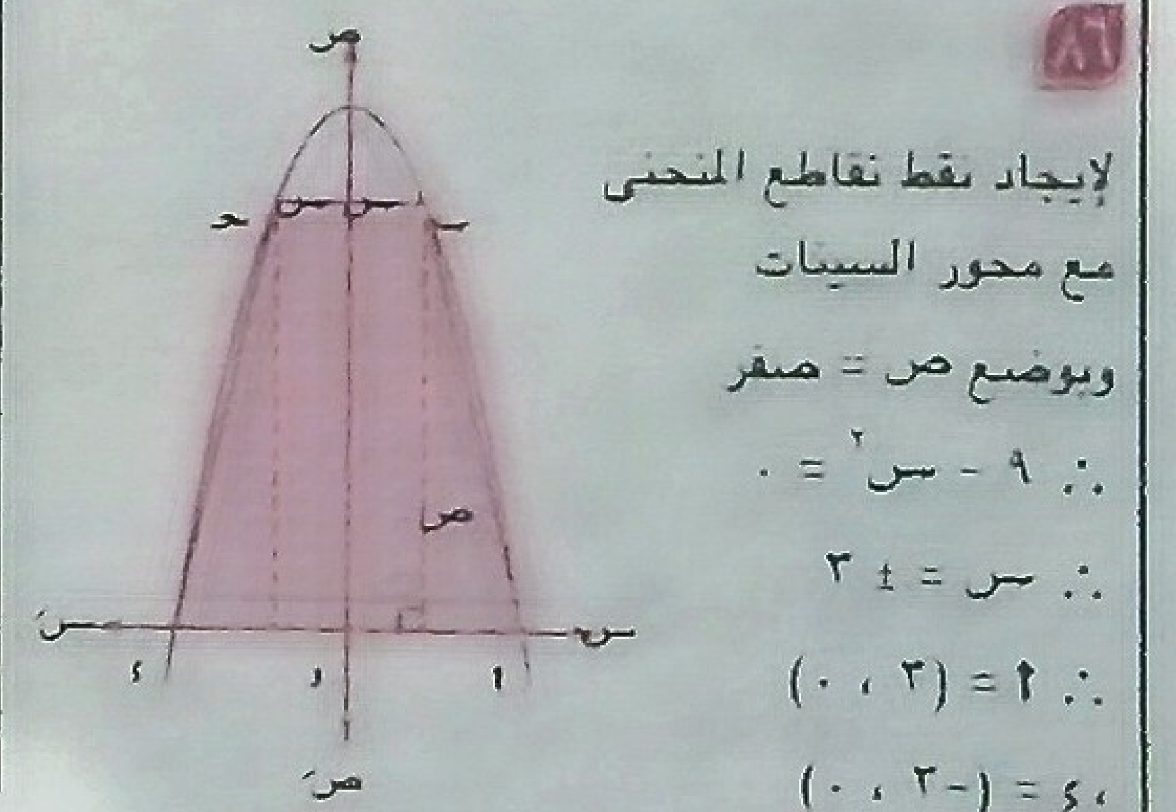
$\therefore$ يكون المحيط أكبر ما يمكن عندما س = ١

وعندئذ تكون ص = ٣

وعندئذ تكون المساحة = ص (٤ - ٢ س) = ٣ (٢)

= ٦ وحدة مساحة.

٨٦



لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات

وبوضع ص = صفر

$\therefore$ ٩ - س^2 = ٠

$\therefore$ س = ± ٣

$\therefore$ أ = (٣ ، ٠)

، ء = (-٣ ، ٠)

ويفرض أن

ب = (س ، ص)

$\therefore$ م (مساحة شبه المنحرف أ ب حـ ء)

= $\frac{\text{٦ + ٢ س}}{٢}$ × ص

= (٣ + س) (٩ - س^2)

= ٢٧ + ٩ س - ٣ س^2 - س^3

$\therefore \frac{\text{ءم}}{\text{ءس}}$ = ٩ - ٦ س - ٣ س^2 وبوضع $\frac{\text{ءم}}{\text{ءس}}$ = ٠

$\therefore$ س^2 + ٢ س - ٣ = ٠

$\therefore$ (س - ١) (س + ٣) = ٠

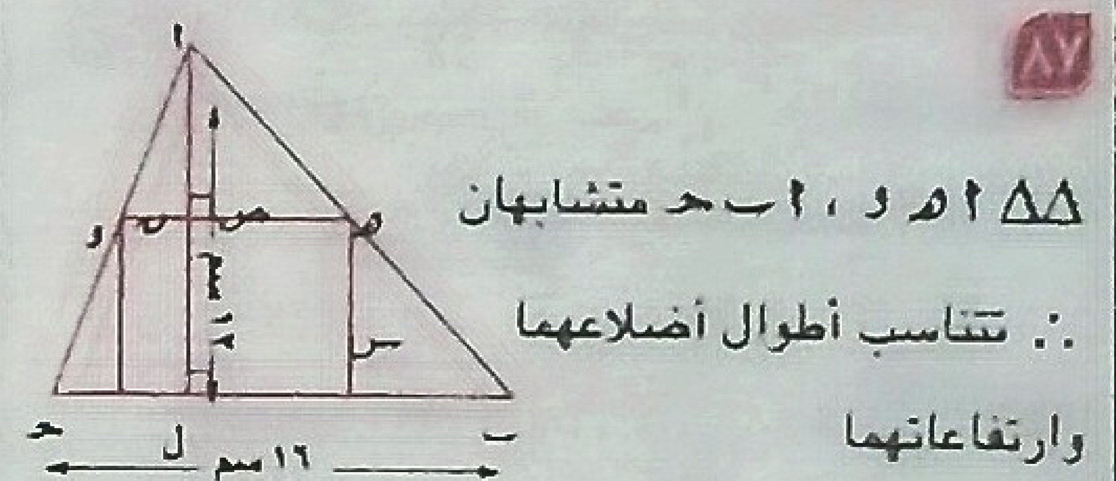
$\therefore$ س = ١ أ، س = -٣ (مرفوض)

، $\because \frac{\text{ء}^2\text{م}}{\text{ءس}^2}$ = -٦ - ٦ س

$\therefore \left[\frac{\text{ء}^2\text{م}}{\text{ءس}^2}\right]_{\text{س} = ١}$ = -١٢ < ٠

$\therefore$ المساحة قيمة عظمى ، م = ٣٢ وحدة مربعة.

٨٧



$\Delta\Delta$ أ هـ و ، أ ب حـ متشابهان

$\therefore$ تتناسب أطوال أضلاعهما وارتفاعاتهما

$\therefore \frac{\text{ص}}{١٦} = \frac{\text{أ ن}}{\text{أ ل}} = \frac{\text{١٢ - س}}{١٢}$

ص = ١٦ - $\frac{٤}{٣}$ س

مساحة المستطيل = م = س ص = ١٦ س - $\frac{٤}{٣}$ س^2

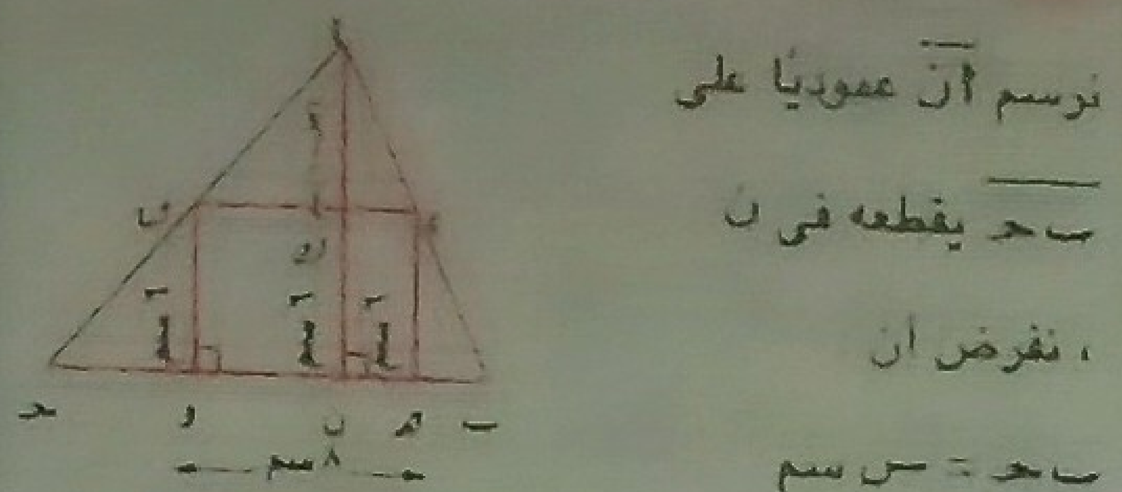
مَ = ١٦ - $\frac{٨}{٣}$ س

مَ = صفر عند س = ٦

مً = - $\frac{٨}{٣}$ < ٠ عظمى

$\therefore$ بعدا المستطيل ذى أكبر مساحة هى ٦ ، ٨ سم

٨٨



نرسم $\overline{\text{أن}}$ عموديًا على $\overline{\text{ب حـ}}$ يقطعه فى ن

، نفرض أن

ب حـ = س سم

، أ ن = ص سم

، مساحة المثلث = م سم^2

ومن هندسة الشكل نجد أن Δ أ ء ك ~ Δ أ ب ن

$\therefore \frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ص - ٦}}{\text{ص}}$ (١)

، Δ أ ء ن ~ Δ أ ب حـ

$\therefore \frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}} = \frac{٨}{\text{س}}$ (٢)

من (١) ، (٢)

$\therefore \frac{٨}{\text{س}} = \frac{\text{ص - ٦}}{\text{ص}}$ $\therefore$ س = $\frac{\text{٨ ص}}{\text{ص - ٦}}$

$\because$ م = $\frac{١}{٢}$ س × ص

= $\frac{١}{٢}$ ص × $\frac{\text{٨ ص}}{\text{ص - ٦}}$ = $\frac{\text{٤ ص}^2}{\text{ص - ٦}}$

$\therefore$ مَ = $\frac{\text{٨ ص (ص - ٦) - ٤ ص}^2}{\text{(ص - ٦)}^2}$

= $\frac{\text{٨ ص}^2\text{ - ٤٨ ص - ٤ ص}^2}{\text{(ص - ٦)}^2}$

= $\frac{\text{٤ ص}^2\text{ - ٤٨ ص}}{\text{(ص - ٦)}^2}$

$\therefore$ مَ = ٠ عند ص = ٠ أ، ص = ١٢

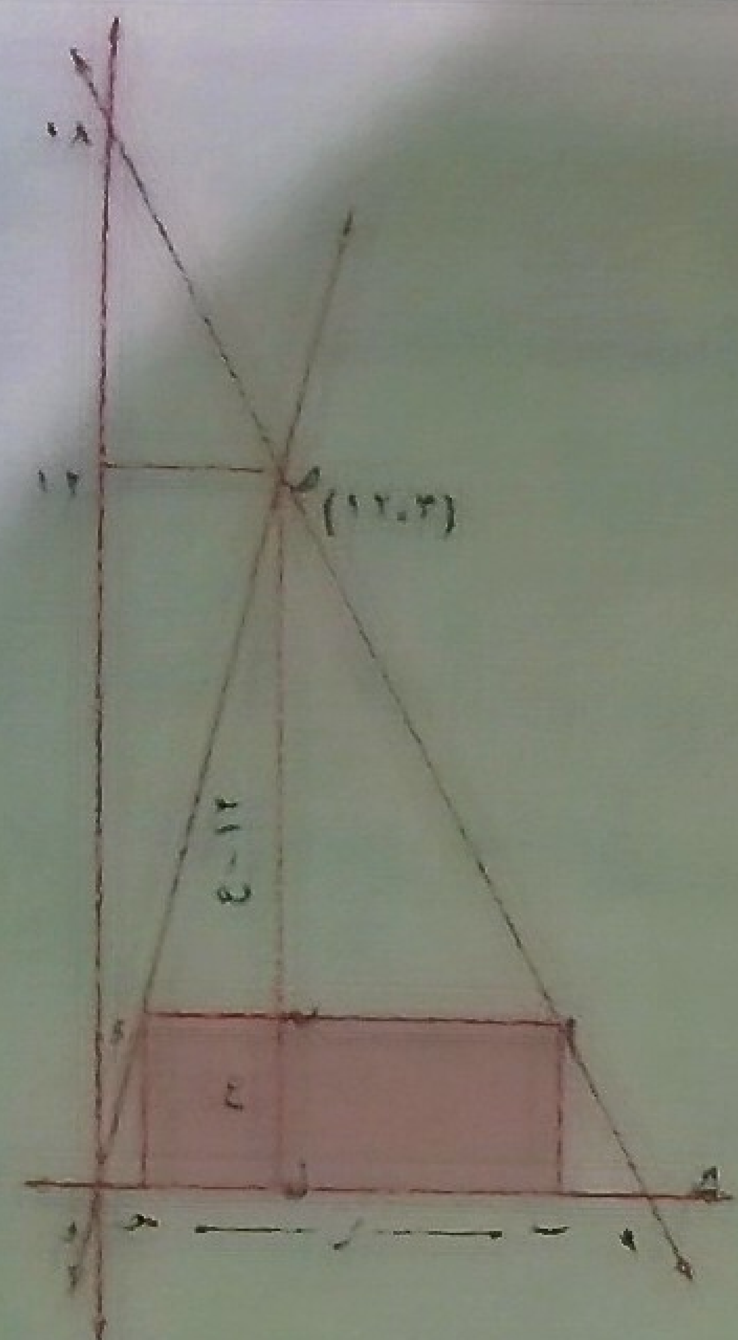
، $\because$ مً = $\frac{\text{(٨ ص - ٤٨) (ص - ٦)}^2\text{ - ٢ (ص - ٦) (٤ ص}^2\text{ - ٤٨ ص)}}{\text{(ص - ٦)}^4}$

= $\frac{\text{٨ (ص - ٦)}^2\text{ - ٨ ص (ص - ١٢)}}{\text{(ص - ٦)}^3}$

، عند ص = ١٢ تكون مً > ٠ (قيمة صغرى)

وعندها تكون أقل مساحة = $\frac{\text{٤ × ١٤٤}}{\text{١٢ - ٦}}$ = ٩٦ سم^2

٨٩



لإيجاد نقطة تقاطع المستقيمين نحل المعادلتين معًا.

ص = ٤ س ، ص = ١٨ - ٢ س

$\therefore$ ٤ س = ١٨ - ٢ س $\therefore$ ٦ س = ١٨

$\therefore$ س = ٣ ومنها ص = ١٢

$\therefore$ نقطة التقاطع هـ = (٣ ، ١٢)

، بوضع ١٨ - ٢ س = ٠

$\therefore$ س = ٩ $\therefore$ ك (٩ ، ٠)

ومن تشابه المثلثات نجد أن $\frac{\text{هـ أ}}{\text{هـ ك}} = \frac{\text{هـ ن}}{\text{هـ ل}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{ك و}}$

$\therefore \frac{\text{١٢ - ع}}{١٢} = \frac{\text{ر}}{٩}$ $\therefore$ ٤ ر = ٣٦ - ٣ ع

$\therefore$ ر = ٩ - $\frac{٣}{٤}$ ع

، $\because$ م (مساحة المستطيل) = ع ر

$\therefore$ م = ع (٩ - $\frac{٣}{٤}$ ع) $\therefore$ م = ٩ ع - $\frac{٣}{٤}$ ع^2

$\therefore$ مَ = ٩ - $\frac{٣}{٢}$ ع

وبوضع مَ = ٠ $\therefore$ ع = ٦ ومنها ر = ٤.٥

، $\because$ مً = $\frac{-٣}{٢}$ < ٠

$\therefore$ توجد قيمة عظمى لمساحة المستطيل

، م = ٤.٥ × ٦ = ٢٧ وحدة مربعة.

٩٠

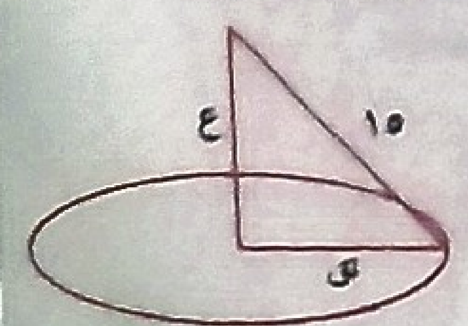
∵ نق² = ٢٢٥ − ع²

، ∵ حجم المخروط = ح = $\frac{1}{3}$ π نق² ع

∴ ح = $\frac{\pi}{3}$ ع (٢٢٥ − ع²)

= $\frac{\pi}{3}$ (٢٢٥ ع − ع³)

ح' = $\frac{\pi}{3}$ (٢٢٥ − ٣ ع²)



بوضع ح' = ٠ ∴ ع² = $\frac{225}{3}$ = ٧٥

∴ ع = ٥√٣

ح'' = $\frac{\pi}{3}$ (−٦ ع) كمية سالبة (قيمة عظمى)

∴ أكبر حجم (ح)$_{ع = ٥\sqrt{3}}$

= $\frac{\pi}{3}$ × ٥√٣ (٢٢٥ − (٥√٣)²) = ٢٥٠√٣ π سم³

٩١

نفرض أن إحداثي ب هي (س ، ٠)

∴ حـ هي (س ، $\frac{1}{2}$ س + ١)

، ء هي (س ، ١ + ٤ س − س²)

طول حـ ء (م) = |ص₂ − ص₁|

= (١ + ٤ س − س²) − ($\frac{1}{2}$ س + ١)

م = $\frac{7}{2}$ س − س²

م' = $\frac{7}{2}$ − ٢ س

بوضع م' = ٠ ∴ س = $\frac{7}{4}$

م'' = −٢ كمية سالبة قيمة عظمى

∴ إحداثي النقطة ب هي ($\frac{7}{4}$ ، ٠)

٩٢

توجد نقط التقاطع للمنحنيين بحل معادلتيهما

من المعادلة الثانية ص = $\frac{1}{4}$ س²

، في المعادلة الأولى ($\frac{1}{4}$ س²)² = ٤ س

س⁴ = ٦٤ س ∴ س = ٠ أو س = ٤

يتقاطع المنحنيان في نقطتين و (٠ ، ٠) ، حـ (٤ ، ٤)

النقطة أ إحداثيها السيني س = ٢

∴ إحداثيها هو أ (٢ ، ٢√٢)

م = $\frac{1}{2}$ |Δ| حيث Δ =
٠	٠	١
٢	٢√٢	١
س	$\frac{1}{4}$ س²	١

∴ م = $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ س² − ٢√٢ س | ، ٠ < س < ٤

∴ م = س√٢ − $\frac{1}{4}$ س² حيث س ∈]٠ ، ٤[

∴ $\frac{دم}{دس}$ = √٢ − $\frac{1}{2}$ س

بوضع $\frac{دم}{دس}$ = ٠ ∴ س = ٢√٢

، ∵ $\frac{د^2م}{دس^2}$ = −$\frac{1}{2}$ < ٠ (قيمة عظمى)

∴ عند س = ٢√٢ مثلث أ و ب له أكبر مساحة

∴ أكبر مساحة م = ٢√٢ × √٢ − $\frac{1}{4}$ × (٢√٢)²

= ٢ وحدة مربعة.

حل آخر :

المساحة = $\frac{1}{2}$ ‖ و أ × و ب ‖

= $\frac{1}{2}$ ‖ (٢ ، ٢√٢) × (س ، $\frac{1}{4}$ س²) ‖

= $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ س² − ٢√٢ س | حيث ٠ < س < ٤

ثم نكمل الحل ...

٩٣

س ص = ٢

∴ ص = $\frac{2}{س}$

المساحة المستخدمة م = (س − ٢ × ٠,٢١)
(ص − ٢ × ٠,١٤)

م = س ص − ٠,٢٨ س − ٠,٤٢ ص + ٠,١١٧٦

م = ٢ − ٠,٢٨ س − $\frac{0{,}84}{س}$ + ٠,١١٧٦

م' = −٠,٢٨ + $\frac{0{,}84}{س^2}$ = $\frac{0{,}84 - 0{,}28\,س^2}{س^2}$

بوضع م' = ٠ ∴ س² = ٣

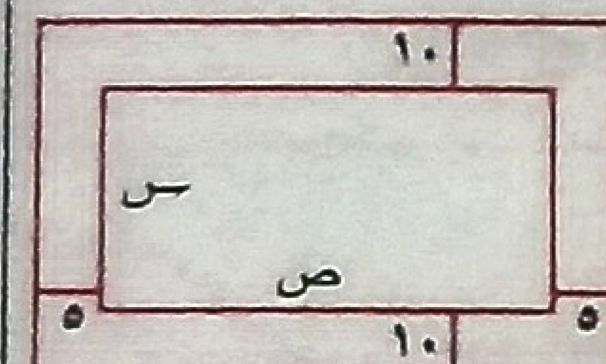
∴ س = √٣ ، ∵ م''$_{س = \sqrt{3}}$ < ٠

∴ س = √٣ تجعل م قيمة عظمى

∴ أبعاد اللوحة هي س = √٣ متر

ص = $\frac{2}{\sqrt{3}}$ = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ متر.

٩٤



مساحة الملصق

= س ص = ٨٠٠

∴ ص = $\frac{800}{س}$

مساحة المستطيل = (س + ٢٠) (ص + ١٠)

م = س ص + ١٠ س + ٢٠ ص + ٢٠٠

= ٨٠٠ + ١٠ س + ٢٠ × $\frac{800}{س}$ + ٢٠٠

م' = ١٠ − ١٦٠٠٠ س⁻² م'' = ٣٢٠٠٠ س⁻³

بوضع م' = ٠ ∴ س = ٤٠

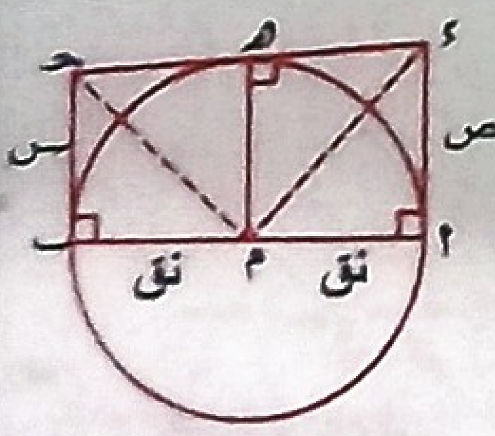
، ∵ م''$_{س = 40}$ > ٠

∴ س = ٤٠ تجعل المساحة أصغر ما يمكن

∴ بعدا المستطيل = ٤٠ + ٢٠ = ٦٠ سم

، $\frac{800}{40}$ + ١٠ = ٣٠ سم

٩٥



من تشابه ΔΔ أ م ء ، حـ ب م

$\frac{ص}{نق}$ = $\frac{نق}{س}$ ص = $\frac{نق^2}{س}$

مساحة شبه المنحرف (م)

م = $\frac{1}{2}$ (س + ص) × ٢ نق

= نق س + نق ص = نق س + $\frac{نق^3}{س}$

م' = نق − $\frac{نق^3}{س^2}$

بوضع م' = ٠ ∴ نق − $\frac{نق^3}{س^2}$ = ٠

∴ س = نق م'' = $\frac{2\,نق^3}{س^3}$

∴ م''$_{س = نق}$ > ٠

∴ م أصغر ما يمكن

م = $\frac{1}{2}$ (نق + $\frac{نق^2}{نق}$) × ٢ نق = ٢ نق²

٩٦

من تشابه المثلثين أ ء و ، أ ب حـ

$\frac{س}{2ل}$ = $\frac{ع}{\sqrt{3}\,ل}$

∴ ع = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ س

م (مساحة المثلث ء هـ و)

= $\frac{1}{2}$ س ×

(√٣ ل − $\frac{\sqrt{3}}{2}$ س) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل س − $\frac{\sqrt{3}}{2}$ س²

م' = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل − $\frac{\sqrt{3}}{2}$ س

بوضع م' = ٠ ∴ س = ل

م'' = −$\frac{\sqrt{3}}{2}$ < ٠ قيمة عظمى

أكبر مساحة = م$_{س = ل}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل (ل) − $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ل²

= $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ل²

∵ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (٢ ل)² = √٣ ل²

∴ م = $\frac{1}{4}$ مساحة Δ أ ب حـ

٩٧

مساحة المستطيل الخارجي (م)

= (أ جتا هـ + ب جا هـ) × (ب جتا هـ + أ جا هـ)

= أ ب جتا^{٢} هـ + أ^{٢} جا هـ جتا هـ + ب^{٢} جا هـ جتا هـ + أ ب جا^{٢} هـ

= جا هـ جتا هـ (أ^{٢} + ب^{٢}) + أ ب (جا^{٢} هـ + جتا^{٢} هـ)

∴ م = جا هـ جتا هـ (أ^{٢} + ب^{٢}) + أ ب

∴ م = (أ^{٢} + ب^{٢}) ($\frac{١}{٢}$ جا ٢ هـ) + أ ب

∴ $\frac{\text{ءم}}{\text{ءهـ}}$ = $\frac{١}{٢}$ (أ^{٢} + ب^{٢}) × ٢ جتا ٢ هـ

وبوضع $\frac{\text{ءم}}{\text{ءهـ}}$ = صفر

∴ (أ^{٢} + ب^{٢}) جتا ٢ هـ = صفر

∴ جتا ٢ هـ = صفر ∴ ٢ هـ = ٩٠°

∴ ق (∠ هـ) = ٤٥°

، ∵ $\frac{\text{ء}^{٢}\text{م}}{\text{ءهـ}^{٢}}$ = -٢ جا ٢ هـ (أ^{٢} + ب^{٢})

، عند ق (∠ هـ) = ٤٥°

فإن : $\frac{\text{ء}^{٢}\text{م}}{\text{ءهـ}^{٢}}$ = -٢ (أ^{٢} + ب^{٢}) < صفر

∴ عند ق (∠ هـ) = ٤٥°

فإن المساحة تكون أكبر ما يمكن

∴ م = $\frac{١}{٢}$ (أ^{٢} + ب^{٢}) جا ٩٠° + أ ب

∴ ٢ م = أ^{٢} + ب^{٢} + ٢ أ ب = (أ + ب)^{٢}

∴ م = $\frac{(\text{أ} + \text{ب})^{٢}}{٢}$ وحدة مربعة.

٩٨

من Δ ل ب م

جتا ٢ هـ = $\frac{٨ - \text{س}}{\text{س}}$ (١)

من Δ أ ل ن

جا هـ = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$

، ∵ جتا ٢ هـ = ١ - ٢ جا^{٢} هـ = ١ - ٢ $(\frac{\text{س}}{\text{ص}})^{٢}$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\frac{٨ - \text{س}}{\text{س}}$ = ١ [illegible]

∴ ص^{٢} = $\frac{\text{س}^{٣}}{\text{س} - ٤}$ بالاشتقاق بال[illegible]

٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{(\text{س} - ٤)(٣ \text{س}^{٢}) - \text{س}^{٣} (١)}{(\text{س} - ٤)^{٢}}$

= $\frac{٢ \text{س}^{٣} - ١٢ \text{س}^{٢}}{(\text{س} - ٤)^{٢}}$

بوضع $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠ ∴ س = ٠ (مرفوض)

أو س = ٦ ، ∵ $(\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}})_{\text{س} = ٦}$ > ٠

∴ س = ٦ تجعل ص أقل ما يمكن.

٩٩

بفرض أن :

ق (∠ أ حـ ب) = θ

∴ θ = ق (∠ أ حـ و) - ق (∠ ب حـ و)

∴ ظا θ = $\frac{\text{ظا} (\angle \text{أ حـ و}) - \text{ظا} (\angle \text{ب حـ و})}{١ + \text{ظا} (\angle \text{أ حـ و}) \times \text{ظا} (\angle \text{ب حـ و})}$

∴ ظا θ = $\frac{\frac{٩}{\text{س}} - \frac{٤}{\text{س}}}{١ + \frac{٩}{\text{س}} \times \frac{٤}{\text{س}}}$

∴ ظا θ = $\frac{٩ \text{س} - ٤ \text{س}}{\text{س}^{٢} + ٣٦}$ = $\frac{٥ \text{س}}{\text{س}^{٢} + ٣٦}$

∴ قا^{٢} θ × $\frac{\text{ء}\theta}{\text{ءس}}$ = $\frac{٥ (\text{س}^{٢} + ٣٦) - ٢ \text{س} \times ٥ \text{س}}{(\text{س}^{٢} + ٣٦)^{٢}}$

∴ قا^{٢} θ × $\frac{\text{ء}\theta}{\text{ءس}}$ = $\frac{-٥ \text{س}^{٢} + ١٨٠}{(\text{س}^{٢} + ٣٦)^{٢}}$

بوضع $\frac{\text{ء}\theta}{\text{ءس}}$ = ٠ ∴ -٥ س^{٢} + ١٨٠ = ٠

∴ س = ± ٦ ، ∵ حـ ∈ $\overrightarrow{\text{و س}}$

∴ س = ٦ ∴ حـ (٦ ، ٠)

∴ θ أكبر ما يمكن عندما س = ٦

∴ إحداثي حـ لتكون θ أكبر ما يمكن هي (٦ ، ٠)

١٠٠

∵ المثلث أ ب حـ متساوي الساقين

∴ $\overline{\text{أء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$ وينصفه

∴ م ∈ $\overline{\text{أء}}$

، بفرض م ء = س سم

∴ أء = (١٥ + س) سم

∴ ب ء = $\sqrt{٢٢٥ - \text{س}^{٢}}$ سم

∴ مساحة Δ أ ب حـ (م)

= $\frac{١}{٢}$ ب حـ × أء = ب ء × أء

= $\sqrt{٢٢٥ - \text{س}^{٢}}$ × (١٥ + س)

∴ $\frac{\text{ءم}}{\text{ءس}}$ = $\sqrt{٢٢٥ - \text{س}^{٢}}$ - (١٥ + س) × $\frac{٢ \text{س}}{٢ \sqrt{٢٢٥ - \text{س}^{٢}}}$

= $\frac{٢٢٥ - \text{س}^{٢} - \text{س}^{٢} - ١٥ \text{س}}{\sqrt{٢٢٥ - \text{س}^{٢}}}$

، وبوضع $\frac{\text{ءم}}{\text{ءس}}$ = ٠

∴ ٢ س^{٢} + ١٥ س - ٢٢٥ = ٠

∴ (٢ س - ١٥) (س + ١٥) = ٠

∴ س = $\frac{١٥}{٢}$ أ، س = -١٥ (مرفوض)

∴ إشارة مَ تتغير على جانبي س = $\frac{١٥}{٢}$

من الموجب

إلى السالب

∴ مساحة المثلث تكون أكبر ما يمكن

∴ مساحة المثلث = $\sqrt{٢٢٥ - (\frac{١٥}{٢})^{٢}}$ × (١٥ + $\frac{١٥}{٢}$)

= $\frac{٦٧٥}{٤}$ $\sqrt{٣}$ سم^{٢} = ٢٩٢,٢٨ سم^{٢}

حل آخر :

∵ Δ أ م ب ≡ Δ أ م حـ

∴ ق (∠ أ م ب)

= ق (∠ أ م حـ) = هـ

∴ ق (∠ ب م حـ) = (٣٦٠° - ٢ هـ)

∴ م = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} جا هـ + $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} جا هـ

+ $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} جا (٣٦٠° - ٢ هـ)

= نق^{٢} جا هـ - $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} جا ٢ هـ

∴ $\frac{\text{ءم}}{\text{ءهـ}}$ = نق^{٢} جتا هـ - $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} × ٢ جتا ٢ هـ

= نق^{٢} (جتا هـ - جتا ٢ هـ)

، ∵ $\frac{\text{ءم}}{\text{ءهـ}}$ = ٠ ∴ جتا هـ - جتا ٢ هـ = ٠

∴ جتا هـ - (٢ جتا^{٢} هـ - ١) = ٠

∴ ٢ جتا^{٢} هـ - جتا هـ - ١ = ٠

∴ (٢ جتا هـ + ١) (جتا هـ - ١) = ٠

∴ جتا هـ = ١ ∴ هـ = صفر (مرفوض)

أ، جتا هـ = -$\frac{١}{٢}$ ∴ هـ = ١٢٠° = $\frac{٢ \text{ط}}{٣}$

∴ Δ أ ب حـ متساوي الأضلاع

، ∵ $\frac{\text{ء}^{٢}\text{م}}{\text{ءهـ}^{٢}}$ = -نق^{٢} جا هـ + ٢ نق^{٢} جا ٢ هـ

∴ مً $(\frac{٢ \text{ط}}{٣})$ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ نق^{٢} + ٢ نق^{٢} $(\frac{-\sqrt{٣}}{٢})$

= $\frac{-٣ \sqrt{٣}}{٢}$ نق^{٢} < صفر

∴ مساحة المثلث أكبر ما يمكن

، مساحة المثلث = $\text{نق}^{٢}$ جا ١٢٠ − $\frac{١}{٢}$ $\text{نق}^{٢}$ جا ٢٤٠

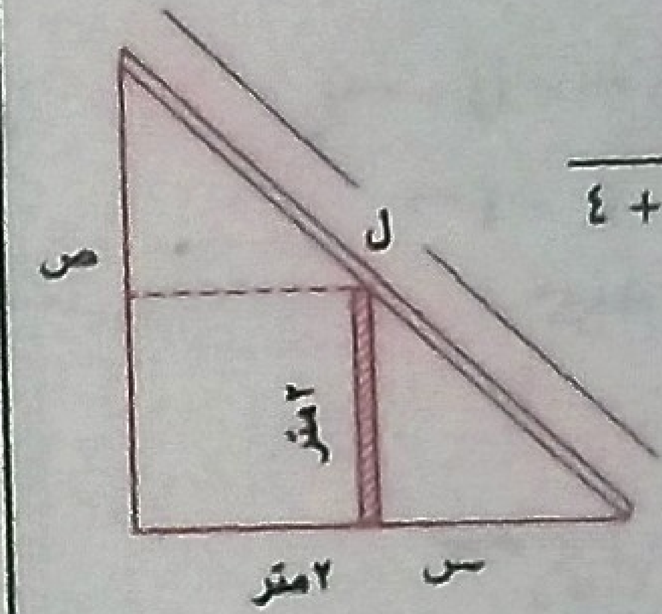
$= \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,\text{نق}^{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٤}\,\text{نق}^{٢} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٤}\,\text{نق}^{٢}$

وعندما نق = ١٥

∴ مساحة المثلث $= \frac{٣\sqrt{٣}}{٤} \times (١٥)^{٢} = \frac{٦٧٥\sqrt{٣}}{٤}$ $\text{سم}^{٢}$

$= ٢٩٢{,}٢٨$ $\text{سم}^{٢}$

١٠١



من الشكل :

$\text{ل} = \sqrt{\text{س}^{٢} + ٤} + \sqrt{\text{ص}^{٢} + ٤}$

من التشابه

$\frac{\text{س}}{٢} = \frac{٢}{\text{ص}}$

∴ $\text{ص} = \frac{٤}{\text{س}}$

∴ $\text{ل} = \sqrt{\text{س}^{٢} + ٤} + \sqrt{\left(\frac{٤}{\text{س}}\right)^{٢} + ٤}$

$= \sqrt{\text{س}^{٢} + ٤} + \frac{٢}{\text{س}}\sqrt{٤ + \text{س}^{٢}}$

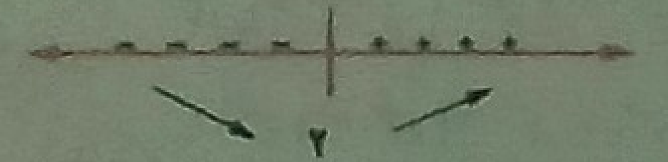
$= \sqrt{\text{س}^{٢} + ٤} \times \left(١ + \frac{٢}{\text{س}}\right)$

$\text{ل}' = \frac{-٢}{\text{س}^{٢}}\sqrt{\text{س}^{٢} + ٤} + \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٤}}\left(١ + \frac{٢}{\text{س}}\right)$

$= \frac{-٢(\text{س}^{٢} + ٤) + \text{س}(\text{س}^{٢} + ٢\text{س})}{\text{س}^{٢}\sqrt{\text{س}^{٢} + ٤}}$

$= \frac{-٢\text{س}^{٢} - ٨ + \text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}\sqrt{\text{س}^{٢} + ٤}} = \frac{\text{س}^{٣} - ٨}{\text{س}^{٢}\sqrt{\text{س}^{٢} + ٤}}$

$\text{ل}' = ٠$



∴ س = ٢ قيمة صغرى

أقل طول للسلم $\text{ل}_{\text{عند س} = ٢} = \sqrt{٤ + ٤} \times \left(١ + \frac{٢}{٢}\right)$

$= ٤\sqrt{٢}$ متر.

١٠٢

$\text{ص}_{١} = ١٢ - \text{س}^{٢}$ صفر $< \text{س} < ٢\sqrt{٣}$

$\text{ص}_{٢} = \text{س}^{٢} - ١٢$ صفر $< \text{س} < ٢\sqrt{٣}$

∴ بعدا المستطيل = ٢س أفقيًا

رأسيًا $= \text{ص}_{١} - \text{ص}_{٢} = (١٢ - \text{س}^{٢}) - (\text{س}^{٢} - ١٢)$

$= ١٢ - \text{س}^{٢} + ١٢ - \text{س}^{٢}$

$= ٢٤ - ٢\text{س}^{٢}$

∴ مساحة المستطيل $= \text{م} = ٢\text{س} \times (٢٤ - ٢\text{س}^{٢})$

$= ٤٨\text{س} - ٤\text{س}^{٣}$

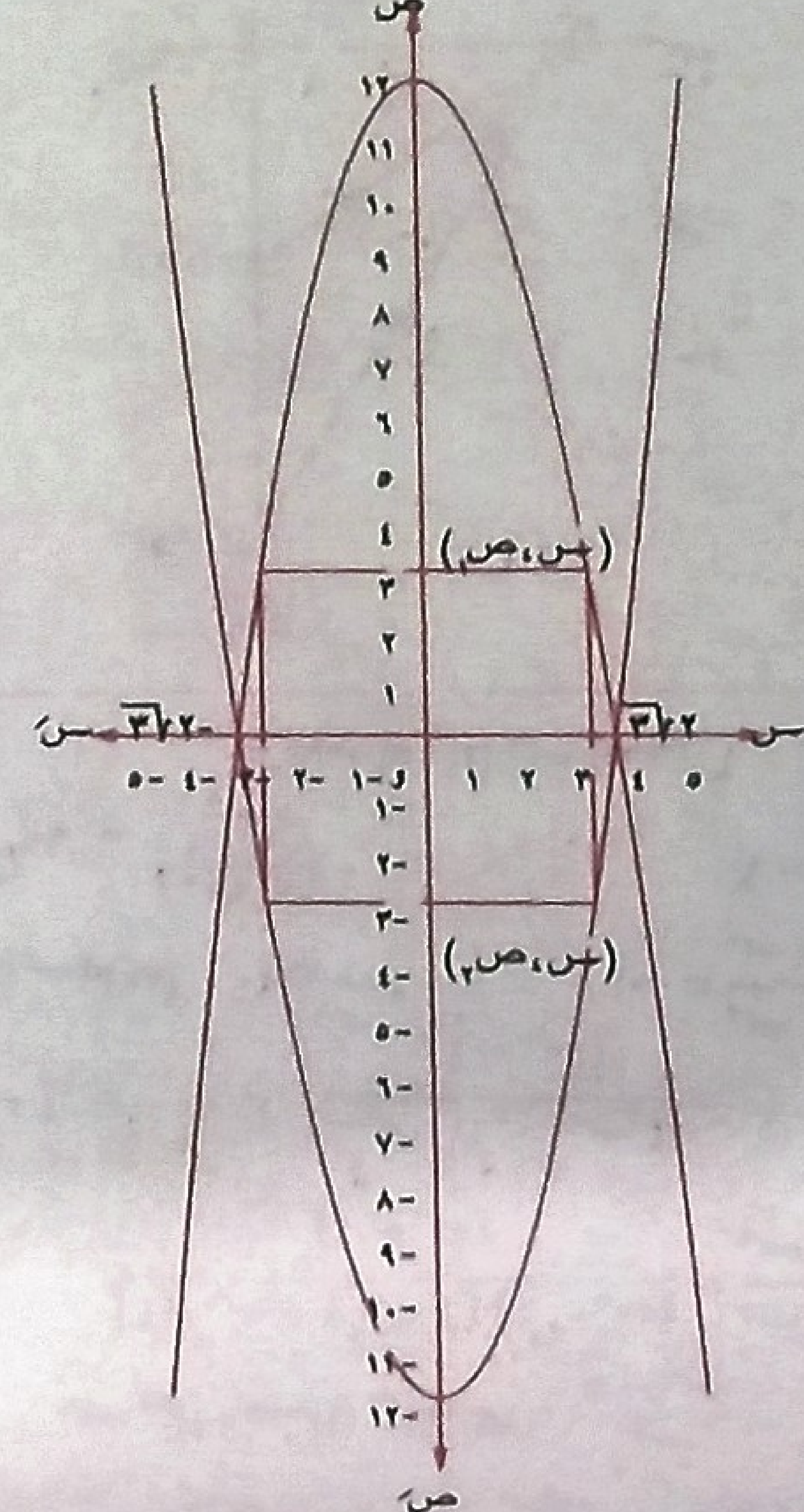
$\text{م}' = ٤٨ - ١٢\text{س}^{٢}$

بوضع $\text{م}' = ٠$ $\text{س}^{٢} = ٤$ ∴ س = ٢

$\text{م}'' = -٢٤\text{س}$

∴ $\text{م}''_{\text{س} = ٢} < ٠$ ∴ عند س = ٢ تكون لـ م قيمة عظمى

∴ أكبر مساحة للمستطيل $\text{م} = ٤٨ \times ٢ - ٤ \times ٢^{٣} = ٦٤$



١٠٣

حجم المكعب $= (\sqrt{٢}\,\text{ل})^{٢} = ٢\,\text{ل}^{٢}$

بفرض أن ارتفاع المنشور ع

، طول ضلع قاعدة المنشور = س حجم المنشور

$= \left(\frac{\sqrt{٣}}{٤}\text{س}^{٢}\right) \times \text{ع}$

∵ $\frac{\sqrt{٣}}{٤}\text{س}^{٢}\,\text{ع} = ٢\,\text{ل}^{٢}$ ∴ $\text{ع} = \frac{٨\,\text{ل}^{٢}}{\sqrt{٣}\,\text{س}^{٢}}$

مساحة سطح المنشور = المساحة الجانبية + مساحتى القاعدتين

$\text{م} = ٣\text{س} \times \text{ع} + \frac{\sqrt{٣}}{٤}\text{س}^{٢} \times ٢$

$\text{م} = ٣\text{س} \times \frac{٨\,\text{ل}^{٢}}{\sqrt{٣}\,\text{س}^{٢}} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{س}^{٢}$

$= ٨\sqrt{٣}\,\text{ل}^{٢}\,\text{س}^{-١} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{س}^{٢}$

∴ $\text{م}' = -٨\sqrt{٣}\,\text{ل}^{٢}\,\text{س}^{-٢} + \sqrt{٣}\,\text{س}$

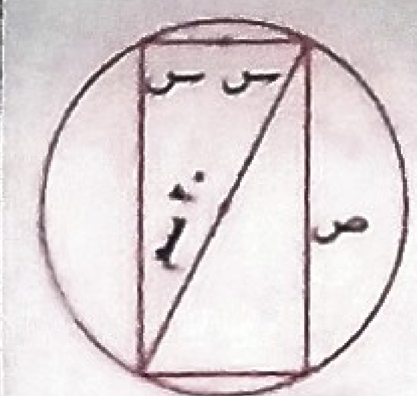
، $\text{م}'' = ١٦\sqrt{٣}\,\text{ل}^{٢}\,\text{س}^{-٣} + \sqrt{٣}$

$\text{م}' = ٠$ ∴ س = ٢ ل وحدة طول

$\text{م}''_{\text{س} = ٢\text{ل}} > ٠$

∴ م لها قيمة صغرى عند س = ٢ ل

١٠٤



نفرض أن ارتفاع الأسطوانة = ص

ونصف قطر الأسطوانة = س

$(٢\text{س})^{٢} + \text{ص}^{٢} = (٢٠)^{٢}$

$٤\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٤٠٠$

∴ $\text{س} = \sqrt{١٠٠ - \frac{١}{٤}\text{ص}^{٢}}$

$\text{م} = ٢\pi\,\text{س} \times \text{ص} = ٢\pi\,\text{ص} \times \sqrt{١٠٠ - \frac{١}{٤}\text{ص}^{٢}}$

$\text{م}' = ٢\pi\,\text{ص} \times \frac{-\frac{١}{٤} \times ٢\,\text{ص}}{٢\sqrt{١٠٠ - \frac{١}{٤}\text{ص}^{٢}}}$

$+ ٢\pi\sqrt{١٠٠ - \frac{١}{٤}\text{ص}^{٢}}$

$= \frac{-\frac{١}{٢}\pi\,\text{ص}^{٢} + ٢\pi\left(١٠٠ - \frac{١}{٤}\text{ص}^{٢}\right)}{\sqrt{١٠٠ - \frac{١}{٤}\text{ص}^{٢}}}$

$= \frac{-\pi\,\text{ص}^{٢} + ٢٠٠\pi}{\sqrt{١٠٠ - \frac{١}{٤}\text{ص}^{٢}}}$

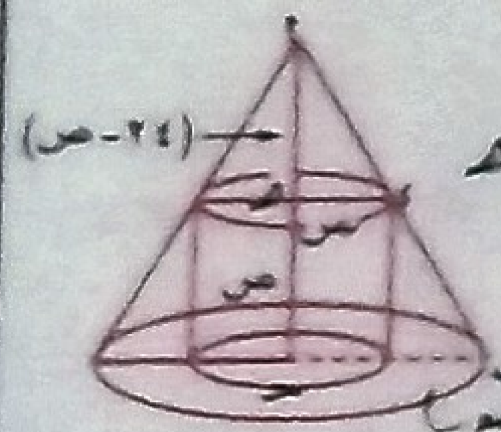
$\text{م}' = ٠$

∴ $\text{ص} = ١٠\sqrt{٢}$

$\text{م}''_{\text{ص} = ١٠\sqrt{٢}} < ٠$

∴ م أكبر ما يمكن عندما يكون الارتفاع $= ١٠\sqrt{٢}$

١٠٥



من التشابه ΔΔ أ ب جـ ، أ ء هـ

$\frac{\text{س}}{١٠} = \frac{٢٤ - \text{ص}}{٢٤}$

∴ $\text{ص} = -٢{,}٤\,\text{س} + ٢٤$ ، ١٠سم

حجم الأسطوانة $\text{ح} = \pi\,\text{نق}^{٢}\,\text{ع} = \pi\,\text{س}^{٢} \times \text{ص}$

$= \pi\,\text{س}^{٢}\,(-٢{,}٤\,\text{س} + ٢٤)$

$= -٢{,}٤\,\pi\,\text{س}^{٣} + ٢٤\,\pi\,\text{س}^{٢}$

$\text{ح}' = -٧{,}٢\,\pi\,\text{س}^{٢} + ٤٨\,\pi\,\text{س}$

$\text{ح}' = ٠$

∴ $\text{س} = \frac{٢٠}{٣}$ سم

$\text{ح}'' = -١٤{,}٤\,\pi\,\text{س} + ٤٨\,\pi$

$\text{ح}''_{\text{س} = \frac{٢٠}{٣}} < ٠$

∴ ح أكبر ما يمكن

∴ $\text{ص} = -٢{,}٤\left(\frac{٢٠}{٣}\right) + ٢٤ = ٨$ سم

١٠٦



$\text{س}^2 + \text{ص}^2 = \text{نق}^2$

$\text{ص} = \sqrt{\text{نق}^2 - \text{س}^2}$

$\text{حجم المخروط} = \frac{1}{3}\pi\,\text{ص}^2 \times (\text{نق} + \text{س})$

$ع = \frac{1}{3}\pi(\text{نق}^2 - \text{س}^2)(\text{نق} + \text{س})$

$= \frac{1}{3}\pi(\text{نق}^3 + \text{نق}^2\,\text{س} - \text{نق}\,\text{س}^2 - \text{س}^3)$

$\therefore ع' = \frac{1}{3}\pi(\text{نق}^2 - 2\,\text{نق}\,\text{س} - 3\,\text{س}^2)$

$ع' = 0 \Leftarrow (\text{نق} + \text{س})(\text{نق} - 3\,\text{س}) = 0$

$\therefore \text{س} = -\text{نق}$ (مرفوض) ، $\text{س} = \frac{1}{3}\,\text{نق}$

$ع'' = \frac{1}{3}\pi(-2\,\text{نق} - 6\,\text{س})$

$ع''_{\text{س} = \frac{1}{3}\text{نق}} = \frac{1}{3}\pi(-2\,\text{نق} - 2\,\text{نق}) < 0$ (قيمة عظمى)

$ع_{\text{س} = \frac{1}{3}\text{نق}} = \frac{1}{3}\pi(\text{نق}^3 + \frac{1}{3}\text{نق}^3 - \frac{1}{9}\text{نق}^3 - \frac{1}{27}\text{نق}^3)$

$= \frac{32}{81}\pi\,\text{نق}^3$

$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3}\pi\,\text{نق}^3$

$\text{النسبة بينهما} = \frac{ع_{\text{المخروط}}}{ع_{\text{الكرة}}} = \frac{\frac{32}{81}\pi\,\text{نق}^3}{\frac{4}{3}\pi\,\text{نق}^3} = \frac{8}{27}$

١٠٧



$ن_1 (\text{المسافة حء}) = \frac{\sqrt{25 + \text{س}^2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{25 + \text{س}^2}$

$ن_2 (\text{المسافة ءب}) = \frac{6 - \text{س}}{4} = \frac{1}{4}(6 - \text{س})$

$ن = ن_1 + ن_2 = \frac{1}{2}\sqrt{25 + \text{س}^2} + \frac{1}{4}(6 - \text{س})$

$ن' = \frac{1}{2} \times \frac{2\,\text{س}}{2\sqrt{25 + \text{س}^2}} + \frac{1}{4} \times -1$

$= \frac{\text{س}}{2\sqrt{25 + \text{س}^2}} - \frac{1}{4}$

$ن' = 0$ فإن $\frac{\text{س}}{2\sqrt{25 + \text{س}^2}} = \frac{1}{4}$

$\therefore 2\,\text{س} = \sqrt{25 + \text{س}^2}$ بالتربيع

$4\,\text{س}^2 = 25 + \text{س}^2 \qquad \therefore 3\,\text{س}^2 = 25$

$\text{س} = \frac{5\sqrt{3}}{3} = 2.9$ متر

$ن''_{\text{س} = \frac{5\sqrt{3}}{3}} > 0$ ∴ قيمة صغرى عند $\text{س} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

∴ يجب على الرجل أن يرسو على مسافة $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ متر من نقطة أ

إجابات الوحدة 4

التكامل المحدد وتطبيقاته



1

① $\int 5\, ءس = 5س + ث$

② $\int (س - 3)(2س + 7)\, ءس$

$= \int (2س^2 + س - 21)\, ءس$

$= \frac{2}{3}س^3 + \frac{1}{2}س^2 - 21س + ث$

③ $\int \left(س^3 + 5س + \frac{1}{س^2}\right) ءس$

$= \int (س^3 + 5س + س^{-2})\, ءس$

$= \frac{1}{4}س^4 + \frac{5}{2}س^2 - س^{-1} + ث$

④ $\int \frac{12س^4 + 3}{س^2}\, ءس$

$= \int (12س^2 + 3س^{-2})\, ءس$

$= 4س^3 - 3س^{-1} + ث$

⑤ $\int \left(س^{\frac{1}{2}} + س^{-\frac{1}{2}} + س^{-\frac{3}{2}}\right) ءس$

$= \frac{2}{3}س^{\frac{3}{2}} + 2س^{\frac{1}{2}} - 2س^{-\frac{1}{2}} + ث$

⑥ $\int \frac{س + 1}{\sqrt[3]{س}}\, ءس = \int \left(س^{\frac{2}{3}} + س^{-\frac{1}{3}}\right) ءس$

$= \frac{3}{5}س^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{2}س^{\frac{2}{3}} + ث$

⑦ $\int (2س + 3)^3\, ءس = \frac{(2س + 3)^4}{2 \times 4} + ث$

$= \frac{1}{8}(2س + 3)^4 + ث$

⑧ $\int (5 - 3س)^4\, ءس = \frac{(5 - 3س)^5}{5 \times -3} + ث$

$= \frac{-1}{15}(5 - 3س)^5 + ث$

⑨ $\int \sqrt{4س - 1}\, ءس = \int (4س - 1)^{\frac{1}{2}}\, ءس$

$= \frac{(4س - 1)^{\frac{3}{2}}}{4 \times \frac{3}{2}} + ث$

$= \frac{1}{6}(4س - 1)^{\frac{3}{2}} + ث$

⑩ $\int \sqrt[3]{3س + 1}\, ءس$

$= \int (3س + 1)^{\frac{1}{3}}\, ءس$

$= \frac{(3س + 1)^{\frac{4}{3}}}{3 \times \frac{4}{3}} + ث = \frac{1}{4}(3س + 1)^{\frac{4}{3}} + ث$

⑪ $\int \frac{ءس}{\sqrt{3 - 5س}} = \int (3 - 5س)^{-\frac{1}{2}}\, ءس$

$= \frac{(3 - 5س)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \times -5} + ث$

$= \frac{-2}{5}(3 - 5س)^{\frac{1}{2}} + ث$

⑫ $\int \frac{ءس}{(3س - 4)^6} = \int (3س - 4)^{-6}\, ءس$

$= \frac{(3س - 4)^{-5}}{-5 \times 3} + ث = \frac{-1}{15}(3س - 4)^{-5} + ث$

⑬ $\int (هـ^{5س + 4} + 2^س + 3)\, ءس$

$= \frac{1}{5}هـ^{5س + 4} + \frac{2^س}{لو_هـ 2} + 3س + ث$

⑭ $\int \left(\frac{5}{س} + هـ^س\right) ءس$

$= 5\, لو_هـ |س| + هـ^س + ث$

⑮ $\int 8س^6 \left(5 - \frac{2}{س}\right)^6 ءس$

$= 8 \int (5س - 2)^6\, ءس$

$= 8 \times \frac{(5س - 2)^7}{7 \times 5} + ث$

$= \frac{8}{35}(5س - 2)^7 + ث$

⑯ $\int (9س^2 - 6س + 1)^5\, ءس$

$= \int [(3س - 1)^2]^5\, ءس$

$= \int (3س - 1)^{10}\, ءس$

$= \frac{(3س - 1)^{11}}{11 \times 3} + ث$

$= \frac{1}{33}(3س - 1)^{11} + ث$

⑰ $\int س \sqrt{\frac{5}{س} - \frac{3}{س^2}}\, ءس$

$= \int \sqrt{5س - 3}\, ءس = \int (5س - 3)^{\frac{1}{2}}\, ءس$

$= \frac{(5س - 3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \times 5} + ث = \frac{2}{15}(5س - 3)^{\frac{3}{2}} + ث$

⑱ $\int س \sqrt[3]{\frac{2}{س^3} - \frac{1}{س^2}}\, ءس = \int \sqrt[3]{2 - س}\, ءس$

$= \int (2 - س)^{\frac{1}{3}}\, ءس = \frac{(2 - س)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3} \times -1} + ث$

$= \frac{-3}{4}(2 - س)^{\frac{4}{3}} + ث$

2

① $ص = 2س^2 - 1 \quad \therefore ءص = 6س\, ءس$

② $ص = (2س + 5)^4$

$\therefore ءص = 4(2س + 5)^3 \times 2\, ءس$

$= 8(2س + 5)^3\, ءس$

③ $ص = هـ^{2س - 3}$

$\therefore ءص = 2\, هـ^{2س - 3}\, ءس$

④ $ص = \frac{س}{س - 1}$

$\therefore ءص = \frac{(س - 1)(1) - (1)س}{(س - 1)^2}\, ءس$

$= \frac{-1}{(س - 1)^2}\, ءس$

⑤ $ح = \frac{4}{3}\pi\, نق^2 \quad \therefore ءح = \frac{8}{3}\pi\, نق\, ءنق$

⑥ $ص = \sqrt{(2س + 3)^5} = (2س + 3)^{\frac{5}{2}}$

$\therefore ءص = \frac{5}{2}(2س + 3)^{\frac{3}{2}} \times 2\, ءس$

$= 5(2س + 3)^{\frac{3}{2}}\, ءس$

⑦ $ص = \left(س + \frac{1}{س}\right)^3$

$\therefore ءص = 3\left(س + \frac{1}{س}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{س^2}\right) ءس$

⑧ $ص = هـ^{س^2 + 3س}$

$\therefore ءص = هـ^{س^2 + 3س} \times (2س + 3)\, ءس$

⑨ $ص = هـ^{جتا 2س}$

$\therefore ءص = هـ^{جتا 2س} \times - جا 2س \times 2\, ءس$

$= -2\, جا 2س \,.\, هـ^{جتا 2س}\, ءس$

⑩ $ع = لو_هـ (س^2 + 1)$

$\therefore ءع = \frac{1}{س^2 + 1} \times 2س\, ءس$

$= \frac{2س}{س^2 + 1}\, ءس$

⑪ $ع = \left(لو_هـ \frac{10}{س}\right)^2$

$\therefore ءع = 2\left(لو_هـ \frac{10}{س}\right) \times \frac{1}{\left(\frac{10}{س}\right)} \times \frac{-10}{س^2}\, ءس$

$= \frac{-2}{س}\, لو_هـ \frac{10}{س}\, ءس$

⑫ $ع = لو_هـ ظتا(3س - 1)$

$\therefore ءع = \frac{- قتا^2(3س - 1) \times 3}{ظتا(3س - 1)}\, ءس$

$= \frac{-3\, قتا^2(3س - 1)}{ظتا(3س - 1)}\, ءس$

3

① $ص = ع \,.\, ل \quad \therefore ءص = ع \,.\, ءل + ل \,.\, ءع$

② $ص = \frac{ع}{ل} \quad \therefore ءص = \frac{ل \,.\, ءع - ع \,.\, ءل}{ل^2}$

4

$س^2 + ص^2 = 25$

$\therefore 2س \,.\, ءس + 2ص \,.\, ءص = 0$

$\therefore ءص = \frac{-2س\, ءس}{2ص}$

$\therefore ءص = -\frac{س}{ص} \,.\, ءس$

أولاً مسائل على التكامل

١

① $\int ٣س(س^{٢}+٣)^{٤}\,ءس$

، بوضع $ع = س^{٢}+٣$ $\therefore ءع = ٢س\,.\,ءس$

$\therefore ءس = \frac{ءع}{٢س}$

$\therefore$ التكامل $= \int ٣س \times ع^{٤} \times \frac{ءع}{٢س}$

$= \int \frac{٣}{٢} ع^{٤}\,ءع$

$= \frac{٣}{٢} \times \frac{ع^{٥}}{٥} + ث = \frac{٣}{١٠} ع^{٥} + ث$

$= \frac{٣}{١٠}(س^{٢}+٣)^{٥} + ث$

② $\int س^{٣}(٢س^{٤}-٧)^{٥}\,ءس$

$= \frac{١}{٨}\int ٨س^{٣}(٢س^{٤}-٧)^{٥}\,ءس$

$= \frac{١}{٨} \times \frac{(٢س^{٤}-٧)^{٦}}{٦} + ث$

$= \frac{١}{٤٨}(٢س^{٤}-٧)^{٦} + ث$

③ $\int (س^{٢}-٤س+١)^{-٣} \times (س-٢)\,ءس$

$= \frac{١}{٢}\int (٢س-٤)(س^{٢}-٤س+١)^{-٣}\,ءس$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{(س^{٢}-٤س+١)^{-٢}}{-٢} + ث$

$= -\frac{١}{٤}(س^{٢}-٤س+١)^{-٢} + ث$

④ $\int (١-س^{٢})(٣س-س^{٣})^{٥}\,ءس$

$= \frac{١}{٣}\int (٣-٣س^{٢})(٣س-س^{٣})^{٥}\,ءس$

$= \frac{١}{٣} \times \frac{(٣س-س^{٣})^{٦}}{٦} + ث$

$= \frac{١}{١٨}(٣س-س^{٣})^{٦} + ث$

⑤ $\int س\sqrt{س^{٢}+١}\,ءس$

$= \frac{١}{٢}\int ٢س(س^{٢}+١)^{\frac{١}{٢}}\,ءس$

$= \frac{١}{٣}(س^{٢}+١)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

⑥ $\int (س-١)\sqrt[٣]{س^{٢}-٢س}\,ءس$

$= \frac{١}{٢}\int (٢س-٢)(س^{٢}-٢س)^{\frac{١}{٣}}\,ءس$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{(س^{٢}-٢س)^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}} + ث$

$= \frac{٣}{٨}(س^{٢}-٢س)^{\frac{٤}{٣}} + ث$

⑦ $\int \frac{س^{٢}}{(س^{٣}-٤)^{٥}}\,ءس$

$= \frac{١}{٣}\int ٣س^{٢}(س^{٣}-٤)^{-٥}\,ءس$

$= \frac{١}{٣} \times \frac{(س^{٣}-٤)^{-٤}}{-٤} + ث$

$= \frac{-١}{١٢}(س^{٣}-٤)^{-٤} + ث$

⑧ $\int \frac{س^{٤}}{(س^{٥}+١)^{٧}}\,ءس$

$= \frac{١}{٥}\int ٥س^{٤}(س^{٥}+١)^{-٧}\,ءس$

$= \frac{١}{٥} \times \frac{(س^{٥}+١)^{-٦}}{-٦} + ث$

$= \frac{-١}{٣٠}(س^{٥}+١)^{-٦} + ث$

⑨ $\int \frac{س}{(س^{٢}+٨)^{٣}}\,ءس$

$= \frac{١}{٢}\int (٢س)(س^{٢}+٨)^{-٣}\,ءس$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{(س^{٢}+٨)^{-٢}}{-٢} + ث$

$= \frac{-١}{٤}(س^{٢}+٨)^{-٢} + ث$

⑩ $\int \frac{س^{٢}+١}{(س^{٣}+٣س)^{٦}}\,ءس$

$= \frac{١}{٣}\int (٣س^{٢}+٣)(س^{٣}+٣س)^{-٦}\,ءس$

$= \frac{١}{٣} \times \frac{(س^{٣}+٣س)^{-٥}}{-٥} + ث$

$= \frac{-١}{١٥}(س^{٣}+٣س)^{-٥} + ث$

⑪ $\int \frac{٥س}{٣س^{٢}-١}\,ءس$

$= ٥ \times \frac{١}{٦}\int \frac{٦س}{٣س^{٢}-١}\,ءس$

$= \frac{٥}{٦}\,لو_{هـ}|٣س^{٢}-١| + ث$

⑫ $\int \frac{س^{٢}}{س^{٣}+٥}\,ءس = \frac{١}{٣}\int \frac{٣س^{٢}}{س^{٣}+٥}\,ءس$

$= \frac{١}{٣}\,لو_{هـ}|س^{٣}+٥| + ث$

⑬ $\int \frac{٢ص^{٣}}{ص^{٤}+٥}\,ءص = \frac{١}{٢}\int \frac{٤ص^{٣}}{ص^{٤}+٥}\,ءص$

$= \frac{١}{٢}\,لو_{هـ}|ص^{٤}+٥| + ث$

⑭ $\int \frac{١٢س+٢}{٣س^{٢}+س+٧}\,ءس$

$= ٢\int \frac{٦س+١}{٣س^{٢}+س+٧}\,ءس$

$= ٢\,لو_{هـ}|٣س^{٢}+س+٧| + ث$

⑮ $\int \frac{س}{\sqrt{١+٣س^{٢}}}\,ءس = \frac{١}{٦}\int \frac{٦س}{\sqrt{١+٣س^{٢}}}\,ءس$

$= \frac{١}{٦} \times ٢\sqrt{١+٣س^{٢}} + ث$

$= \frac{١}{٣}\sqrt{١+٣س^{٢}} + ث$

⑯ $\int \frac{س^{٣}}{\sqrt{٢س^{٤}+٣}}\,ءس = \frac{١}{٨}\int \frac{٨س^{٣}}{\sqrt{٢س^{٤}+٣}}\,ءس$

$= \frac{١}{٨} \times ٢\sqrt{٢س^{٤}+٣} + ث$

$= \frac{١}{٤}\sqrt{٢س^{٤}+٣} + ث$

⑰ $\int \frac{س^{٢}+١}{\sqrt{س^{٣}+٣س+٥}}\,ءس$

$= \frac{١}{٣}\int \frac{٣س^{٢}+٣}{\sqrt{س^{٣}+٣س+٥}}\,ءس$

$= \frac{١}{٣} \times ٢\sqrt{س^{٣}+٣س+٥} + ث$

$= \frac{٢}{٣}\sqrt{س^{٣}+٣س+٥} + ث$

⑱ $\int \frac{٢س-٥}{\sqrt{(س^{٢}-٥س+٧)^{٣}}}\,ءس$

$= \int (٢س-٥)(س^{٢}-٥س+٧)^{-\frac{٣}{٢}}\,ءس$

$= \frac{(س^{٢}-٥س+٧)^{-\frac{١}{٢}}}{-\frac{١}{٢}} + ث$

$= -٢(س^{٢}-٥س+٧)^{-\frac{١}{٢}} + ث$

⑲ $\int \frac{١}{س^{٢}}\left(١+\frac{١}{س}\right)^{٣}\,ءس$

$= -\int \left(\frac{-١}{س^{٢}}\right)\left(١+\frac{١}{س}\right)^{٣}\,ءس$

$= \frac{-\left(١+\frac{١}{س}\right)^{٤}}{٤} + ث$

$= \frac{-١}{٤}\left(١+\frac{١}{س}\right)^{٤} + ث$

⑳ $\int \frac{ءس}{\sqrt{س}(\sqrt{س}+٢)^{٥}}$

$= ٢\int \frac{١}{٢\sqrt{س}} \times (\sqrt{س}+٢)^{-٥}\,ءس$

$= \frac{٢(\sqrt{س}+٢)^{-٤}}{-٤} + ث$

$= \frac{-١}{٢}(\sqrt{س}+٢)^{-٤} + ث$

㉑ $\int \frac{(\sqrt{س}+٢)^{٥}}{\sqrt{س}}\,ءس$

$= ٢\int \frac{١}{٢\sqrt{س}}(\sqrt{س}+٢)^{٥}\,ءس$

$= \frac{٢(\sqrt{س}+٢)^{٦}}{٦} + ث$

$= \frac{١}{٣}(\sqrt{س}+٢)^{٦} + ث$

㉒ $\int \sqrt{\frac{١+\sqrt{س}}{س}}\,ءس = \int \frac{(١+\sqrt{س})^{\frac{١}{٢}}}{\sqrt{س}}\,ءس$

$= ٢\int \left(\frac{١}{٢\sqrt{س}}\right)(١+\sqrt{س})^{\frac{١}{٢}}\,ءس$

$= ٢ \times \frac{(١+\sqrt{س})^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ث$

$= \frac{٤}{٣}(١+\sqrt{س})^{\frac{٣}{٢}} + ث$

(٢٣) $\int (٢س-٣)^{٥}(٤س+١)^{٥}(٨س-٥)\,ءس$

$= \int (٨س-٥)(٨س^{٢}-١٠س-٣)^{٥}\,ءس$

$= \frac{١}{٢}\int (١٦س-١٠)(٨س^{٢}-١٠س-٣)^{٥}\,ءس$

$= \frac{١}{٢}\times\frac{(٨س^{٢}-١٠س-٣)^{٦}}{٦}+ث$

$= \frac{١}{١٢}(٨س^{٢}-١٠س-٣)^{٦}+ث$

(٢٤) $\int \sqrt{س^{٣}-٣س^{٢}+٣س-٤}\,(س-١)^{٢}\,ءس$

$=\int (س^{٢}-٢س+١)(س^{٣}-٣س^{٢}+٣س-٤)^{\frac{١}{٢}}\,ءس$

$=\frac{١}{٣}\int(٣س^{٢}-٦س+٣)(س^{٣}-٣س^{٢}+٣س-٤)^{\frac{١}{٢}}\,ءس$

$=\frac{١}{٣}\times\frac{(س^{٣}-٣س^{٢}+٣س-٤)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}}+ث$

$=\frac{٢}{٩}(س^{٣}-٣س^{٢}+٣س-٤)^{\frac{٣}{٢}}+ث$

٢

(١) $\int س(س-٥)^{٣}\,ءس$

بوضع $ع=س-٥ \quad \therefore س=ع+٥$

$ءس=ءع$

$\therefore \int س(س-٥)^{٣}\,ءس$

$=\int(ع+٥)(ع)^{٣}\,ءع$

$=\int(ع^{٤}+٥ع^{٣})\,ءع$

$=\frac{١}{٥}ع^{٥}+\frac{٥}{٤}ع^{٤}+ث$

$=\frac{١}{٥}(س-٥)^{٥}+\frac{٥}{٤}(س-٥)^{٤}+ث$

حل آخر :

$\int س(س-٥)^{٣}\,ءس$

$=\int(س-٥+٥)(س-٥)^{٣}\,ءس$

$=\int[(س-٥)^{٤}+٥(س-٥)^{٣}]\,ءس$

$=\frac{١}{٥}(س-٥)^{٥}+\frac{٥}{٤}(س-٥)^{٤}+ث$

(٢) $\int س(٢س+٣)^{٤}\,ءس$

، بوضع $ع=٢س+٣ \quad \therefore س=\frac{١}{٢}(ع-٣)$

$\therefore ءع=٢\,ءس \quad \therefore ءس=\frac{١}{٢}\,ءع$

$\therefore\int س(٢س+٣)^{٤}\,ءس$

$=\int\frac{١}{٢}(ع-٣)(ع)^{٤}\times\frac{١}{٢}\,ءع$

$=\int(\frac{١}{٤}ع^{٥}-\frac{٣}{٤}ع^{٤})\,ءع$

$=\frac{١}{٢٤}ع^{٦}-\frac{٣}{٢٠}ع^{٥}+ث$

$=\frac{١}{٢٤}(٢س+٣)^{٦}-\frac{٣}{٢٠}(٢س+٣)^{٥}+ث$

(٣) $\int س\sqrt{س+٤}\,ءس$ بوضع $ع=س+٤$

$\therefore س=ع-٤ \quad \therefore ءس=ءع$

$\therefore\int س\sqrt{س+٤}\,ءس$

$=\int(ع-٤)\sqrt{ع}\,ءع$

$=\int(ع^{\frac{٣}{٢}}-٤ع^{\frac{١}{٢}})\,ءع$

$=\frac{٢}{٥}ع^{\frac{٥}{٢}}-\frac{٨}{٣}ع^{\frac{٣}{٢}}+ث$

$=\frac{٢}{٥}(س+٤)^{\frac{٥}{٢}}-\frac{٨}{٣}(س+٤)^{\frac{٣}{٢}}+ث$

(٤) $\int س\sqrt{٢س+٥}\,ءس$ بوضع $ع=٢س+٥$

$\therefore س=\frac{١}{٢}(ع-٥) \quad \therefore ءس=\frac{١}{٢}\,ءع$

$\therefore \int س\sqrt{٢س+٥}\,ءس$

$=\int\frac{١}{٢}(ع-٥)\sqrt{ع}\times\frac{١}{٢}\,ءع$

$=\int(\frac{١}{٤}ع^{\frac{٣}{٢}}-\frac{٥}{٤}ع^{\frac{١}{٢}})\,ءع$

$=\frac{١}{٤}\times\frac{٢}{٥}ع^{\frac{٥}{٢}}-\frac{٥}{٤}\times\frac{٢}{٣}ع^{\frac{٣}{٢}}+ث$

$=\frac{١}{١٠}ع^{\frac{٥}{٢}}-\frac{٥}{٦}ع^{\frac{٣}{٢}}+ث$

$=\frac{١}{١٠}(٢س+٥)^{\frac{٥}{٢}}-\frac{٥}{٦}(٢س+٥)^{\frac{٣}{٢}}+ث$

(٥) $\int س^{٢}\sqrt{س+٢}\,ءس$ ، بوضع $ع=\sqrt{س+٢}$

$\therefore س=ع^{٢}-٢ \quad \therefore ءس=٢ع\,ءع$

$\therefore\int س^{٢}\sqrt{س+٢}\,ءس$

$=\int(ع^{٢}-٢)^{٢}.ع\times٢ع\,ءع$

$=\int(ع^{٢}-٢)^{٢}\times٢ع^{٢}\,ءع$

$=\int٢ع^{٢}(ع^{٤}-٤ع^{٢}+٤)\,ءع$

$=\int(٢ع^{٦}-٨ع^{٤}+٨ع^{٢})\,ءع$

$=\frac{٢}{٧}ع^{٧}-\frac{٨}{٥}ع^{٥}+\frac{٨}{٣}ع^{٣}+ث$

$=\frac{٢}{٧}(س+٢)^{\frac{٧}{٢}}-\frac{٨}{٥}(س+٢)^{\frac{٥}{٢}}$

$+\frac{٨}{٣}(س+٢)^{\frac{٣}{٢}}+ث$

(٦) $\int(س^{٢}-١)\sqrt{س+١}\,ءس$

بوضع $ع=\sqrt{س+١} \quad \therefore س=ع^{٢}-١$

$\therefore ءس=٢ع.ءع$

$\therefore\int(س^{٢}-١)\sqrt{س+١}\,ءس$

$=\int((ع^{٢}-١)^{٢}-١).ع.٢ع.ءع$

$=\int(ع^{٤}-٢ع^{٢})\times٢ع^{٢}\,ءع$

$=\int(٢ع^{٦}-٤ع^{٤})\,ءع$

$=\frac{٢}{٧}ع^{٧}-\frac{٤}{٥}ع^{٥}+ث$

$=\frac{٢}{٧}(س+١)^{\frac{٧}{٢}}-\frac{٤}{٥}(س+١)^{\frac{٥}{٢}}+ث$

(٧) $\int س^{٢}\sqrt[٣]{س-٣}\,ءس$ بوضع $ع=\sqrt[٣]{س-٣}$

$\therefore س=ع^{٣}+٣ \quad \therefore ءس=٣ع^{٢}.ءع$

$\therefore\int س^{٢}\sqrt[٣]{س-٣}\,ءس$

$=\int(ع^{٣}+٣)^{٢}\times ع.٣ع^{٢}\,ءع$

$=\int٣ع^{٣}(ع^{٦}+٦ع^{٣}+٩)\,ءع$

$=\int(٣ع^{٩}+١٨ع^{٦}+٢٧ع^{٣})\,ءع$

$=\frac{٣}{١٠}ع^{١٠}+\frac{١٨}{٧}ع^{٧}+\frac{٢٧}{٤}ع^{٤}+ث$

$=\frac{٣}{١٠}(س-٣)^{\frac{١٠}{٣}}+\frac{١٨}{٧}(س-٣)^{\frac{٧}{٣}}$

$+\frac{٢٧}{٤}(س-٣)^{\frac{٤}{٣}}+ث$

(٨) $\int س^{٣}\sqrt{١-س^{٢}}\,ءس$

بوضع $ع=١-س^{٢} \quad \therefore س^{٢}=١-ع$

$\therefore س=\sqrt{١-ع}$

$\therefore ءس=-\frac{١}{٢}(١-ع)^{-\frac{١}{٢}}\,ءع$

$\therefore\int س^{٣}\sqrt{١-س^{٢}}\,ءس$

$=\int(١-ع)^{\frac{٣}{٢}}\times\sqrt{ع}\times\frac{-١}{٢}(١-ع)^{-\frac{١}{٢}}\,ءع$

$=\frac{-١}{٢}\int(١-ع)\times ع^{\frac{١}{٢}}\,ءع$

$=\frac{-١}{٢}\int(ع^{\frac{١}{٢}}-ع^{\frac{٣}{٢}})\,ءع$

$=\frac{-١}{٢}\int(\frac{٢}{٣}ع^{\frac{٣}{٢}}-\frac{٢}{٥}ع^{\frac{٥}{٢}})+ث$

$=\frac{-١}{٣}ع^{\frac{٣}{٢}}+\frac{١}{٥}ع^{\frac{٥}{٢}}+ث$

$=\frac{-١}{٣}(١-س^{٢})^{\frac{٣}{٢}}+\frac{١}{٥}(١-س^{٢})^{\frac{٥}{٢}}+ث$

(٩) $\int س^{٣}\sqrt[٥]{(س^{٢}-١)^{٢}}\,ءس$

بوضع $ع=س^{٢}-١ \quad \therefore س^{٢}=ع+١$

$\therefore ٢س\,ءس=ءع$

$\therefore\int س^{٢}\sqrt[٥]{(س^{٢}-١)^{٢}}.س\,ءس$

$=\int(ع+١)ع^{\frac{٢}{٥}}\times\frac{١}{٢}\,ءع$

$=\frac{١}{٢}\int(ع^{\frac{٧}{٥}}+ع^{\frac{٢}{٥}})\,ءع$

$=\frac{١}{٢}\times\frac{٥}{١٢}ع^{\frac{١٢}{٥}}+\frac{١}{٢}\times\frac{٥}{٧}ع^{\frac{٧}{٥}}+ث$

$=\frac{٥}{٢٤}ع^{\frac{١٢}{٥}}+\frac{٥}{١٤}ع^{\frac{٧}{٥}}+ث$

$=\frac{٥}{٢٤}(س^{٢}-١)^{\frac{١٢}{٥}}+\frac{٥}{١٤}(س^{٢}-١)^{\frac{٧}{٥}}+ث$

(١٠) $\int س^{٥}(س^{٢}+٢)^{٤}\,ءس$

بوضع $ع=س^{٢}+٢ \quad \therefore س^{٢}=ع-٢$

$\therefore ءع=٢س.ءس$

$\therefore\int س^{٥}(س^{٢}+٢)^{٤}\,ءس$

$=\frac{١}{٢}\int(س^{٢})^{٢}(س^{٢}+٢)^{٤}\times٢س.ءس$

$=\frac{١}{٢}\int(ع-٢)^{٢}.ع^{٤}\times ءع$

$=\frac{١}{٢}\int(ع^{٦}-٤ع^{٥}+٤ع^{٤})\,ءع$

$=\frac{١}{٢}\times\frac{١}{٧}ع^{٧}-\frac{١}{٢}\times٤\times\frac{١}{٦}ع^{٦}$

$+\frac{١}{٢}\times٤\times\frac{١}{٥}ع^{٥}+ث$

$=\frac{١}{١٤}ع^{٧}-\frac{١}{٣}ع^{٦}+\frac{٢}{٥}ع^{٥}+ث$

$=\frac{١}{١٤}(س^{٢}+٢)^{٧}-\frac{١}{٣}(س^{٢}+٢)^{٦}$

$+\frac{٢}{٥}(س^{٢}+٢)^{٥}+ث$

(١١) $\int س^{٣}(س^{٢}-١)^{٥}\,ءس$

بوضع $ع = س^{٢} - ١$ ∴ $س^{٢} = ع + ١$

∴ $٢س\,.\,ءس = ءع$

∴ $\int س^{٣}(س^{٢}-١)^{٥}\,ءس$

$= \frac{١}{٢}\int س^{٢}(س^{٢}-١)^{٥} \times ٢س\,.\,ءس$

$= \frac{١}{٢}\int (ع+١)(ع)^{٥}\,.\,ءع$

$= \frac{١}{٢}\int (ع^{٦} + ع^{٥})\,.\,ءع$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٧}ع^{٧} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٦}ع^{٦} + ث$

$= \frac{١}{١٤}ع^{٧} + \frac{١}{١٢}ع^{٦} + ث$

$= \frac{١}{١٤}(س^{٢}-١)^{٧} + \frac{١}{١٢}(س^{٢}-١)^{٦} + ث$

(١٢) $\int \frac{س}{س+١}\,ءس$ بوضع $ع = س + ١$

∴ $س = ع - ١$ $ءس = ءع$

∴ $\int \frac{س}{س+١}\,ءس$

$= \int \frac{ع-١}{ع}\,ءع = \int \left(١ - \frac{١}{ع}\right)ءع$

$= ع - لو_{هـ}|ع| + ث$

$= س + ١ - لو_{هـ}|س+١| + ث$

حل آخر :

$\int \frac{س+١-١}{س+١}\,ءس = \int \left(١ - \frac{١}{س+١}\right)ءس$

$= س - لو_{هـ}|س+١| + ث$

(١٣) $\int \frac{س^{٢}}{س-١}\,ءس$ بوضع $ع = س - ١$

∴ $س = ع + ١$ $ءس = ءع$

∴ $\int \frac{س^{٢}}{س-١}\,ءس = \int \frac{(ع+١)^{٢}}{ع}\,ءع$

$= \int \frac{ع^{٢} + ٢ع + ١}{ع}\,ءع$

$= \int \left(ع + ٢ + \frac{١}{ع}\right)ءع$

$= \frac{ع^{٢}}{٢} + ٢ع$

$+ لو_{هـ}|ع| + ث$

$= \frac{١}{٢}(س-١)^{٢} + ٢(س-١)$

$+ لو_{هـ}|س-١| + ث$

حل آخر :

$\int \left(\frac{س^{٢}-١}{س-١} + \frac{١}{س-١}\right)ءس$

$= \int \left(س + ١ + \frac{١}{س-١}\right)ءس$

$= \frac{١}{٢}س^{٢} + س + لو_{هـ}|س-١| + ث$

(١٤) $\int \frac{س}{(س+١)^{٢}}\,ءس$

بوضع $ع = س + ١$ ∴ $س = ع - ١$

∴ $ءس = ءع$

∴ $\int \frac{س}{(س+١)^{٢}}\,ءس = \int \frac{ع-١}{ع^{٢}}\,ءع$

$= \int \left(\frac{١}{ع} - ع^{-٢}\right)ءع = لو_{هـ}|ع| - \frac{ع^{-١}}{-١} + ث$

$= لو_{هـ}|س+١| + \frac{١}{س+١} + ث$

(١٥) $\int \frac{س}{\sqrt{٢س+٢}}\,ءس$ بوضع $٢ع = ٢س + ٢$

∴ $س = ع - ١$ ∴ $ءس = ءع$

∴ $\int \frac{س}{\sqrt{٢س+٢}}\,ءس = \int \frac{ع-١}{\sqrt{٢ع}}\,ءع$

$= \int \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}ع^{\frac{١}{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}ع^{-\frac{١}{٢}}\right)ءع$

$= \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{ع^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{ع^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + ث$

$= \frac{\sqrt{٢}}{٣}(س+١)^{\frac{٣}{٢}} - \sqrt{٢}(س+١)^{\frac{١}{٢}} + ث$

(١٦) $\int \frac{س+١}{\sqrt{س-١}}\,ءس$ بوضع $ع = س - ١$

∴ $س = ع + ١$ ∴ $ءع = ءس$

∴ $\int \frac{س+١}{\sqrt{س-١}}\,ءس = \int \frac{ع+١+١}{\sqrt{ع}}\,ءع$

$= \int \left((ع)^{\frac{١}{٢}} + ٢ع^{-\frac{١}{٢}}\right)ءع$

$= \frac{ع^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ٢ \times \frac{ع^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + ث$

$= \frac{٢}{٣}ع^{\frac{٣}{٢}} + ٤ع^{\frac{١}{٢}} + ث$

$= \frac{٢}{٣}(س-١)^{\frac{٣}{٢}}$

$+ ٤(س-١)^{\frac{١}{٢}} + ث$

(١٧) $\int \frac{٥م\,ءم}{\sqrt{٤-٢م}}$ بوضع $ن = ٤ - ٢م$

∴ $م = ٢ - \frac{١}{٢}ن$ ∴ $ءم = -\frac{١}{٢}ءن$

∴ $\int \frac{٥م\,ءم}{\sqrt{٤-٢م}} = \int \frac{٥(٢ - \frac{١}{٢}ن)}{\sqrt{ن}} \times -\frac{١}{٢}ءن$

$= -\frac{٥}{٢}\int \left(٢ن^{-\frac{١}{٢}} - \frac{١}{٢}ن^{\frac{١}{٢}}\right)ءن$

$= \int \left(-٥ن^{-\frac{١}{٢}} + \frac{٥}{٤}ن^{\frac{١}{٢}}\right)ءن$

$= -٥ \times \frac{ن^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + \frac{٥}{٤} \times \frac{ن^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ث$

$= -١٠ن^{\frac{١}{٢}} + \frac{٥}{٦}ن^{\frac{٣}{٢}} + ث$

$= -١٠(٤-٢م)^{\frac{١}{٢}}$

$+ \frac{٥}{٦}(٤-٢م)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

(١٨) $\int \frac{س\,ءس}{\sqrt{٤س-١}}$ ، بوضع $ع = ٤س - ١$

∴ $س = \frac{١}{٤}ع + \frac{١}{٤}$ ∴ $ءس = \frac{١}{٤}ءع$

∴ $\int \frac{س\,ءس}{\sqrt{٤س-١}}$

$= \int \frac{\frac{١}{٤}ع + \frac{١}{٤}}{\sqrt{ع}} \times \frac{١}{٤}ءع$

$= \int \left(\frac{١}{١٦}ع^{\frac{١}{٢}} + \frac{١}{١٦}ع^{-\frac{١}{٢}}\right)ءع$

$= \frac{١}{٢٤}ع^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{٨}ع^{\frac{١}{٢}} + ث$

$= \frac{١}{٢٤}(٤س-١)^{\frac{٣}{٢}}$

$+ \frac{١}{٨}(٤س-١)^{\frac{١}{٢}} + ث$

(١٩) $\int \frac{س\,ءس}{\sqrt[٥]{(س+١)^{٢}}}$ ، بوضع $ع = س + ١$

∴ $س = ع - ١$ ∴ $ءس = ءع$

∴ $\int \frac{س\,ءس}{\sqrt[٥]{(س+١)^{٢}}} = \int \frac{ع-١}{ع^{\frac{٢}{٥}}}\,.\,ءع$

$= \int \left(ع^{\frac{٣}{٥}} - ع^{-\frac{٢}{٥}}\right)ءع$

$= \frac{٥}{٨}ع^{\frac{٨}{٥}} - \frac{٥}{٣}ع^{\frac{٣}{٥}} + ث$

$= \frac{٥}{٨}(س+١)^{\frac{٨}{٥}}$

$- \frac{٥}{٣}(س+١)^{\frac{٣}{٥}} + ث$

(٢٠) $\int \frac{\sqrt{س}\,ءس}{(\sqrt{س}-١)^{٦}}$ بوضع $ع = \sqrt{س} - ١$

∴ $س = (ع+١)^{٢}$ ∴ $ءس = ٢(ع+١)\,ءع$

∴ $\int \frac{\sqrt{س}\,ءس}{(\sqrt{س}-١)^{٦}}$

$= \int \frac{ع+١}{ع^{٦}} \times ٢(ع+١)\,ءع$

$= \int \frac{٢(ع^{٢} + ٢ع + ١)}{ع^{٦}}\,ءع$

$= \int (٢ع^{-٤} + ٤ع^{-٥} + ٢ع^{-٦})\,ءع$

$= \frac{٢ع^{-٣}}{-٣} + \frac{٤ع^{-٤}}{-٤} + \frac{٢ع^{-٥}}{-٥} + ث$

$= \frac{-٢}{٣}ع^{-٣} - ع^{-٤} - \frac{٢}{٥}ع^{-٥} + ث$

$= \frac{-٢}{٣}(\sqrt{س}-١)^{-٣} - (\sqrt{س}-١)^{-٤}$

$- \frac{٢}{٥}(\sqrt{س}-١)^{-٥} + ث$

(٢١) $\int \frac{س^{٢}}{\sqrt{٢س-١}}\,ءس$ بوضع $ع = ٢س - ١$

∴ $س = \frac{١}{٢}ع + \frac{١}{٢}$ ∴ $ءس = \frac{١}{٢}ءع$

∴ $\int \frac{س^{٢}}{\sqrt{٢س-١}}\,ءس$

$= \int \frac{(\frac{١}{٢}ع + \frac{١}{٢})^{٢}}{\sqrt{ع}} \times \frac{١}{٢}ءع$

$= \int \frac{\frac{١}{٤}ع^{٢} + \frac{١}{٢}ع + \frac{١}{٤}}{\sqrt{ع}} \times \frac{١}{٢}ءع$

$= \int \left(\frac{١}{٨}ع^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{٤}ع^{\frac{١}{٢}} + \frac{١}{٨}ع^{-\frac{١}{٢}}\right)ءع$

$= \frac{١}{٨} \times \frac{٢}{٥}ع^{\frac{٥}{٢}} + \frac{١}{٤} \times \frac{٢}{٣}ع^{\frac{٣}{٢}}$

$+ \frac{١}{٨} \times \frac{٢}{١}ع^{\frac{١}{٢}} + ث$

$= \frac{١}{٢٠}ع^{\frac{٥}{٢}} + \frac{١}{٦}ع^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{٤}ع^{\frac{١}{٢}} + ث$

$= \frac{١}{٢٠}(٢س-١)^{\frac{٥}{٢}} + \frac{١}{٦}(٢س-١)^{\frac{٣}{٢}}$

$+ \frac{١}{٤}(٢س-١)^{\frac{١}{٢}} + ث$

(٢٢) $\int \frac{س^{٣}}{\sqrt{٢-س^{٢}}}\,ءس$ بوضع $ع = ٢ - س^{٢}$

فإن : $س^{٢} = ٢ - ع$ ∴ $٢س\,.\,ءس = -ءع$

$\therefore \int \frac{س^٣\, ءس}{\sqrt{٢ - س^٢}} = \frac{١}{٢} \int \frac{س^٢}{\sqrt{٢ - س^٢}}\, ٢س \,.\, ءس$

$= \frac{١}{٢} \int \frac{٢ - ع}{\sqrt{ع}} \,.\, (-ءع)$

$= \int -ع^{-\frac{١}{٢}} + \frac{١}{٢} ع^{\frac{١}{٢}} ءع$

$= \frac{-ع^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + \frac{١}{٢} \times \frac{ع^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ث$

$= -٢ (٢ - س^٢)^{\frac{١}{٢}}$

$+ \frac{١}{٣} (٢ - س^٢)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

(٢٣) $\int \frac{ءس}{\sqrt{\sqrt[٣]{س} + ١}}$ بوضع $ع = \sqrt[٣]{س} + ١$

$\therefore س = (ع - ١)^٣$

$\therefore ءس = ٣ (ع - ١)^٢ \,.\, ءع$

$\therefore \int \frac{ءس}{\sqrt{\sqrt[٣]{س} + ١}} = \int \frac{٣ (ع - ١)^٢ ءع}{\sqrt{ع}}$

$= \int \frac{٣ (ع^٢ - ٢ ع + ١)}{\sqrt{ع}} ءع$

$= \int (٣ ع^{\frac{٣}{٢}} - ٦ ع^{\frac{١}{٢}}$

$+ ٣ ع^{-\frac{١}{٢}}) ءع$

$= \frac{٦}{٥} ع^{\frac{٥}{٢}} - ٤ ع^{\frac{٣}{٢}}$

$+ ٦ ع^{\frac{١}{٢}} + ث$

$= \frac{٦}{٥} (\sqrt[٣]{س} + ١)^{\frac{٥}{٢}}$

$- ٤ (\sqrt[٣]{س} + ١)^{\frac{٣}{٢}}$

$+ ٦ (\sqrt[٣]{س} + ١)^{\frac{١}{٢}} + ث$

(٢٤) $\int \frac{ءس}{\sqrt[٣]{٢ - \sqrt{س}}}$ بوضع $ع = ٢ - \sqrt{س}$

$\therefore س = (٢ - ع)^٢$

$\therefore ءس = -٢ (٢ - ع) ءع$

$\therefore \int \frac{ءس}{\sqrt[٣]{٢ - \sqrt{س}}}$

$= \int \frac{-٢ (٢ - ع) ءع}{\sqrt[٣]{ع}}$

$= \int (-٤ ع^{-\frac{١}{٣}} + ٢ ع^{\frac{٢}{٣}}) ءع$

$= -٤ \times \frac{٣}{٢} ع^{\frac{٢}{٣}} + ٢ \times \frac{٣}{٥} ع^{\frac{٥}{٣}} + ث$

$= -٦ ع^{\frac{٢}{٣}} + \frac{٦}{٥} ع^{\frac{٥}{٣}} + ث$

$= -٦ (٢ - \sqrt{س})^{\frac{٢}{٣}}$

$+ \frac{٦}{٥} (٢ - \sqrt{س})^{\frac{٥}{٣}} + ث$

(٢٥) $\int \frac{س^٣ ءس}{\sqrt{(س^٢ + ٣)^٣}}$ بوضع $ع = س^٢ + ٣$

$\therefore س^٢ = ع - ٣$ $\therefore ٢ س ءس = ءع$

$\therefore \int \frac{س^٣ ءس}{\sqrt{(س^٢ + ٣)^٣}}$

$= \frac{١}{٢} \int س^٢ (س^٢ + ٣)^{-\frac{٣}{٢}} \times ٢ س \,.\, ءس$

$= \frac{١}{٢} \int (ع - ٣) \times ع^{-\frac{٣}{٢}} \,.\, ءع$

$= \frac{١}{٢} \int (ع^{-\frac{١}{٢}} - ٣ ع^{-\frac{٣}{٢}}) \,.\, ءع$

$= \frac{١}{٢} (٢ ع^{\frac{١}{٢}} + ٦ ع^{-\frac{١}{٢}}) + ث$

$= ع^{\frac{١}{٢}} + ٣ ع^{-\frac{١}{٢}} + ث$

$= (س^٢ + ٣)^{\frac{١}{٢}} + ٣ (س^٢ + ٣)^{-\frac{١}{٢}} + ث$

(٢٦) $\int س^{١٥} (\frac{١}{س} + \frac{١}{س^٢})^٧ ءس$

$= \int س \,.\, س^{١٤} (\frac{١}{س} + \frac{١}{س^٢})^٧ ءس$

$= \int س (س + ١)^٧ ءس$

بوضع $ع = س + ١$ $\therefore س = ع - ١$

$\therefore ءس = ءع$

$\therefore \int س (س + ١)^٧ ءس$

$= \int (ع - ١)(ع)^٧ ءس$

$= \int (ع^٨ - ع^٧) ءع$

$= \frac{١}{٩} ع^٩ - \frac{١}{٨} ع^٨ + ث$

$= \frac{١}{٩} (س + ١)^٩ - \frac{١}{٨} (س + ١)^٨ + ث$

(٢٧) $\int ٩ س^٣ \sqrt{\frac{٤}{س^٢} - ٣}\, ءس$

$= -\int (-٩ س^٢) \sqrt{٤ - ٣ س^٢}\, ءس$

$= \frac{-(٤ - ٣ س^٢)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ث$

$= \frac{٣}{٤} (٤ - ٣ س^٢)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

(٢٨) $\int \frac{٢ س - ١}{(٢ س + ٣)^٢} ءس$

بوضع $ع = ٢ س + ٣$

$\therefore ٢ س = ع - ٣$ $\therefore ءس = \frac{١}{٢} ءع$

$\therefore \int \frac{٢ س - ١}{(٢ س + ٣)^٢} ءس$

$= \int \frac{ع - ٣ - ١}{ع^٢} \times \frac{١}{٢} ءع$

$= \int (\frac{١}{٢} ع^{-١} - ٢ ع^{-٢}) ءع$

$= \frac{١}{٢} لو_هـ |ع| - \frac{٢ ع^{-١}}{-١} + ث$

$= \frac{١}{٢} لو_هـ |ع| + ٢ ع^{-١} + ث$

$= \frac{١}{٢} لو_هـ |٢ س + ٣| + ٢ (٢ س + ٣)^{-١} + ث$

(٢٩) $\int \frac{(س + ٣)^٣ - ٢٧}{س} ءس$

بوضع $ع = س + ٣$ $\therefore س = ع - ٣$

$\therefore ءس = ءع$

$\therefore \int \frac{(س + ٣)^٣ - ٢٧}{س} ءس = \int \frac{ع^٣ - ٢٧}{ع - ٣} ءع$

$= \int (ع^٢ + ٣ ع + ٩) ءع$

$= \frac{١}{٣} ع^٣ + \frac{٣}{٢} ع^٢ + ٩ ع + ث$

$= \frac{١}{٣} (س + ٣)^٣ + \frac{٣}{٢} (س + ٣)^٢$

$+ ٩ (س + ٣) + ث$

(٣٠) $\int س (\sqrt{س} + ٢)^٦ ءس$

بوضع $ع = \sqrt{س} + ٢$ $\therefore س = (ع - ٢)^٢$

$\therefore ءس = ٢ (ع - ٢) ءع$

$\therefore \int س (\sqrt{س} + ٢)^٦ ءس$

$= \int (ع - ٢)^٢ \,.\, ع^٦ \times ٢ (ع - ٢) ءع$

$= \int ٢ ع^٦ (ع - ٢)(ع^٢ - ٤ ع + ٤) ءع$

$= \int ٢ ع^٦ (ع^٣ - ٦ ع^٢ + ١٢ ع - ٨) ءع$

$= \int (٢ ع^٩ - ١٢ ع^٨ + ٢٤ ع^٧ - ١٦ ع^٦) ءع$

$= \frac{١}{٥} ع^{١٠} - \frac{٤}{٣} ع^٩ + ٣ ع^٨$

$- \frac{١٦}{٧} ع^٧ + ث$

$= \frac{١}{٥} (\sqrt{س} + ٢)^{١٠} - \frac{٤}{٣} (\sqrt{س} + ٢)^٩$

$+ ٣ (\sqrt{س} + ٢)^٨ - \frac{١٦}{٧} (\sqrt{س} + ٢)^٧ + ث$

(٣١) $\int \sqrt{س} (\sqrt{س} - ٣)^٤ ءس$

بوضع $ع = \sqrt{س} - ٣$ $\therefore س = (ع + ٣)^٢$

$\therefore ءس = ٢ (ع + ٣) ءع$

$\therefore \int \sqrt{س} (\sqrt{س} - ٣)^٤ ءس$

$= \int (ع + ٣)(ع^٤)(٢)(ع + ٣) ءع$

$= \int (٢ ع^٢ + ١٢ ع + ١٨) ع^٤ ءع$

$= \int ٢ ع^٦ + ١٢ ع^٥ + ١٨ ع^٤ ءع$

$= \frac{٢}{٧} ع^٧ + ٢ ع^٦ + \frac{١٨}{٥} ع^٥ + ث$

$= \frac{٢}{٧} (\sqrt{س} - ٣)^٧ + ٢ (\sqrt{س} - ٣)^٦$

$+ \frac{١٨}{٥} (\sqrt{س} - ٣)^٥ + ث$

(٣٢) $\int \sqrt{س^{\frac{٣}{٢}} + س}\, ءس$

$= \int \sqrt{س} \sqrt{س^{\frac{١}{٢}} + ١}\, ءس$

بوضع $ع = \sqrt{س} + ١$ $\therefore س = (ع - ١)^٢$

$\therefore ءس = ٢ (ع - ١) ءع$

∴ ∫ √س √(س^١/٢ + ١) ء س
= ∫ (ع - ١) . √ع × ٢ (ع - ١) ء ع
= ٢ ∫ (ع - ١)^٢ ع^١/٢ ء ع
= ∫ (٢ ع^٢ - ٤ ع + ٢) ع^١/٢ ء ع
= ∫ (٢ ع^٥/٢ - ٤ ع^٣/٢ + ٢ ع^١/٢) ء ع
= ٤/٧ ع^٧/٢ - ٨/٥ ع^٥/٢ + ٤/٣ ع^٣/٢ + ث
= ٤/٧ (√س + ١)^٧/٢ - ٨/٥ (√س + ١)^٥/٢
+ ٤/٣ (√س + ١)^٣/٢ + ث

٣

① (د)	② (ب)	③ (ب)	④ (ب)
⑤ (ب)	⑥ (د)	⑦ (د)	⑧ (ب)
⑨ (أ)	⑩ (جـ)	⑪ (د)	⑫ (ب)

٤

① ∫ س هـ^س ء س
= س هـ^س - ∫ هـ^س ء س
= س هـ^س - هـ^س + ث

② ∫ س هـ^-س ء س
= - س هـ^-س
- ∫ - هـ^-س ء س
= - س هـ^-س - (- هـ^-س)/(-١) + ث
= - س هـ^-س - هـ^-س + ث

③ ∫ ٤ س هـ^٢س ء س
= ٢ س هـ^٢س
- ∫ ٢ هـ^٢س ء س
= ٢ س هـ^٢س - (٢ هـ^٢س)/٢ + ث
= ٢ س هـ^٢س - هـ^٢س + ث

④ ∫ (س + ١) هـ^-٤س ء س
= -١/٤ (س + ١) هـ^-٤س
- ∫ -١/٤ هـ^-٤س ء س
= -١/٤ (س + ١) هـ^-٤س
- (-١/٤) × (١/-٤ هـ^-٤س) + ث
= -١/٤ (س + ١) هـ^-٤س - ١/١٦ هـ^-٤س + ث

⑤ ∫ س/هـ^٢س ء س
= ∫ س . هـ^-٢س ء س
= -١/٢ س هـ^-٢س - ∫ -١/٢ هـ^-٢س ء س
= -١/٢ س هـ^-٢س + ١/٢ (١/-٢ هـ^-٢س) + ث
= -١/٢ س هـ^-٢س - ١/٤ هـ^-٢س + ث

⑥ ∫ (٣ س + ٥)/هـ^٢س ء س
= ∫ (٣ س + ٥) هـ^-٢س ء س
= -١/٢ (٣ س + ٥) هـ^-٢س
- ∫ (-٣/٢) هـ^-٢س ء س
= -١/٢ (٣ س + ٥) هـ^-٢س
+ ٣/٢ × ١/-٢ هـ^-٢س + ث
= -١/٢ (٣ س + ٥) هـ^-٢س - ٣/٤ هـ^-٢س + ث

⑦ ∫ لو_هـ س ء س
= س لو_هـ س - ∫ ء س
= س لو_هـ س - س + ث

⑧ ∫ لو_هـ (س + ١) ء س
= س لو_هـ (س + ١)
- ∫ س/(س + ١) ء س
= س لو_هـ (س + ١) - ∫ (س + ١ - ١)/(س + ١) ء س

= س لو_هـ (س + ١) - ∫ (١ - ١/(س + ١)) ء س
= س لو_هـ (س + ١) - (س - لو_هـ |س + ١|) + ث
= س لو_هـ (س + ١) - س + لو_هـ |س + ١| + ث

⑨ ∫ لو_هـ (س/٢) ء س
= س لو_هـ (س/٢) - ∫ ء س
= س لو_هـ (س/٢) - س + ث

⑩ ∫ لو_هـ س^٢ ء س
= ٢ ∫ لو_هـ |س| ء س
= ٢ [س لو_هـ |س| - ∫ ء س]
= ٢ س لو_هـ |س| - ٢ س + ث

⑪ ∫ س لو_هـ (س + ١)
= ١/٢ س^٢ لو_هـ (س + ١)
- ١/٢ ∫ س^٢/(س + ١) ء س
بوضع ع = س + ١ ∴ ء ع = ء س
، س = ع - ١
= ١/٢ س^٢ لو_هـ (س + ١) - ١/٢ ∫ (ع - ١)^٢/ع ء ع
= ١/٢ س^٢ لو_هـ (س + ١) - ١/٢ ∫ (ع^٢ - ٢ ع + ١)/ع ء ع
= ١/٢ س^٢ لو_هـ (س + ١) - ١/٢ ∫ (ع - ٢ + ١/ع) ء ع
= ١/٢ س^٢ لو_هـ (س + ١)
- ١/٢ (١/٢ ع^٢ - ٢ ع + لو_هـ |ع|) + ث
= ١/٢ س^٢ لو_هـ (س + ١) - ١/٤ ع^٢
+ ع - ١/٢ لو_هـ |ع| + ث
= ١/٢ س^٢ لو_هـ (س + ١) - ١/٤ (س + ١)^٢
+ (س + ١) - ١/٢ لو_هـ |س + ١| + ث

⑫ ∫ س^٣ لو_هـ س ء س
= ١/٤ س^٤ لو_هـ س
- ∫ ١/٤ س^٣ ء س
= ١/٤ س^٤ لو_هـ س - ١/٤ × ١/٤ س^٤ + ث
= ١/٤ س^٤ لو_هـ س - ١/١٦ س^٤ + ث

⑬ ∫ ١/(س لو_هـ س) ء س = ∫ (١/س) × ١/(لو_هـ س) ء س
= لو_هـ |لو_هـ س| + ث

⑭ ∫ ١/(س (لو_هـ س)^٢) ء س = ∫ (١/س) (لو_هـ س)^-٢ ء س
= ١/-١ (لو_هـ س)^-١ + ث

⑮ ∫ √س لو_هـ س ء س
= ٢/٣ س^٣/٢ لو_هـ س
- ∫ ٢/٣ س^٣/٢ × ١/س ء س
= ٢/٣ س^٣/٢ لو_هـ س - ٢/٣ ∫ س^١/٢ ء س
= ٢/٣ س^٣/٢ لو_هـ س - ٢/٣ × ٢/٣ س^٣/٢ + ث
= ٢/٣ س^٣/٢ لو_هـ س - ٤/٩ س^٣/٢ + ث

⑯ ∫ لو_هـ س/√س ء س
= ٢ √س لو_هـ س
- ∫ ٢ س^-١/٢ ء س
= ٢ √س لو_هـ س - ٢ × ٢ √س + ث
= ٢ √س لو_هـ س - ٤ √س + ث

⑰ ∫ لو_هـ ٥س/س ء س = ∫ ١/س لو_هـ ٥س ء س
= ١/٢ (لو_هـ ٥س)^٢ + ث

⑱ ∫ (لو_هـ س)^٢/س ء س = ∫ ١/س (لو_هـ س)^٢ ء س
= ١/٣ (لو_هـ س)^٣ + ث

⑲ $\int لو_{هـ} س \, \frac{ءس}{س^{2}}$

$= -س^{-1} لو_{هـ} س$

$+ \int \frac{1}{س^{2}} ءس = \frac{-1}{س} لو_{هـ} س - س^{-1} + ث$

$= \frac{-1}{س} لو_{هـ} س - \frac{1}{س} + ث$

$لو_{هـ} س$	$س^{-2}$
$\frac{1}{س}$	$-س^{-1}$

⑳ $\int س^{2} لو_{هـ} س^{2} ءس$

$= 2\int س^{2} لو_{هـ} س ءس$

$= \frac{2}{3} س^{3} لو_{هـ} س - \frac{2}{3}\int س^{2} ءس$

$= \frac{2}{3} س^{3} لو_{هـ} س - \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} س^{3} + ث$

$= \frac{2}{3} س^{3} لو_{هـ} س - \frac{2}{9} س^{3} + ث$

$لو_{هـ} س$	$س^{2}$
$\frac{1}{س}$	$\frac{1}{3} س^{3}$

٥

① $\int 2س \, هـ^{3س^{2}+1} ءس$

$= \frac{1}{3}\int 6س \, هـ^{3س^{2}+1} ءس$

$= \frac{1}{3} هـ^{3س^{2}+1} + ث$

② $\int س^{2} هـ^{س^{3}} ءس$

$= \frac{1}{3}\int 3س^{2} هـ^{س^{3}} ءس$

$= \frac{1}{3} هـ^{س^{3}} + ث$

③ $\int \frac{هـ^{2س}}{هـ^{2س}+3} ءس$

$= \frac{1}{2}\int (2هـ^{2س}) \times \frac{1}{هـ^{2س}+3} ءس$

$= \frac{1}{2} لو_{هـ} |هـ^{2س}+3| + ث$

$= \frac{1}{2} لو_{هـ} (هـ^{2س}+3) + ث$

④ $\int \frac{4هـ^{3س}}{1-هـ^{3س}} ءس$

$= \frac{-4}{3}\int -3هـ^{3س} \times \frac{1}{1-هـ^{3س}} ءس$

$= \frac{-4}{3} لو_{هـ} |1-هـ^{3س}| + ث$

⑤ $\int (3-س) هـ^{6س-س^{2}} ءس$

$= \frac{1}{2}\int (6-2س) هـ^{6س-س^{2}} ءس$

$= \frac{1}{2} هـ^{6س-س^{2}} + ث$

⑥ $\int \frac{هـ^{\sqrt{س+1}}}{\sqrt{س+1}} ءس$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{2\sqrt{س+1}} هـ^{\sqrt{س+1}} ءس$

$= \frac{1}{2} هـ^{\sqrt{س+1}} + ث$

⑦ $\int \frac{هـ^{-س}-1}{هـ^{-س}+س} ءس$

$= -\int (-هـ^{-س}+1) \times \frac{1}{هـ^{-س}+س} ءس$

$= -لو_{هـ} |هـ^{-س}+س| + ث$

⑧ $\int \frac{هـ^{2س}+س}{هـ^{2س}+س^{2}} ءس$

$= \frac{1}{2}\int (2هـ^{2س}+2س)\left(\frac{1}{هـ^{2س}+س^{2}}\right) ءس$

$= \frac{1}{2} لو_{هـ} |هـ^{2س}+س^{2}| + ث$

⑨ $\int \frac{س^{2}+1}{س^{3}-س} ءس$

(بأخذ $س^{2}$ عامل مشترك من البسط والمقام)

$= \int \frac{\cancel{س^{2}}\left(1+\frac{1}{س^{2}}\right)}{\cancel{س^{2}}\left(س-\frac{1}{س}\right)} ءس$

$= \int \frac{1+\frac{1}{س^{2}}}{س-\frac{1}{س}} ءس$

(لاحظ أن البسط هو تفاضل للمقام)

$= لو_{هـ} |س-\frac{1}{س}| + ث$

٦

① ∴ $\int س^{2} هـ^{س} ءس$

$= س^{2}هـ^{س} - 2س هـ^{س}$

$+ 2هـ^{س} + ث$

تفاضل		تكامل
$س^{2}$	+	$هـ^{س}$
$2س$	−	$هـ^{س}$
2	+	$هـ^{س}$
صفر		$هـ^{س}$

② ∴ $\int 9س^{2} هـ^{3س} ءس$

$= 3س^{2} هـ^{3س}$

$- 2س هـ^{3س}$

$+ \frac{2}{3} هـ^{3س} + ث$

تفاضل		تكامل
$9س^{2}$	+	$هـ^{3س}$
$18س$	−	$\frac{1}{3}هـ^{3س}$
18	+	$\frac{1}{9}هـ^{3س}$
صفر		$\frac{1}{27}هـ^{3س}$

③ ∴ $\int س^{2} هـ^{-3س} ءس$

$= \frac{-1}{3} س^{2} هـ^{-3س}$

$- \frac{2}{9} س هـ^{-3س}$

$- \frac{2}{27} هـ^{-3س} + ث$

تفاضل		تكامل
$س^{2}$	+	$هـ^{-3س}$
$2س$	−	$\frac{-1}{3}هـ^{-3س}$
2	+	$\frac{1}{9}هـ^{-3س}$
صفر		$\frac{-1}{27}هـ^{-3س}$

④ $\int س^{3} هـ^{س^{2}} ءس$

$= \int س^{2} . س هـ^{س^{2}} ءس$

$= \frac{1}{2} س^{2} هـ^{س^{2}}$

$- \frac{1}{2}\int 2س هـ^{س^{2}} ءس$

$= \frac{1}{2} س^{2} هـ^{س^{2}} - \frac{1}{2} هـ^{س^{2}} + ث$

$س^{2}$	$س هـ^{س^{2}}$
$2س$	$\frac{1}{2} هـ^{س^{2}}$

⑤ ∴ $\int س^{2} هـ^{س+2} ءس$

$= س^{2} هـ^{س+2}$

$- 2س هـ^{س+2}$

$+ 2هـ^{س+2} + ث$

تفاضل		تكامل
$س^{2}$	+	$هـ^{س+2}$
$2س$	−	$هـ^{س+2}$
2	+	$هـ^{س+2}$
صفر		$هـ^{س+2}$

⑥ ∴ $\int (س+1)^{2} هـ^{2س} ءس$

$= \frac{1}{2}(س+1)^{2} هـ^{2س}$

$- \frac{1}{2}(س+1) هـ^{2س}$

$+ \frac{1}{4} هـ^{2س} + ث$

تفاضل		تكامل
$(س+1)^{2}$	+	$هـ^{2س}$
$2(س+1)$	−	$\frac{1}{2}هـ^{2س}$
2	+	$\frac{1}{4}هـ^{2س}$
صفر		$\frac{1}{8}هـ^{2س}$

⑦ ∴ $\int (س هـ^{س})^{2} ءس$

$= \int س^{2} هـ^{2س} ءس$

$= \frac{1}{2} س^{2} هـ^{2س}$

$- \frac{1}{2} س هـ^{2س}$

$+ \frac{1}{4} هـ^{2س} + ث$

تفاضل		تكامل
$س^{2}$	+	$هـ^{2س}$
$2س$	−	$\frac{1}{2}هـ^{2س}$
2	+	$\frac{1}{4}هـ^{2س}$
صفر		$\frac{1}{8}هـ^{2س}$

⑧

$س هـ^{2س}$	$(2س+1)^{-2}$
$هـ^{2س}(2س+1)$	$\frac{(2س+1)^{-1}}{-2}$

∴ $\int \frac{س هـ^{2س}}{(2س+1)^{2}} ءس = \frac{-س}{2}(2س+1)^{-1} هـ^{2س}$

$-\frac{1}{2}\int -هـ^{2س}(2س+1) \times (2س+1)^{-1} ءس$

$= -\frac{س}{2}(2س+1)^{-1} هـ^{2س} + \frac{1}{2}\int هـ^{2س} ءس$

$= -\frac{س}{2}(2س+1)^{-1} هـ^{2س} + \frac{1}{4} هـ^{2س} + ث$

⑨

$س هـ^{س}$	$(س+1)^{-2}$
$س هـ^{س} + هـ^{س} = هـ^{س}(س+1)$	$-(س+1)^{-1}$

∴ $\int \frac{س هـ^{س}}{(س+1)^{2}} ءس$

$= -س(س+1)^{-1} هـ^{س} + \int هـ^{س} ءس$

$= -س(س+1)^{-1} هـ^{س} + هـ^{س} + ث$

⑩ $\int \frac{س^{3} هـ^{س^{2}}}{(س^{2}+1)^{2}} ءس$

بوضع $س^{2} = ع$

∴ $2س ءس = ءع$

∴ $\int \frac{س^{3} هـ^{س^{2}}}{(س^{2}+1)^{2}} ءس$

$= \frac{1}{2}\int \frac{س^{2} هـ^{س^{2}}}{(س^{2}+1)^{2}} \times 2س ءس$

$ع هـ^{ع}$	$(ع+1)^{-2}$
$ع هـ^{ع} + هـ^{ع} = هـ^{ع}(ع+1)$	$-(ع+1)^{-1}$

$= \frac{١}{٢} \int \frac{ع\, هـ^{ع}}{(ع + ١)^{٢}} ءع$

$= \frac{١}{٢} \left[-ع\, هـ^{ع} (ع + ١)^{-١} + \int هـ^{ع} ءع \right]$

$= -\frac{١}{٢} ع\, هـ^{ع} (ع + ١)^{-١} + \frac{١}{٢} هـ^{ع} + ث$

$= -\frac{١}{٢} \left(\frac{س^{٢} هـ^{س^{٢}}}{س^{٢} + ١} \right) + \frac{١}{٢} هـ^{س^{٢}} + ث$

⑪ $\int \frac{هـ^{\frac{١}{س}}}{س^{٢}} ءس = -\int \frac{-١}{س^{٢}} هـ^{\frac{١}{س}} ءس$

$= -هـ^{\frac{١}{س}} + ث$

⑫ $\int (لو_{هـ} س)^{٢} ءس$

$(لو_{هـ} س)^{٢}$	١
$(٢ لو_{هـ} س)(\frac{١}{س})$	س

$= س (لو_{هـ} س)^{٢}$

$- \int ٢ لو_{هـ} س\, ءس$

$لو_{هـ} س$	٢
$\frac{١}{س}$	٢س

$= س (لو_{هـ} س)^{٢}$

$- [٢ س لو_{هـ} س - \int ٢ ءس]$

$= س (لو_{هـ} س)^{٢} - ٢ س لو_{هـ} س$

$+ ٢ س + ث$

⑬ $\int س (لو_{هـ} س)^{٢} ءس$

$(لو_{هـ} س)^{٢}$	س
$٢ لو_{هـ} س (\frac{١}{س})$	$\frac{١}{٢} س^{٢}$

$= \frac{١}{٢} س^{٢} (لو_{هـ} س)^{٢}$

$- \int س لو_{هـ} س\, ءس$

$= \frac{١}{٢} س^{٢} (لو_{هـ} س)^{٢}$

$- [\frac{١}{٢} س^{٢} لو_{هـ} س$

$لو_{هـ} س$	س
$\frac{١}{س}$	$\frac{١}{٢} س^{٢}$

$- \int \frac{١}{٢} س\, ءس]$

$= \frac{١}{٢} س^{٢} (لو_{هـ} س)^{٢}$

$- \frac{١}{٢} س^{٢} لو_{هـ} س + \frac{١}{٤} س^{٢} + ث$

⑭ $\int س^{٣} هـ^{س} ءس$

$= س^{٣} هـ^{س} - ٣ س^{٢} هـ^{س}$

$+ ٦ س هـ^{س} - ٦ هـ^{س} + ث$

تفاضل		تكامل
$س^{٣}$	(+)	$هـ^{س}$
$٣س^{٢}$	(−)	$هـ^{س}$
$٦س$	(+)	$هـ^{س}$
٦	(−)	$هـ^{س}$
صفر		$هـ^{س}$

٧

① $\int س \sqrt{٤ - س}\, ءس$ بوضع $ع = ٤ - س$

$\therefore س = ٤ - ع$

$\therefore ءس = -ءع$

$\therefore \int س \sqrt{٤ - س}\, ءس$

$= \int (٤ - ع) \times \sqrt{ع} \times -ءع$

$= \int (-٤ ع^{\frac{١}{٢}} + ع^{\frac{٣}{٢}}) ءع$

$= \frac{-٨}{٣} ع^{\frac{٣}{٢}} + \frac{٢}{٥} ع^{\frac{٥}{٢}} + ث = \frac{-٨}{٣} (٤ - س)^{\frac{٣}{٢}}$

$+ \frac{٢}{٥} (٤ - س)^{\frac{٥}{٢}} + ث$

حل آخر : $\int س \sqrt{٤ - س}\, ءس$

$= -\int -س (٤ - س)^{\frac{١}{٢}} ءس$

$= -\int (٤ - س - ٤) (٤ - س)^{\frac{١}{٢}} ءس$

$= -\int (٤ - س)^{\frac{٣}{٢}} - ٤ (٤ - س)^{\frac{١}{٢}} ءس$

$= -\left(\frac{-٢}{٥} (٤ - س)^{\frac{٥}{٢}} + \frac{٨}{٣} (٤ - س)^{\frac{٣}{٢}} \right) + ث$

$= \frac{٢}{٥} (٤ - س)^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٨}{٣} (٤ - س)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

② $\int \frac{س}{\sqrt{٤ + ٥ س}} ءس$

بوضع $٤ + ٥ س = ع$

$\therefore س = \frac{١}{٥} ع - \frac{٤}{٥}$

$\therefore ءس = \frac{١}{٥} ءع$

$\therefore \int \frac{س}{\sqrt{٤ + ٥ س}} ءس = \int \frac{\frac{١}{٥} ع - \frac{٤}{٥}}{\sqrt{ع}} \times \frac{١}{٥} ءع$

$= \int (\frac{١}{٢٥} ع^{\frac{١}{٢}} - \frac{٤}{٢٥} ع^{-\frac{١}{٢}}) ءع$

$= \frac{٢}{٧٥} ع^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٨}{٢٥} ع^{\frac{١}{٢}} + ث$

$= \frac{٢}{٧٥} (٤ + ٥ س)^{\frac{٣}{٢}}$

$- \frac{٨}{٢٥} (٤ + ٥ س)^{\frac{١}{٢}} + ث$

حل آخر :

$\int \frac{س}{\sqrt{٤ + ٥ س}} ءس = \frac{١}{٥} \int ٥ س (٤ + ٥ س)^{-\frac{١}{٢}} ءس$

$= \frac{١}{٥} \int (٥ س + ٤ - ٤)$

$(٥ س + ٤)^{-\frac{١}{٢}} ءس$

$= \frac{١}{٥} \int [(٥ س + ٤)^{\frac{١}{٢}}$

$- ٤ (٥ س + ٤)^{-\frac{١}{٢}}] ءس$

$= \frac{١}{٥} \left[\frac{(٥ س + ٤)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢} \times ٥} \right.$

$\left. - \frac{٤ (٥ س + ٤)^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢} \times ٥} \right] + ث$

$= \frac{٢}{٧٥} (٥ س + ٤)^{\frac{٣}{٢}}$

$- \frac{٨}{٢٥} (٥ س + ٤)^{\frac{١}{٢}} + ث$

③ $\int \frac{٤ س}{\sqrt{٢ س + ١}} ءس$

بوضع $٢ س + ١ = ع$ $\therefore س = \frac{١}{٢} ع - \frac{١}{٢}$

$\therefore ءس = \frac{١}{٢} ءع$

$\therefore \int \frac{٤ س}{\sqrt{٢ س + ١}} ءس = \int \frac{٢ ع - ٢}{\sqrt{ع}} \times \frac{١}{٢} ءع$

$= \int (ع - ١) \times ع^{-\frac{١}{٢}} ءع$

$= \int (ع^{\frac{١}{٢}} - ع^{-\frac{١}{٢}}) ءع$

$= \frac{٣}{٥} ع^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٣}{٢} ع^{\frac{٣}{٢}} + ث$

$= \frac{٣}{٥} (٢ س + ١)^{\frac{٥}{٢}}$

$- \frac{٣}{٢} (٢ س + ١)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

حل آخر :

$\int \frac{٤ س}{\sqrt{٢ س + ١}} ءس$

$= ٢ \int ٢ س (٢ س + ١)^{-\frac{١}{٢}} ءس$

$= ٢ \int (٢ س + ١ - ١) (٢ س + ١)^{-\frac{١}{٢}} ءس$

$= ٢ \int ((٢ س + ١)^{\frac{١}{٢}} - (٢ س + ١)^{-\frac{١}{٢}}) ءس$

$= \frac{٣}{٥} (٢ س + ١)^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٣}{٢} (٢ س + ١)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

ثانيا مسائل على تطبيقات التكامل

١

① (د) ② (ب) ③ (ب) ④ (جـ) ⑤ (د)

⑥ (أ) ⑦ (د) ⑧ (ب) ⑨ (ب)

٢

ميل العمودى $= ٣ - س$

$\therefore$ ميل المماس $= \frac{ءص}{ءس} = \frac{-١}{٣ - س} = \frac{١}{س - ٣}$

بالتكامل $\therefore ص = \int \frac{١}{س - ٣} ءس = لو_{هـ} |س - ٣| + ث$

، $\because أ \in$ المنحنى $\therefore ٣ = لو_{هـ} |٢ - ٣| + ث$

$\therefore ث = ٣$

$\therefore$ معادلة المنحنى : $ص = لو_{هـ} |س - ٣| + ٣$

٣

ميل المماس $= \frac{ءص}{ءس} = س \sqrt{س + ١}$

$\therefore ص = \int س \sqrt{س + ١}\, ءس$

$= \int (س + ١ - ١) (س + ١)^{\frac{١}{٢}} ءس$

$= \int ((س + ١)^{\frac{٣}{٢}} - (س + ١)^{\frac{١}{٢}}) ءس$

$= \frac{٢}{٥} (س + ١)^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٢}{٣} (س + ١)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

$\therefore (٠ ، \frac{١١}{١٥})$ على المنحنى

$\therefore \frac{١١}{١٥} = \frac{٢}{٥} (٠ + ١)^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٢}{٣} (٠ + ١)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

$\therefore ث = ١$

$\therefore$ معادلة المنحنى :

$ص = \frac{٢}{٥} (س + ١)^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٢}{٣} (س + ١)^{\frac{٣}{٢}} + ١$

٤

ميل المماس $= \frac{ءص}{ءس} = س\sqrt{س^2 + ١}$

$\therefore ص = \int س\sqrt{س^2+١}\ ءس$

$= \frac{١}{٢}\int (٢س)\sqrt{س^2+١}\ ءس$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٣}(س^2+١)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

$= \frac{١}{٣}(س^2+١)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

، ∵ النقطة (٠ ، ١) ∈ المنحنى

$\therefore ١ = \frac{١}{٣}(٠+١)^{\frac{٣}{٢}} + ث$ ∴ $ث = \frac{٢}{٣}$

∴ معادلة المنحنى: $ص = \frac{١}{٣}(س^2+١)^{\frac{٣}{٢}} + \frac{٢}{٣}$

٥

∵ ميل العمودي $= \frac{\sqrt{س}}{١ - س}$

∴ ميل المماس $= \frac{-(١ - س)}{\sqrt{س}} = -\sqrt{س} + \frac{١}{\sqrt{س}}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = -س^{\frac{١}{٢}} + س^{-\frac{١}{٢}}$

$\therefore ص = \int(-س^{\frac{١}{٢}} + س^{-\frac{١}{٢}})\ ءس$

$= \frac{-٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + ٢س^{\frac{١}{٢}} + ث$

، ∵ (٩ ، -١٢) على المنحنى

$\therefore -١٢ = \frac{-٢}{٣}(٩)^{\frac{٣}{٢}} + ٢(٩)^{\frac{١}{٢}} + ث$

∴ ث = ٠

∴ معادلة المنحنى هي: $ص = \frac{-٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + ٢س^{\frac{١}{٢}}$

أي أن: $ص = \frac{-٢}{٣}س\sqrt{س} + ٢\sqrt{س}$

٦

∵ ميل العمودي $= \frac{-٢ص}{س}$ ∴ ميل المماس $= \frac{س}{٢ص}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{س}{٢ص}$ ∴ ٢ص ءص = س ءس

$\therefore \int ٢ص\ ءص = \int س\ ءس$

$\therefore ص^2 = \frac{١}{٢}س^2 + ث$ ، (٠ ، ٣) على المنحنى

$\therefore ٩ = \frac{١}{٢}(٠)^2 + ث$ ∴ ث = ٩

∴ المعادلة: $ص^2 = \frac{١}{٢}س^2 + ٩$

$\therefore ٢ص^2 = س^2 + ١٨$

٧

∵ ميل المماس $= \frac{ءص}{ءس}$

$= س\ هـ^{٣س}$

$\therefore ص = \int س\ هـ^{٣س}\ ءس$

$= \frac{١}{٣}س\ هـ^{٣س} - \int \frac{١}{٣}هـ^{٣س}\ ءس$

$\therefore ص = \frac{١}{٣}س\ هـ^{٣س} - \frac{١}{٩}هـ^{٣س} + ث$

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة $(\frac{١}{٣} ، ٥)$

$\therefore ٥ = \frac{١}{٣}(\frac{١}{٣})هـ - \frac{١}{٩}هـ + ث$ ∴ ث = ٥

∴ المعادلة هي: $ص = \frac{١}{٣}س\ هـ^{٣س} - \frac{١}{٩}هـ^{٣س} + ٥$

٨

∵ ميل العمودي $= -(لو_هـ س)^{-٢}$

∴ ميل المماس $= \frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{(لو_هـ س)^{-٢}} = (لو_هـ س)^2$

$\therefore ص = \int (لو_هـ س)^2\ ءس$

، بوضع $لو_هـ س = ع$

$\therefore س = هـ^ع$

$\therefore ءس = هـ^ع . ءع$

$\therefore ص = \int ع^2 . هـ^ع\ ءع$

تفاضل	تكامل
$ع^2$	$هـ^ع$ (+)
$٢ع$	$هـ^ع$ (−)
٢	$هـ^ع$ (+)
صفر	$هـ^ع$

$\therefore ص = ع^2 \times هـ^ع - ٢ع\ هـ^ع + ٢هـ^ع + ث$

$= س(لو_هـ س)^2 - ٢س\ لو_هـ س + ٢س + ث$

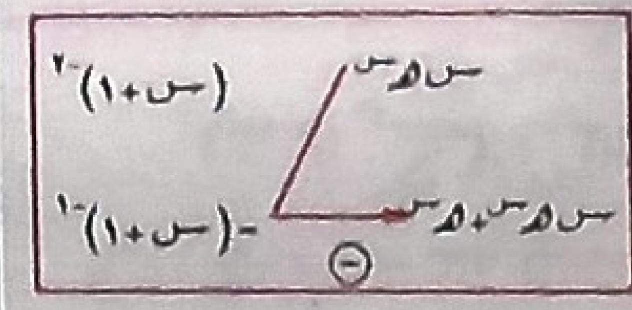
، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (هـ ، هـ)

∴ هـ = هـ - ٢هـ + ٢هـ + ث ∴ ث = ٠

$\therefore ص = س(لو_هـ س)^2 - ٢س\ لو_هـ س + ٢س$

٩

ميل المماس $= \frac{ءص}{ءس}$



$= \frac{س\ هـ^س}{(س + ١)^2}$

$\therefore ص = \int \frac{س\ هـ^س}{(س + ١)^2}\ ءس$

$\therefore ص = \frac{-س\ هـ^س}{س + ١} - \int \frac{(س + ١)\ هـ^س}{-(س + ١)}\ ءس$

$= \frac{-س\ هـ^س}{س + ١} + هـ^س + ث$

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٢هـ)

$\therefore ٢هـ = \frac{-هـ}{٢} + هـ + ث$ ∴ $ث = \frac{٣}{٢}هـ$

∴ المعادلة هي: $ص = \frac{-س\ هـ^س}{س + ١} + هـ^س + \frac{٣}{٢}هـ$

١٠

$\frac{ءح}{ءن} = ٠.٠٤ن - ٤٠$

$\therefore ح = ٠.٠٢ن^2 - ٤٠ن + ث$

، ∵ ح = ٩٨٠ عندما ن = ٣٠

$\therefore ٩٨٠ = ٠.٠٢ \times (٣٠)^2 - ٤٠(٣٠) + ث$

∴ ث = ٢٠٠٠

$\therefore ح = ٠.٠٢ن^2 - ٤٠ن + ٢٠٠٠$

، عندما ن = ٠ نحصل على سعة الإناء = ٢٠٠٠ سم³

، يصبح الإناء فارغًا عندما يكون حجم السائل = صفر

$\therefore ٠.٠٢ن^2 - ٤٠ن + ٢٠٠٠ = ٠$

$\therefore ن^2 - ٢٠٠٠ن + ١٠٠٠٠٠٠ = ٠$

$\therefore (ن - ١٠٠٠)^2 = ٠$ ∴ ن = ١٠٠٠ ثانية

١١

$\because \frac{ءص}{ءس} = \frac{س}{ص}$ ∴ ص ءص = س ءس

$\therefore \int ص\ ءص = \int س\ ءس$

$\therefore \frac{ص^2}{٢} = \frac{س^2}{٢} + ث$ ∴ $ص^2 = س^2 + ثَ$

، ∵ (١ ، ٢) تقع على المنحنى

∴ ٤ = ١ + ثَ ∴ ثَ = ٣

∴ معادلة المنحنى: $ص^2 = س^2 + ٣$

١٢

$\because \frac{ءص}{ءس} = س\ هـ^ص$ ∴ $س\ ءس = هـ^{-ص}\ ءص$

$\therefore \int س\ ءس = \int هـ^{-ص}\ ءص$

$\therefore \frac{١}{٢}س^2 = -هـ^{-ص} + ث$

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٠)

$\therefore \frac{١}{٢} = -١ + ث$ ∴ $ث = ١\frac{١}{٢}$

∴ معادلة المنحنى هي: $هـ^{-ص} + \frac{١}{٢}س^2 = ١\frac{١}{٢}$

١٣

∵ $دَ(س) = ٣س^2 - ٦س - ٩$ (١)

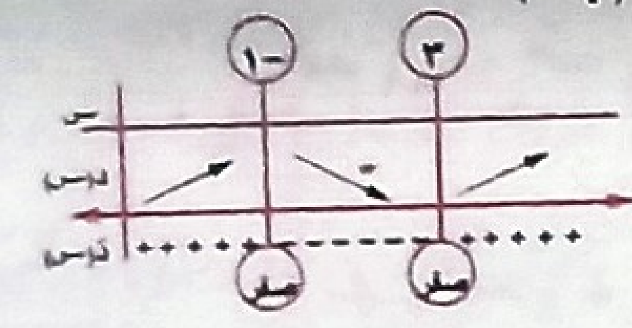
وبوضع دَ(س) = صفر

$\therefore ٣س^2 - ٦س - ٩ = $ صفر

$\therefore س^2 - ٢س - ٣ = $ صفر

∴ (س - ٣)(س + ١) = صفر

∴ س = ٣ أ، -١



∴ هناك قيمة عظمى محلية للدالة عند س = -١ وهي ١٧

، هناك قيمة صغرى محلية للدالة عند س = ٣

ومن تكامل المعادلة (١):

$\therefore د(س) = س^3 - ٣س^2 - ٩س + ث$

، ∵ د(-١) = ١٧

$\therefore (-١)^3 - ٣(-١)^2 - ٩(-١) + ث = ١٧$

∴ ث = ١٢

∴ د (س) = س^{٣} − ٣ س^{٢} − ٩ س + ١٢

∴ القيمة الصغرى المحلية للدالة هى :

د (٣) = ٣^{٣} − ٣ (٣)^{٢} − ٩ (٣) + ١٢ = −١٥

١٤

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = أ س + ب

، ∵ للمنحنى نقطة انقلاب عند س = ٠

∴ $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = ٠   ∴ ٠ = ٠ + ب   ∴ ب = ٠

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ∫ أ س ء س = $\frac{\text{أ}}{٢}$ س^{٢} + حـ (حـ ثابت)

، ∵ لها قيمة صغرى محلية عند (١ ، ٠)

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠ عند س = ١

∴ ٠ = $\frac{\text{أ}}{٢}$ + حـ   منها أ = −٢ حـ   (١)

∴ ص = ∫ ($\frac{\text{أ}}{٢}$ س^{٢} + حـ) ء س

= $\frac{\text{أ}}{٦}$ س^{٣} + حـ س + ء

، ∵ المنحنى يمر بالنقطتين (٠ ، ٢) ، (١ ، ٠)

∴ ٢ = $\frac{\text{أ}}{٦}$ (٠) + حـ (٠) + ء   ∴ ء = ٢

، ٠ = $\frac{\text{أ}}{٦}$ (١) + حـ (١) + ٢

∴ أ + ٦ حـ = −١٢   (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ −٢ حـ + ٦ حـ = −١٢   ∴ ٤ حـ = −١٢

∴ حـ = −٣   ∴ أ = ٦

∴ معادلة المنحنى ص = س^{٣} − ٣ س + ٢

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣ س^{٢} − ٣

، بوضع $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠   ∴ س = ± ١

، ∵ عند س = ١ توجد قيمة صغرى

، ∵ ($\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$)$_{\text{س} = -١}$ < ٠

∴ عندها قيمة عظمى محلية

∴ *القيمة العظمى المحلية هى (ص)$_{\text{س} = -١}$ = ٤*

١٥

∴ $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = ٦ س − ٢   (بالتكامل)

∴ صَ = ٣ س^{٢} − ٢ س + ث

∴ ٢ = ٢٧ − ٦ + ث   ∴ ث = −١٩

∴ صَ = ٣ س^{٢} − ٢ س − ١٩

(بالتكامل مرة أخرى)

∴ ص = س^{٣} − س^{٢} − ١٩ س + ثَ

∴ ١ = ٢٧ − ٩ − ٥٧ + ثَ   ∴ ثَ = ٤٠

∴ معادلة المنحنى :

ص = س^{٣} − س^{٢} − ١٩ س + ٤٠

١٦

∵ $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = $\frac{٢}{\text{س}^{٣}}$

وبإجراء التكامل للطرفين بالنسبة إلى س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ∫ ٢ س$^{-٣}$ ء س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{-١}{\text{س}^{٢}}$ + ث$_{١}$

، ∵ ميل المماس عند النقطة (٢ ، $\frac{٥}{٢}$) = $\frac{٣}{٤}$

∴ [$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$]$_{(٢ ، \frac{٥}{٢})}$ = $\frac{٣}{٤}$

∴ $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{-١}{٤}$ + ث$_{١}$ ∴ ث$_{١}$ = ١

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{-١}{\text{س}^{٢}}$ + ١ وبإجراء التكامل مرة أخرى

∴ ص = $\frac{١}{\text{س}}$ + س + ث$_{٢}$

∵ المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، $\frac{٥}{٢}$) فهى تحقق معادلته

∴ $\frac{٥}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ + ٢ + ث$_{٢}$ ∴ ث$_{٢}$ = ٠

∴ معادلة المنحنى هى : ص = $\frac{١}{\text{س}}$ + س

١٧

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ∫ (٦ − ٦ س) ء س

= ٦ س − ٣ س^{٢} + ث$_{١}$

، ∵ النقطة (٠ ، −٦) موقع نهاية صغرى محلية

∴ ($\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$)$_{\text{س} = ٠}$ = ٠

∴ ث$_{١}$ = صفر   ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦ س − ٣ س^{٢}

∴ ص = ∫ (٦ س − ٣ س^{٢}) ء س

= ٣ س^{٢} − س^{٣} + ث$_{٢}$

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، −٦)

∴ تحقق معادلته   ∴ ث$_{٢}$ = −٦

∴ معادلة المنحنى هى : ص = ٣ س^{٢} − س^{٣} − ٦

١٨

∵ دً (س) = ٦ س − ٤

∴ دَ (س) = ٣ س^{٢} − ٤ س + ث$_{١}$

، عندما س = ٣ فإن : دَ (س) = ٠

∴ ٣ × ٩ − ٤ × ٣ + ث$_{١}$ = ٠   ∴ ث$_{١}$ = −١٥

∴ دَ (س) = ٣ س^{٢} − ٤ س − ١٥

∴ د (س) = س^{٣} − ٢ س^{٢} − ١٥ س + ث$_{٢}$

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (١ ، −٥)

∴ −٥ = ١ − ٢ − ١٥ + ث$_{٢}$ ∴ ث$_{٢}$ = ١١

∴ د (س) = س^{٣} − ٢ س^{٢} − ١٥ س + ١١

، بوضع دَ (س) = ٠   ∴ ٣ س^{٢} − ٤ س − ١٥ = ٠

∴ (٣ س + ٥) (س − ٣) = ٠

∴ س = $\frac{-٥}{٣}$ أ، س = ٣

∴ الدالة لها قيمة عظمى محلية عند س = $\frac{-٥}{٣}$

∴ د ($\frac{-٥}{٣}$) = $\frac{٦٩٧}{٢٧}$ وهى القيمة العظمى المحلية.

١٩

ميل المماس = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦ س^{٢} + ب س

∴ ص = ∫ (٦ س^{٢} + ب س) ء س

∴ ص = ٢ س^{٣} + $\frac{\text{ب}}{٢}$ س^{٢} + ث

، ∵ د (٠) = ٥   ∴ ٥ = ٠ + ٠ + ث

∴ ث = ٥

، ∵ د (٢) = −٣

∴ −٣ = ١٦ + ٢ ب + ٥

∴ ب = −١٢

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦ س^{٢} − ١٢ س

، بوضع $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

∴ س = ٠ أو س = ٢

، $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = ١٢ س − ١٢

∴ ($\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$)$_{\text{س} = ٠}$ = −١٢ (لها قيمة عظمى)

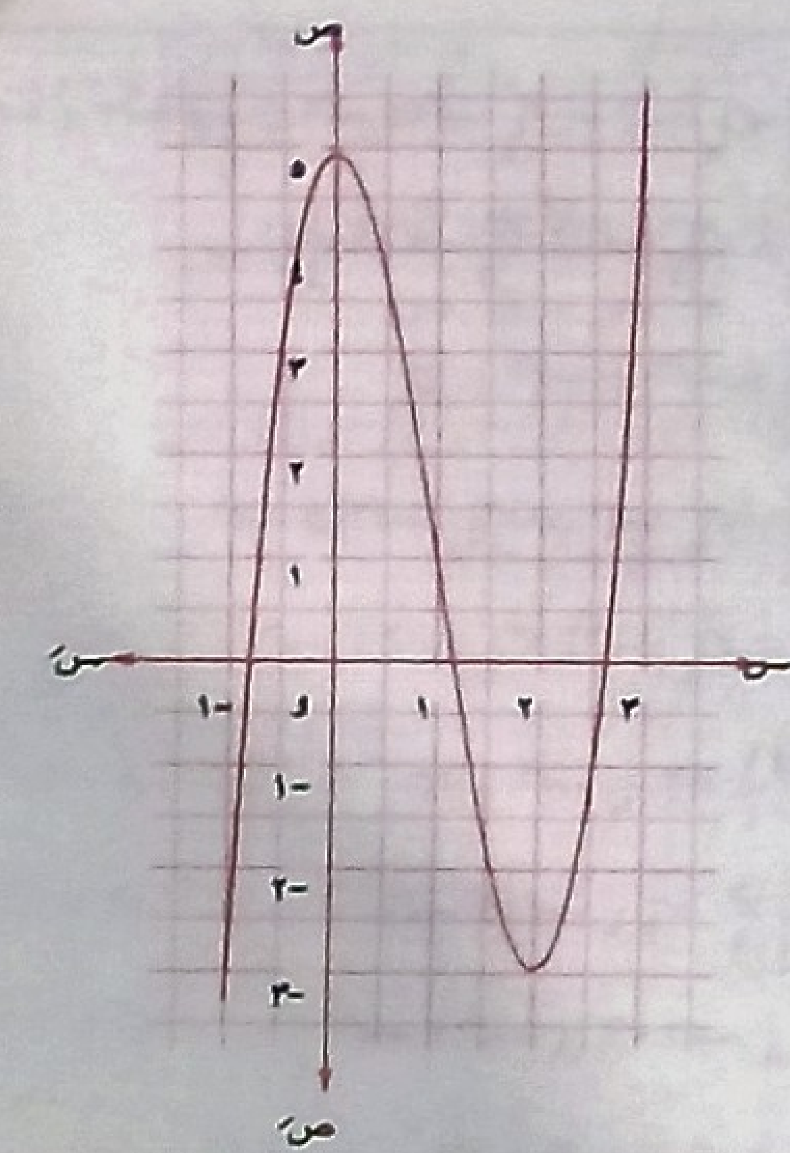
($\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$)$_{\text{س} = ٢}$ = ١٢ (لها قيمة صغرى)

، بوضع $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = ٠   ∴ س = ١

، ∵ ص = ٢ س^{٣} − ٦ س^{٢} + ٥

نعين نقط مساعدة عند س = ٣ ، س = −١

س	−١	٠	١	٢	٣
د (س)	−٣	٥	١	−٣	٥



٢٠

دَ(س) = ٣ (س^{٢} − ١) = ٣ س^{٢} − ٣

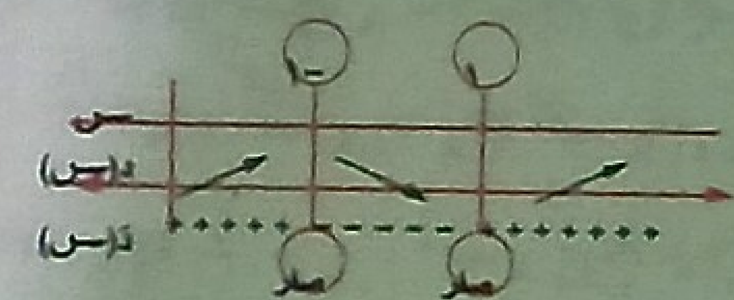
∴ ∫ دَ(س) ءس = ∫ ٣ (س^{٢} − ١) ءس

∴ د(س) = س^{٣} − ٣ س + ث يمر بالنقطة (−٢ ، −١)

∴ د(−٢) = −٨ + ٦ + ث = −١ ∴ ث = ١

∴ د(س) = س^{٣} − ٣ س + ١

، بوضع دَ(س) = ٠ ∴ س = ± ١



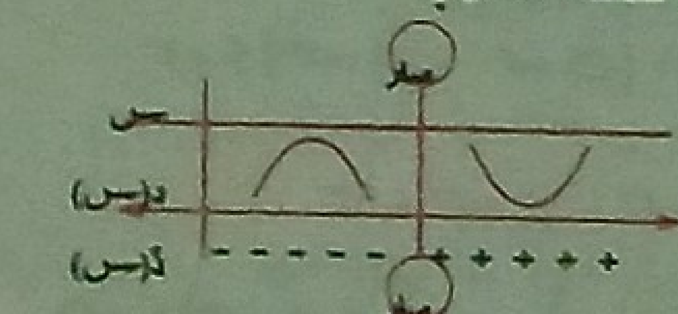
∴ د(−١) = ٣ قيمة عظمى محلية

، د(١) = −١ قيمة صغرى محلية

، دً(س) = ٦ س

، بوضع دً(س) = ٠ ∴ س = ٠

∴ (٠ ، ١) نقطة انقلاب

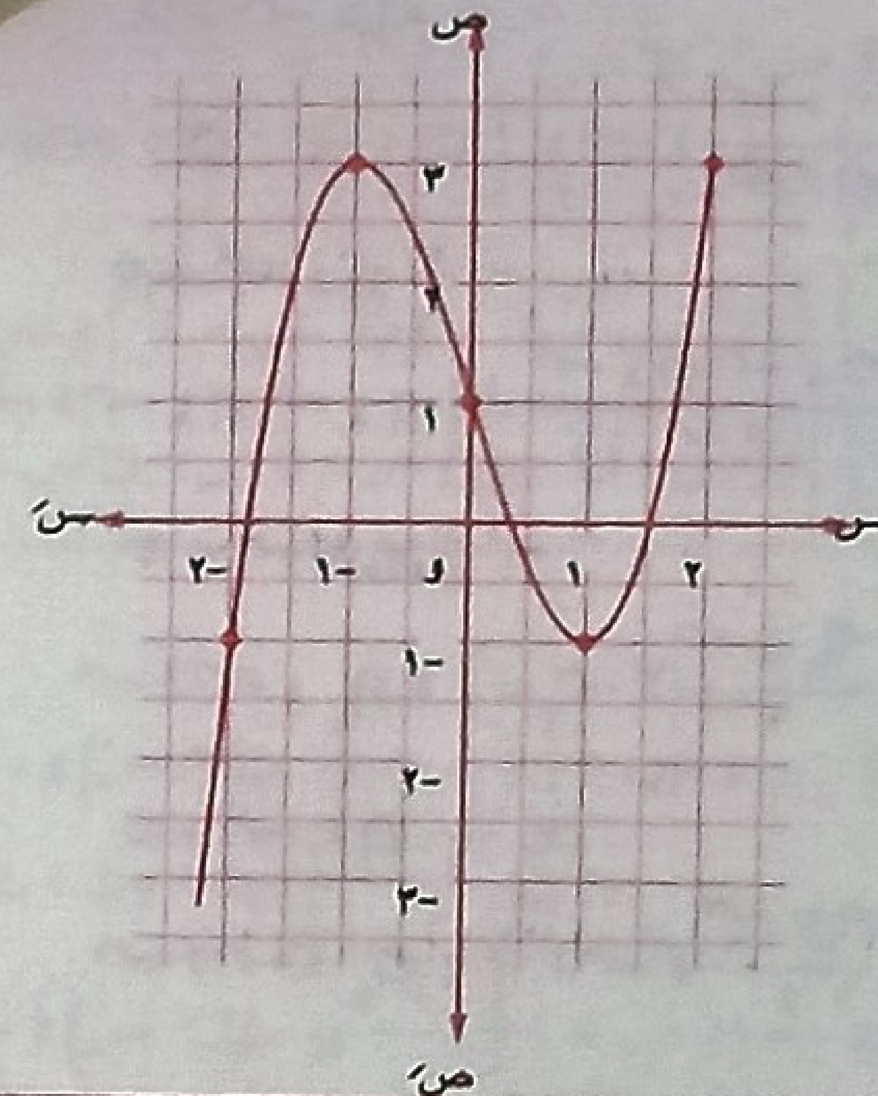


المنحنى يقطع محور الصادات عند س = ٠

∴ د(٠) = ١

* نعين نقط مساعدة : د(٢) = ٣ ، د(−٢) =

س	−٢	−١	٠	١	٢
د(س)	−١	٣	١	−١	٣



٢١

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = ٦ − ١٢ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ∫ (٦ − ١٢ س) ءس

= ٦ س − ٦ س^{٢} + ث$_{١}$

، ∵ توجد نقطة حرجة عند س = ١

∴ ٠ = ٦ − ٦ + ث$_{١}$ ∴ ث$_{١}$ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦ س − ٦ س^{٢} (١)

، بوضع $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ ∴ س = ٠ أ، ١

عند س = ١ فإن $\left(\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}\right)$ < ٠ (توجد قيمة عظمى)

، عند س = ٠ فإن $\left(\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}\right)$ > ٠ (توجد قيمة صغرى)

∴ عند س = ٠ توجد قيمة صغرى قيمتها ٤

∴ (٠ ، ٤) تقع على المنحنى

، ∵ ص = ∫ (٦ س − ٦ س^{٢}) ءس

= ٣ س^{٢} − ٢ س^{٣} + ث$_{٢}$

∴ ٤ = ٣ (٠) − ٢ (٠) + ث$_{٢}$ ∴ ث$_{٢}$ = ٤

∴ ص = ٣ س^{٢} − ٢ س^{٣} + ٤

نعين قيم مساعدة عند س = −١ ، س = ٢

∴ ميل المماس عند س = −١

$\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = −١}$ = ٦ (−١) − ٦ (−١)^{٢} = −١٢

∴ ميل العمودى = $\frac{١}{١٢}$ ، عند س = −١

∴ ص = ٣ (−١)^{٢} − ٢ (−١)^{٣} + ٤ = ٩

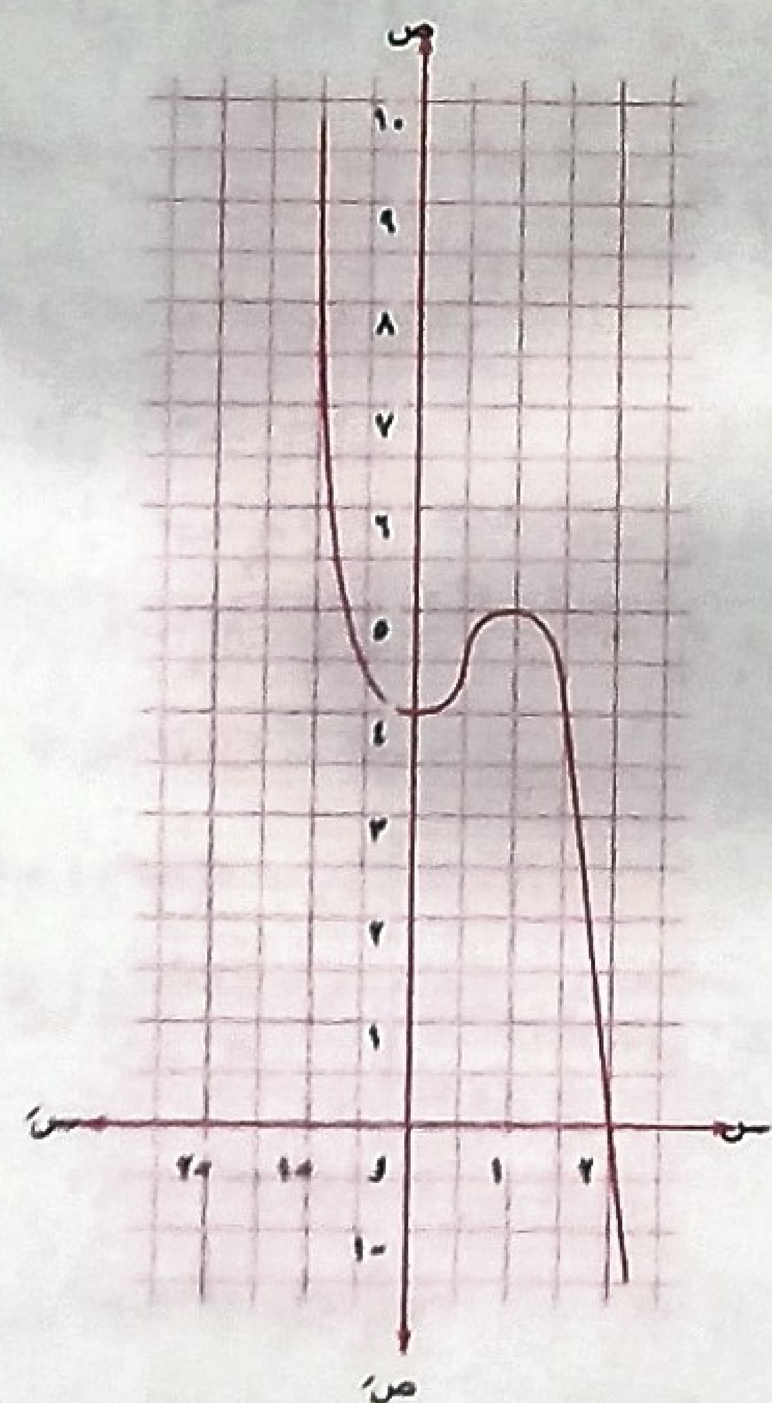
∴ النقطة هى (−١ ، ٩)

∴ معادلة العمودى $\frac{ص − ٩}{س + ١}$ = $\frac{١}{١٢}$

∴ س − ١٢ ص + ١٠٩ = ٠

، بوضع $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = ٠ ∴ س = $\frac{١}{٢}$ (انقلاب)

س	−١	٠	$\frac{١}{٢}$	١	٢
ص	٩	٤	$\frac{٩}{٢}$	٥	٠



١

① (ب) ② (د) ③ (أ) ④ (د)

⑤ (أ) ⑥ (ب) ⑦ (ب) ⑧ (جـ)

٢

① ∫ جا (٢ س − ٥) ءس

= − $\frac{١}{٢}$ جتا (٢ س − ٥) + ث

② ∫ $\sqrt{٣}$ جتا س ءس = $\sqrt{٣}$ جا س + ث

③ ∫ (٣ − س − جا ٤ س) ءس

= ٣ س − $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + $\frac{١}{٤}$ جتا ٤ س + ث

④ ∫ (جا س + جتا س) ءس

= − جتا س + جا س + ث

⑤ ∫ قا^{٢} (٥ − ٣ س) ءس

= $\frac{−١}{٣}$ ظا (٥ − ٣ س) + ث

⑥ ∫ قتا^{٢} (٢ س + ٣) ءس

= − $\frac{١}{٢}$ ظتا (٢ س + ٣) + ث

⑦ ∫ (جا ٣ س − قا^{٢} ٢ س) ءس

= $\frac{−١}{٣}$ جتا ٣ س − $\frac{١}{٢}$ ظا ٢ س + ث

⑧ ∫ قتا^{٢} $\left(\frac{س + ٣}{٢}\right)$ ءس = −٢ ظتا $\left(\frac{س + ٣}{٢}\right)$ + ث

⑨ ∫ قا ٢ س ظا ٢ س ءس = $\frac{١}{٢}$ قا ٢ س + ث

⑩ ∫ قتا ٥ س ظتا ٥ س ءس

= − $\frac{١}{٥}$ قتا ٥ س + ث

⑪ ∫ (٤ جتا ٢ س + $\frac{١}{جتا^{٢} س}$ + ١) ءس

= ∫ (٤ جتا ٢ س + قا^{٢} س + ١) ءس

= ٢ جا ٢ س + ظا س + س + ث

(١٢) ∫ قا س (قا س − ظا س) ء س

= ∫ (قا^{٢} س − قا س ظا س) ء س

= ظا س − قا س + ث

(١٣) ∫ قتا س (ظتا س − قتا س) ء س

= ∫ (قتا س ظتا س − قتا^{٢} س) ء س

= − قتا س + ظتا س + ث

(١٤) ∫ ٦ قا ٢ س (ظا ٢ س + جتا^{٢} ٢ س) ء س

= ∫ (٦ قا ٢ س ظا ٢ س + ٦ جتا ٢ س) ء س

= ٦ × ١/٢ قا ٢ س + ٦ × ١/٢ جا ٢ س + ث

= ٣ قا ٢ س + ٣ جا ٢ س + ث

(١٥) ∫ قا س (٣ جتا س − ٢ قا س) ء س

= ∫ (٣ − ٢ قا^{٢} س) ء س

= ٣ س − ٢ ظا س + ث

٢

(١) ∫ (جتا^{٢} س − جا^{٢} س) ء س

= ∫ جتا ٢ س ء س

= ١/٢ جا ٢ س + ث

(٢) ∫ جا ٣ س جتا ٣ س ء س

= ∫ ١/٢ جا ٦ س ء س

= −١/١٢ جتا ٦ س + ث

(٣) ∫ (١ + ظا^{٢} س) جتا^{٢} س ء س

= ∫ (قا^{٢} س × جتا^{٢} س) ء س

= ∫ ء س = س + ث

(٤) ∫ (١ + ظتا^{٢} س) جا^{٢} س ء س

= ∫ قتا^{٢} س × جا^{٢} س ء س = ∫ ء س = س + ث

(٥) ∫ ظا س جتا س ء س = ∫ جا س ء س

= − جتا س + ث

(٦) ∫ (جا س − جتا س)^{٢} ء س

= ∫ (جا^{٢} س + جتا^{٢} س − ٢ جا س جتا س) ء س

= ∫ (١ − جا ٢ س) ء س

= س + ١/٢ جتا ٢ س + ث

(٧) ∫ (١ + ظا^{٢} (٣ س − ١)) ء س

= ∫ قا^{٢} (٣ س − ١) ء س

= ١/٣ ظا (٣ س − ١) + ث

(٨) ∫ (٣ + ظا^{٢} س) ء س

= ∫ (٢ + ١ + ظا^{٢} س) ء س

= ∫ (٢ + قا^{٢} س) ء س

= ٢ س + ظا س + ث

(٩) ∫ ٤/(جا^{٢} ٥ س) ء س = ∫ ٤ قتا^{٢} ٥ س ء س

= −٤/٥ ظتا ٥ س + ث

(١٠) ∫ ٥/(جتا^{٢} ٣ س) ء س = ∫ ٥ قا^{٢} ٣ س ء س

= ٥/٣ ظا ٣ س + ث

(١١) ∫ ء س/(جتا ٢ س ظتا ٢ س) = ∫ قا ٢ س ظا ٢ س ء س

= ١/٢ قا ٢ س + ث

(١٢) ∫ (ظتا ٥ س)/(جا ٥ س) ء س = ∫ قتا ٥ س . ظتا ٥ س ء س

= −١/٥ قتا ٥ س + ث

(١٣) ∫ [(١ − ظا س)^{٢} + ٢ ظا س] ء س

= ∫ [١ − ٢ ظا س + ظا^{٢} س + ٢ ظا س] ء س

= ∫ قا^{٢} س ء س = ظا س + ث

(١٤) ∫ ١/(١ − جتا^{٢} س) ء س = ∫ ١/(جا^{٢} س) ء س

= ∫ قتا^{٢} س ء س

= − ظتا س + ث

(١٥) ∫ (جتا^{٢} س)/(١ − جا س) ء س = ∫ (١ − جا^{٢} س)/(١ − جا س) ء س

= ∫ (١ + جا س) ء س

= س − جتا س + ث

(١٦) ∫ (١ + جا^{٢} س)/(١ − جتا^{٢} س) ء س = ∫ (١ + جا^{٢} س)/(جا^{٢} س) ء س

= ∫ (قتا^{٢} س + ١) ء س

= − ظتا س + س + ث

(١٧) ∫ (١ + جتا^{٢} س)/(١ − جا^{٢} س) ء س = ∫ (١ + جتا^{٢} س)/(جتا^{٢} س) ء س

= ∫ (قا^{٢} س + ١) ء س

= ظا س + س + ث

(١٨) ∫ (جتا ٢ س)/(جتا س + جا س) ء س = ∫ (جتا^{٢} س − جا^{٢} س)/(جتا س + جا س) ء س

= ∫ (جتا س − جا س) ء س

= جا س + جتا س + ث

(١٩) ∫ (جا^{٣} س + جتا^{٣} س)/(جا س + جتا س) ء س

= ∫ ((جا س + جتا س) (جا^{٢} س − جا س جتا س + جتا^{٢} س))/(جا س + جتا س) ء س

= ∫ (جا^{٢} س + جتا^{٢} س − جا س جتا س) ء س

= ∫ (١ − ١/٢ جا ٢ س) ء س

= س + ١/٤ جتا ٢ س + ث

(٢٠) ∫ (جتا س)/(١ − جتا^{٢} س) ء س = ∫ (جتا س)/(جا^{٢} س) ء س

= ∫ قتا س ظتا س ء س

= − قتا س + ث

(٢١) ∫ (جتا^{٣} س − ٤)/(جتا^{٢} س) ء س

= ∫ (جتا س − ٤ قا^{٢} س) ء س

= جا س − ٤ ظا س + ث

(٢٢) ∫ (١ − ٢ جا^{٣} س)/(جا^{٢} س) ء س

= ∫ (قتا^{٢} س − ٢ جا س) ء س

= − ظتا س + ٢ جتا س + ث

(٢٣) ∫ ١/(جا^{٢} س جتا^{٢} س) ء س

= ∫ ١/(جا س جتا س)^{٢} ء س = ∫ ١/(١/٢ جا ٢ س)^{٢} ء س

= ∫ ٤ قتا^{٢} ٢ س ء س = −٢ ظتا ٢ س + ث

(٢٤) ∫ (جا^{٢} (٢ س − ٣))/(١ − جتا (٢ س − ٣)) ء س

= ∫ (١ − جتا^{٢} (٢ س − ٣))/(١ − جتا (٢ س − ٣)) ء س

= ∫ (١ + جتا (٢ س − ٣)) ء س

= س + ١/٢ جا (٢ س − ٣) + ث

(٢٥) ∫ ١/(١ − جتا س) ء س

= ∫ ١/(١ − جتا س) × (١ + جتا س)/(١ + جتا س) ء س

= ∫ (١ + جتا س)/(١ − جتا^{٢} س) ء س = ∫ (١ + جتا س)/(جا^{٢} س) ء س

= ∫ (قتا^{٢} س + قتا س ظتا س) ء س

= − ظتا س − قتا س + ث

حل آخر :

∫ ١/(٢ جا^{٢} (س/٢)) ء س = ١/٢ ∫ قتا^{٢} (س/٢) ء س

= − ظتا (س/٢) + ث

(٢٦) $\int \left[\frac{\text{قا س}}{\text{قا س} + \text{ظا س}} \times \frac{\text{قا س} - \text{ظا س}}{\text{قا س} - \text{ظا س}}\right] \text{ء س}$

$= \int \left[\frac{\text{قا}^2\text{س} - \text{قا س ظا س}}{\text{قا}^2\text{س} - \text{ظا}^2\text{س}}\right] \text{ء س}$

$= \int (\text{قا}^2\text{س} - \text{قا س ظا س})\, \text{ء س}$

$= \text{ظا س} - \text{قا س} + \text{ث}$

(٢٧) $\int \frac{1 + \text{جا}^3\text{س}}{\text{جا}^2\text{س}} \text{ء س} = \int \left(\frac{1}{\text{جا}^2\text{س}} + \frac{\text{جا}^3\text{س}}{\text{جا}^2\text{س}}\right) \text{ء س}$

$= \int (\text{قتا}^2\text{س} + \text{جا س})\, \text{ء س}$

$= -\text{ظتا س} - \text{جتا س} + \text{ث}$

(٢٨) $\int \frac{\text{جتا ٢ س}}{\text{جتا}^2\text{س}} \text{ء س} = \int \frac{2\,\text{جتا}^2\text{س} - 1}{\text{جتا}^2\text{س}} \text{ء س}$

$= \int (2 - \text{قا}^2\text{س})\, \text{ء س}$

$= 2\,\text{س} - \text{ظا س} + \text{ث}$

(٢٩) $\int \frac{\text{ء س}}{\text{جا}^4\text{س}} = \int \text{قتا}^4\text{س}\, \text{ء س}$

$= \int \text{قتا}^2\text{س} \times \text{قتا}^2\text{س}\, \text{ء س}$

$= \int (1 + \text{ظتا}^2\text{س}) \times \text{قتا}^2\text{س}\, \text{ء س}$

$= \int (\text{قتا}^2\text{س} + \text{ظتا}^2\text{س قتا}^2\text{س})\, \text{ء س}$

$= -\text{ظتا س} - \frac{1}{3}\text{ظتا}^3\text{س} + \text{ث}$

(٣٠) $\int \text{ظا}^4\text{س}\, \text{ء س}$

$= \int \text{ظا}^2\text{س} (\text{قا}^2\text{س} - 1)\, \text{ء س}$

$= \int (\text{ظا}^2\text{س قا}^2\text{س} - \text{ظا}^2\text{س})\, \text{ء س}$

$= \int (\text{ظا}^2\text{س قا}^2\text{س} - \text{قا}^2\text{س} + 1)\, \text{ء س}$

$= \frac{1}{3}\text{ظا}^3\text{س} - \text{ظا س} + \text{س} + \text{ث}$

(٣١) $\int \text{جا س جا ٢ س}\, \text{ء س}$

$= \int \text{جا س} \times 2\,\text{جا س جتا س}\, \text{ء س}$

$= \int 2\,\text{جا}^2\text{س جتا س}\, \text{ء س}$

$= \frac{2}{3}\text{جا}^3\text{س} + \text{ث}$

(٣٢) $\int \text{جتا س جتا ٢ س}\, \text{ء س}$

$= \int \text{جتا س} (1 - 2\,\text{جا}^2\text{س})\, \text{ء س}$

$= \int (\text{جتا س} - 2\,\text{جتا س جا}^2\text{س})\, \text{ء س}$

$= \text{جا س} - \frac{2}{3}\text{جا}^3\text{س} + \text{ث}$

(٣٣) $\int (\text{ظا س} + \text{ظتا س})^2\, \text{ء س}$

$= \int (\text{ظا}^2\text{س} + \text{ظتا}^2\text{س} + 2)\, \text{ء س}$

$= \int [(\text{ظا}^2\text{س} + 1) + (\text{ظتا}^2\text{س} + 1)]\, \text{ء س}$

$= \int (\text{قا}^2\text{س} + \text{قتا}^2\text{س})\, \text{ء س} = \text{ظا س} - \text{ظتا س} + \text{ث}$

٤

(١) $\int \text{جا}^2\text{س}\, \text{ء س} = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{جتا ٢ س}\right) \text{ء س}$

$= \frac{1}{2}\text{س} - \frac{1}{4}\text{جا ٢ س} + \text{ث}$

(٢) $\int \text{جتا}^2\text{س}\, \text{ء س} = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{جتا ٢ س}\right) \text{ء س}$

$= \frac{1}{2}\text{س} + \frac{1}{4}\text{جا ٢ س} + \text{ث}$

(٣) $\int (1 + \text{جتا س})^2\, \text{ء س}$

$= \int (1 + 2\,\text{جتا س} + \text{جتا}^2\text{س})\, \text{ء س}$

$= \int \left(1 + 2\,\text{جتا س} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{جتا ٢ س}\right) \text{ء س}$

$= \int \left(\frac{3}{2} + 2\,\text{جتا س} + \frac{1}{2}\text{جتا ٢ س}\right) \text{ء س}$

$= \frac{3}{2}\text{س} + 2\,\text{جا س} + \frac{1}{4}\text{جا ٢ س} + \text{ث}$

(٤) $\int (1 - \text{جا س})(1 + \text{جا س})\, \text{ء س}$

$= \int (1 - \text{جا}^2\text{س})\, \text{ء س} = \int \text{جتا}^2\text{س}\, \text{ء س}$

$= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{جتا ٢ س}\right) \text{ء س}$

$= \frac{1}{2}\text{س} + \frac{1}{4}\text{جا ٢ س} + \text{ث}$

(٥) $\int (\text{جتا}^2\text{س} + \text{جتا س})\, \text{ء س}$

$= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{جتا ٢ س} + \text{جتا س}\right) \text{ء س}$

$= \frac{1}{2}\text{س} + \frac{1}{4}\text{جا ٢ س} + \text{جا س} + \text{ث}$

(٦) $\int (\text{جتا س} + \text{قا س})^2\, \text{ء س}$

$= \int (\text{جتا}^2\text{س} + 2 + \text{قا}^2\text{س})\, \text{ء س}$

$= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{جتا ٢ س} + 2 + \text{قا}^2\text{س}\right) \text{ء س}$

$= \int \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\text{جتا ٢ س} + \text{قا}^2\text{س}\right) \text{ء س}$

$= \frac{5}{2}\text{س} + \frac{1}{4}\text{جا ٢ س} + \text{ظا س} + \text{ث}$

(٧) $\int (\text{جا س} + \text{قتا س})^2\, \text{ء س}$

$= \int (\text{جا}^2\text{س} + 2 + \text{قتا}^2\text{س})\, \text{ء س}$

$= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{جتا ٢ س} + 2 + \text{قتا}^2\text{س}\right) \text{ء س}$

$= \int \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\text{جتا ٢ س} + \text{قتا}^2\text{س}\right) \text{ء س}$

$= \frac{5}{2}\text{س} - \frac{1}{4}\text{جا ٢ س} - \text{ظتا س} + \text{ث}$

(٨) $\int (\text{ظا}^2\text{س} + 2\,\text{جا}^2\text{س})\, \text{ء س}$

$= \int (\text{قا}^2\text{س} - 1 + 1 - \text{جتا ٢ س})\, \text{ء س}$

$= \int (\text{قا}^2\text{س} - \text{جتا ٢ س})\, \text{ء س}$

$= \text{ظا س} - \frac{1}{2}\text{جا ٢ س} + \text{ث}$

(٩) $\int \left(\frac{3}{\text{قتا}^2\text{س}} - 4\,\text{قا}^2\,\text{٥ س}\right) \text{ء س}$

$= \int (3\,\text{جا}^2\text{س} - 4\,\text{قا}^2\,\text{٥ س})\, \text{ء س}$

$= \int \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\text{جتا ٢ س} - 4\,\text{قا}^2\,\text{٥ س}\right) \text{ء س}$

$= \frac{3}{2}\text{س} - \frac{3}{4}\text{جا ٢ س} - \frac{4}{5}\text{ظا ٥ س} + \text{ث}$

(١٠) $\int \frac{\text{ء س}}{1 + \text{ظا}^2\text{س}} = \int \frac{\text{ء س}}{\text{قا}^2\text{س}}$

$= \int \text{جتا}^2\text{س}\, \text{ء س}$

$= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{جتا ٢ س}\right) \text{ء س}$

$= \frac{1}{2}\text{س} + \frac{1}{4}\text{جا ٢ س} + \text{ث}$

(١١) $\int (\text{جتا س} + \text{ظا س})^2\, \text{ء س}$

$= \int (\text{جتا}^2\text{س} + 2\,\text{جا س} + \text{ظا}^2\text{س})\, \text{ء س}$

$= \int \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{جتا ٢ س} + 2\,\text{جا س}$

$+ \text{قا}^2\text{س} - 1\Big)\, \text{ء س}$

$= \int \left(\frac{1}{2}\text{جتا ٢ س} + 2\,\text{جا س} + \text{قا}^2\text{س} - \frac{1}{2}\right) \text{ء س}$

$= \frac{1}{4}\text{جا ٢ س} - 2\,\text{جتا س} + \text{ظا س} - \frac{1}{2}\text{س} + \text{ث}$

(١٢) $\int (\text{جا س} + \text{ظتا س})^2\, \text{ء س}$

$= \int (\text{جا}^2\text{س} + 2\,\text{جتا س} + \text{ظتا}^2\text{س})\, \text{ء س}$

$= \int \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{جتا ٢ س} + 2\,\text{جتا س}$

$+ \text{قتا}^2\text{س} - 1\Big)\, \text{ء س}$

$= \int \Big(-\frac{1}{2}\text{جتا ٢ س} + 2\,\text{جتا س}$

$+ \text{قتا}^2\text{س} - \frac{1}{2}\Big)\, \text{ء س}$

$= -\frac{1}{4}\text{جا ٢ س} + 2\,\text{جا س}$

$- \text{ظتا س} - \frac{1}{2}\text{س} + \text{ث}$

(١٣) $\int \text{ظا}(\text{٣ س} + 1)\, \text{ء س}$

$= \frac{-1}{3}\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جتا}(\text{٣ س} + 1)| + \text{ث}$

$= \frac{1}{3}\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{قا}(\text{٣ س} + 1)| + \text{ث}$

(١٤) $\int \text{ظتا}(\text{٢ س} - 1)\, \text{ء س}$

$= \frac{-1}{2}\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{قتا ٢ س}| + \text{ث}$

(١٥) $\int \text{قا}(5 - \text{٢ س})\, \text{ء س}$

$= \frac{-1}{2}\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{قا}(5 - \text{٢ س}) + \text{ظا}(5 - \text{٢ س})| + \text{ث}$

(١٦) $\int \text{قتا}(\text{٤ س} + 7)\, \text{ء س}$

$= \frac{-1}{4}\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{قتا}(\text{٤ س} + 7) + \text{ظتا}(\text{٤ س} + 7)| + \text{ث}$

(١٧) $\int \frac{\text{قا}^2\text{س}}{\text{ظا س}} \text{ء س} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ظا س}| + \text{ث}$

(١٨) $\int \frac{\text{قتا}^2\text{س}}{\text{ظتا س}} \text{ء س} = -\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ظتا س}| + \text{ث}$

(١٩) $\int \frac{1 - \text{ظا س}}{1 + \text{ظا س}} \text{ء س}$ بالضرب × $\frac{\text{جتا س}}{\text{جتا س}}$

$= \int \frac{\text{جتا س} - \text{جا س}}{\text{جتا س} + \text{جا س}} \text{ء س}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جتا س} + \text{جا س}| + \text{ث}$

(٢٠) $\int \frac{\text{قا س ظا س}}{\text{قا س} - 1} \text{ء س}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{قا س} - 1| + \text{ث}$

(٢١) ∫ (جا ٢س)/(١ + جتا^{٢} س) ء س = ∫ (٢ جا س جتا س)/(١ + جتا^{٢} س) ء س

= − لو$_{هـ}$ |١ + جتا^{٢} س| + ث

(٢٢) ∫ (جا س)/(قا س) ء س = ∫ جا س جتا س ء س

= ½ جا^{٢} س + ث

(٢٣) ∫ (٢ ظا س)/(١ + ظا^{٢} س) ء س = ∫ (٢ ظا س)/(قا^{٢} س) ء س

= ∫ ٢ جا^{٢} س ء س

= ∫ (١ − جتا ٢س) ء س

= س − ½ جا ٢س + ث

(٢٤) ∫ (جا^{٤} س − جتا^{٤} س) ء س

= ∫ ((½ + ½ جتا ٢س) − (جتا^{٢} س)^{٢}) ء س

= ∫ ((½ + ½ جتا ٢س) − (½ + ½ جتا ٢س)^{٢}) ء س

= ∫ (½ + ½ جتا ٢س − ¼ − ½ جتا ٢س − ¼ جتا^{٢} ٢س)

= ¼ − ¼ جتا^{٢} ٢ س ء س

= ∫ ¼ − ¼ (½ + ½ جتا ٤س) ء س

= ∫ ¼ − ⅛ − ⅛ جتا ٤س ء س

= ∫ (⅛ − ⅛ جتا ٤س) ء س

= ⅛ س − $\frac{١}{٣٢}$ جا ٤س + ث

حل آخر:

∫ (جا^{٤} س − جتا^{٤} س) ء س

= ∫ جا^{٢} س (١ − جا^{٢} س) ء س

= ∫ جا^{٢} س جتا^{٢} س ء س

= ∫ (½ جا ٢س)^{٢} ء س = ∫ ¼ جا^{٢} ٢س ء س

= ∫ ¼ (½ − ½ جتا ٤س) ء س

= ∫ (⅛ − ⅛ جتا ٤س) ء س

= ⅛ س − $\frac{١}{٣٢}$ جا ٤س + ث

٥

(١) ∫ س جا س^{٢} ء س

بوضع ع = س^{٢} ∴ ء ع = ٢ س ء س

التكامل = ∫ س جا س^{٢} ء س

= ½ ∫ ٢ س جا س^{٢} ء س

= ½ ∫ جا ع ء ع = − ½ جتا ع + ث

= − ½ جتا س^{٢} + ث

(٢) ∫ س ظا ٢ س^{٢} ء س بوضع س^{٢} = ع

∴ ٢ س ء س = ء ع

التكامل = ½ ∫ ٢ س ظا ٢ س^{٢} ء س

= ½ ∫ ظا ٢ع ء ع

= ½ × ½ لو$_{هـ}$ |قا ٢ ع| + ث

= ¼ لو$_{هـ}$ |قا ٢ س^{٢}| + ث

(٣) ∫ س^{٢} جتا (س^{٣} + ٥) ء س

= ⅓ ∫ ٣ س^{٢} جتا (س^{٣} + ٥) ء س

= ⅓ جا (س^{٣} + ٥) + ث

(٤) ∫ س قا (س^{٢} + ٣) ء س

= ½ ∫ ٢ س قا (س^{٢} + ٣) ء س

= ½ ظا (س^{٢} + ٣) + ث

(٥) ∫ هـ^{س} جتا (هـ^{س}) ء س = جا (هـ^{س}) + ث

(٦) ∫ (جتا √س)/(√س) ء س = ٢ ∫ (١)/(٢ √س) جتا √س ء س

= ٢ جا √س + ث

(٧) ∫ (١)/(س^{٢}) جا (١)/(س) ء س

= − ∫ (−١)/(س^{٢}) جا (١)/(س) ء س

= − (− جتا (١)/(س)) + ث = جتا (١)/(س) + ث

(٨) ∫ [جا (٢ س^{٤} + ٥ س − ٧)] × [١٢ س^{٣} + ٥] ء س

= − جتا (٢ س^{٤} + ٥ س − ٧) + ث

(٩) ∫ [جا (س + ظا س)] [١ + قا^{٢} س] ء س

= − جتا (س + ظا س) + ث

(١٠) ∫ [قا (جا س)]^{٢} × (جتا س) ء س

= ظا (جا س) + ث

(١١) ∫ [قتا (جا س)] × قتا س ظا س ء س

= − قتا (قا س) + ث

(١٢) ∫ [قا (٥ س^{٣} − ٧) ظا (٥ س^{٣} − ٧)]

× ١٥ س^{٢} ء س = قا (٥ س^{٣} − ٧) + ث

(١٣) ∫ جا (جا س) جتا س ء س = − جتا (جا س) + ث

٦

(١) ∫ ظتا^{٢} س قتا س ء س

= − ∫ (− قتا^{٢} س) قتا س ء س

= − ⅓ ظتا^{٣} س + ث

(٢) ∫ قا^{٢} س ظا س ء س = ½ ظا^{٢} س + ث

(٣) ∫ جا^{٢} س جتا س ء س = ⅓ جا^{٣} س + ث

(٤) ∫ جا س جتا^{٣} س ء س

= − ∫ − جا س جتا^{٣} س ء س

= − ¼ جتا^{٤} س + ث

(٥) ∫ ١٠ ظا^{٤} س قا^{٢} س ء س = ٢ ظا^{٥} س + ث

(٦) ∫ (جا س + جتا س)^{٢} (جتا س − جا س) ء س

= ⅓ (جا س + جتا س)^{٣} + ث

(٧) ∫ (٢ + جا س)^{٢} جتا س ء س

= ⅓ (٢ + جا س)^{٣} + ث

(٨) ∫ √(١ + جا س) × جتا س ء س

= ∫ (١ + جا س)^{½} (جتا س) ء س

= ⅔ (١ + جا س)$^{\frac{٣}{٢}}$ + ث

(٩) ∫ قا^{٣} س ظا س ء س

= ∫ قا^{٢} س (قا س ظا س) ء س

= ⅓ قا^{٣} س + ث

(١٠) ∫ ظتا س قتا^{٢} س ء س

= − ∫ قتا^{٢} س (− ظتا س قتا س) ء س

= − ½ قتا^{٢} س + ث

(١١) ∫ (س + جا س + ظا س)^{٧}

(١ + جتا س + قا^{٢} س) ء س

= ⅛ (س + جا س + ظا س)^{٨} + ث

(١٢) ∫ هـ$^{جا س}$. جتا س ء س = هـ$^{جا س}$ + ث

(١٣) ∫ ٣ جا^{٤} س جا ٢ س ء س

= ∫ ٣ جا^{٤} س × ٢ جا س جتا س ء س

= ٦ ∫ جا^{٥} س جتا س ء س

= ٦ × ⅙ جا^{٦} س + ث = جا^{٦} س + ث

(١٤) ∫ جا^{٤} س جتا^{٣} س ء س

= ∫ جا^{٤} س جتا^{٢} س جتا س ء س

= ∫ جا^{٤} س (١ − جا^{٢} س) جتا س ء س

= ∫ (جا^{٤} س − جا^{٦} س) جتا س ء س

= ∫ (جا^{٤} س جتا س − جا^{٦} س جتا س) ء س

= ⅕ جا^{٥} س − ⅐ جا^{٧} س + ث

(١٥) ∫ جتا^{٣} س ء س = ∫ جتا^{٢} س جتا س ء س

= ∫ (١ − جا^{٢} س) جتا س ء س

= ∫ (جتا س − جا^{٢} س جتا س) ء س

= جا س − ⅓ جا^{٣} س + ث

(١٦) ∫ ٤ جا^{4} س ء س

= ∫ ٤ ($\frac{1}{2}$ − $\frac{1}{2}$ جتا ٢ س)^{2} ء س

= ∫ (١ − جتا ٢ س)^{2} ء س

= ∫ ١ − ٢ جتا ٢ س + جتا^{2} ٢ س ء س

= ∫ (١ − ٢ جتا ٢ س + $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{2}$ جتا ٤ س) ء س

= ∫ ($\frac{3}{2}$ − ٢ جتا ٢ س + $\frac{1}{2}$ جتا ٤ س) ء س

= $\frac{3}{2}$ س − جا ٢ س + $\frac{1}{8}$ جا ٤ س + ث

(١٧) ∫ ظا^{3} س ء س

= ∫ ظا^{2} س ظا س ء س

= ∫ (قا^{2} س − ١) ظا س ء س

= ∫ (قا^{2} س ظا س − ظا س) ء س

= $\frac{1}{2}$ ظا^{2} س − لو$_{\text{هـ}}$ |قا س| + ث

(١٨) ∫ ظتا^{3} س ء س

= ∫ ظتا^{2} س ظتا س ء س

= ∫ (قتا^{2} س − ١) ظتا س ء س

= ∫ (ظتا س قتا^{2} س − ظتا س) ء س

= − $\frac{1}{2}$ ظتا^{2} س + لو$_{\text{هـ}}$ |قا س| + ث

(١٩) ∫ ظا^{3} س قا^{4} س ء س

= ∫ ظا س ظا^{2} س قا^{4} س ء س

= ∫ ظا س (قا^{2} س − ١) قا^{4} س ء س

= ∫ (ظا س قا^{6} س − ظا س قا^{4} س) ء س

= ∫ قا^{5} س (ظا س قا س)

− قا^{3} س (ظا س قا س) ء س

= $\frac{1}{6}$ قا^{6} س − $\frac{1}{4}$ قا^{4} س + ث

(٢٠) ∫ ظا^{3} س قا^{3} س ء س

= ∫ ظا^{2} س قا^{2} س ظا س قا س ء س

= ∫ (قا^{2} س − ١) قا^{2} س (قا س ظا س) ء س

= ∫ قا^{4} س (قا س ظا س)

− قا^{2} س (قا س ظا س) ء س

= $\frac{1}{5}$ قا^{5} س − $\frac{1}{3}$ قا^{3} س + ث

(٢١) ∫ (١ + جا س) هـ$^{\text{س − جتا س}}$ ء س

= هـ$^{\text{س − جتا س}}$ + ث

(٢٢) ∫ هـ$^{\text{س}}$ جتا هـ$^{\text{س}}$ ء س = جا هـ$^{\text{س}}$ + ث

(٢٣) ∫ هـ$^{\text{س}}$ (ظتا س − قتا^{2} س) ء س

ظتا س ـــ هـ$^{\text{س}}$
− قتا^{2} س ـــ هـ$^{\text{س}}$

= ∫ (هـ$^{\text{س}}$ ظتا س

− هـ$^{\text{س}}$ قتا^{2} س) ء س

= ∫ هـ$^{\text{س}}$ ظتا س ء س − ∫ هـ$^{\text{س}}$ قتا^{2} س ء س

= هـ$^{\text{س}}$ ظتا س + ∫ هـ$^{\text{س}}$ (قتا^{2} س) ء س

− ∫ هـ$^{\text{س}}$ قتا^{2} س ء س = هـ$^{\text{س}}$ ظتا س + ث

(٢٤) ∫ هـ$^{\text{س}}$ قا س (١ + ظا س) ء س

قا س ـــ هـ$^{\text{س}}$
قا س ظا س ـــ هـ$^{\text{س}}$

= ∫ هـ$^{\text{س}}$ قا س ء س

+ ∫ هـ$^{\text{س}}$ قا س ظا س ء س

= هـ$^{\text{س}}$ قا س − ∫ هـ$^{\text{س}}$ قا س ظا س ء س

+ ∫ هـ$^{\text{س}}$ قا س ظا س ء س

= هـ$^{\text{س}}$ قا س + ث

(٢٥) ∫ هـ$^{\text{س}}$ قتا س (١ − ظتا س) ء س

قتا س ـــ هـ$^{\text{س}}$
− قتا س ظتا س ـــ هـ$^{\text{س}}$

= ∫ هـ$^{\text{س}}$ قتا س ء س

− ∫ هـ$^{\text{س}}$ قتا س ظتا س ء س

= هـ$^{\text{س}}$ قتا س + ∫ هـ$^{\text{س}}$ قتا س ظتا س ء س

− ∫ هـ$^{\text{س}}$ قتا س ظتا س ء س

= هـ$^{\text{س}}$ قتا س + ث

(٢٦) ∫ (جتا س هـ$^{\text{جا س}}$ + ٣ س^{2}) ء س

= هـ$^{\text{جا س}}$ + س^{3} + ث

(٢٧) ∫ (قا س هـ$^{\text{ظا س}}$)^{2} ء س

= ∫ قا^{2} س هـ$^{\text{٢ ظا س}}$ ء س

= $\frac{1}{2}$ ∫ ٢ قا^{2} س هـ$^{\text{٢ ظا س}}$ ء س

= $\frac{1}{2}$ هـ$^{\text{٢ ظا س}}$ + ث

(٢٨) ∫ ٢$^{\text{جا س}}$ جتا س ء س = $\frac{\text{٢}^{\text{جا س}}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{٢}}$ + ث

(٢٩) ∫ $\frac{\text{٥}^{\text{ظتا س}}}{\text{جا}^{2}\ \text{س}}$ ء س = ∫ ٥$^{\text{ظتا س}}$ (قتا^{2} س) ء س

= $\frac{-\text{٥}^{\text{ظتا س}}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{٥}}$ + ث

(٣٠) ∫ س جا س ء س

س ـــ جا س
١ ـــ − جتا س

= − س جتا س

− ∫ − جتا س ء س

= − س جتا س + جا س + ث

(٣١) ∫ (٣ س + ٢) جا س ء س

٣ س + ٢ ـــ جا س
٣ ـــ − جتا س

= − (٣ س + ٢) جتا س

+ ∫ ٣ جتا س ء س

= − (٣ س + ٢) جتا س + ٣ جا س + ث

(٣٢) ∫ س جتا ٤ س ء س

س ـــ جتا ٤ س
١ ـــ $\frac{1}{4}$ جا ٤ س

= $\frac{1}{4}$ س جا ٤ س

− $\frac{1}{4}$ ∫ جا ٤ س ء س

= $\frac{1}{4}$ س جا ٤ س − $\frac{1}{4}$ × $\frac{-1}{4}$ جتا ٤ س + ث

= $\frac{1}{4}$ س جا ٤ س + $\frac{1}{16}$ جتا ٤ س + ث

(٣٣) ∫ س قا^{2} س ء س

س ـــ قا^{2} س
١ ـــ ظا س

= س ظا س

− ∫ ظا س ء س

= س ظا س − لو$_{\text{هـ}}$ |قا س| + ث

٧

(١) (د)	(٢) (ب)	(٣) (أ)	(٤) (أ)
(٥) (أ)	(٦) (ب)	(٧) (ب)	(٨) (أ)
(٩) (ب)	(١٠) (ب)	(١١) (جـ)	(١٢) (أ)
(١٣) (جـ)	(١٤) (جـ)	(١٥) (ب)	(١٦) (جـ)
(١٧) (جـ)	(١٨) (د)	(١٩) (د)	(٢٠) (ب)
(٢١) (د)	(٢٢) (أ)	(٢٣) (ب)	(٢٤) (ب)
(٢٥) (د)	(٢٦) (ب)	(٢٧) (ب)	(٢٨) (أ)
(٢٩) (ب)	(٣٠) (جـ)		

٨

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٧ − جا ٢ س بالتكامل بالنسبة إلى س

ص = ٧ س + $\frac{1}{2}$ جتا ٢ س + ث

٥ = ٧ (٠) + $\frac{1}{2}$ جتا (٠) + ث

∴ ث = $\frac{9}{2}$

∴ ص = ٧ س + $\frac{1}{2}$ جتا ٢ س + $\frac{9}{2}$

٩

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = جاس جتاس بالتكامل بالنسبة إلى س

ص = ∫ جاس جتاس ءس = $\frac{١}{٢}$ جا^{٢} س + ث

عند س = $\frac{\pi}{٦}$ تكون ص = ١

١ = $\frac{١}{٢}$ جا^{٢} $\frac{\pi}{٦}$ + ث ∴ ث = $\frac{٧}{٨}$

ص = $\frac{١}{٢}$ جا^{٢} س + $\frac{٧}{٨}$

١٠

∵ د َ(س) = قا^{٢} س − جاس

∴ د (س) = ∫ (قا^{٢} س − جاس) ءس

= طاس + جتاس + ث

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$)

∴ $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = طا $\frac{\pi}{٤}$ + جتا $\frac{\pi}{٤}$ + ث

∴ $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = ١ + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ث ∴ ث = −١

∴ المعادلة هى : ص = طاس + جتا س − ١

١١

∵ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = π قا^{٢} π س

∴ ص = ∫ π قا^{٢} π س ءس

∴ ص = $\frac{\pi \times \text{طا}\,\pi\,\text{س}}{\pi}$ + ث

∴ ص = طا π س + ث

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة ($\frac{١}{٤}$ ، ٥)

∴ ٥ = طا $\frac{\pi}{٤}$ + ث ∴ ث = ٤

∴ المعادلة هى ص = طا π س + ٤

١٢

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣ π جتا π س − ٢ π جا π س بالتكامل

ص = ∫ (٣ π جتا π س − ٢ π جا π س) ءس

= ٣ جا π س + ٢ جتا π س + ث

المنحنى يمر بالنقطة (١ ، −٢)

−٢ = ٣ جا π + ٢ جتا π + ث ∴ ث = صفر

∴ ص = ٣ جا π س + ٢ جتا π س

١٣

ص ً = ٢ جتا ٢ س بالتكامل بالنسبة إلى س

ص َ = ∫ ٢ جتا ٢ س ءس

ص َ = جا ٢ س + $ث_{١}$

∵ معادلة المماس هى ص = س + ١

∴ الميل = ١ عند س = ٠

١ = جا ٠ + $ث_{١}$ ∴ $ث_{١}$ = ١

∴ ص َ = جا ٢ س + ١ بالتكامل بالنسبة إلى س

ص = ∫ (جا ٢ س + ١) ءس

= −$\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س + س + $ث_{٢}$

المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ١)

١ = −$\frac{١}{٢}$ جتا ٠ + ٠ + $ث_{٢}$ $ث_{٢}$ = $\frac{٣}{٢}$

∴ ص = −$\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س + س + $\frac{٣}{٢}$

١٤

∵ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{س}}{\text{١ + جتاص}}$

∴ (١ + جتاص) ءص = س ءس

∴ ∫ (١ + جتاص) ءص = ∫ س ءس

∴ ص + جاص = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ث

، ∵ المنحنى يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠)

∴ ث = ٠

∴ معادلة المنحنى هى : ص + جاص = $\frac{١}{٢}$ س^{٢}

١٥

م = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ س + $\frac{١}{٢}$ قا^{٢} $\frac{\text{س}}{٢}$

بالتكامل بالنسبة إلى س

ص = ∫ (٢ س + $\frac{١}{٢}$ قا^{٢} $\frac{\text{س}}{٢}$) ءس

= س^{٢} + $\frac{١}{٢}$ × ٢ طا $\frac{\text{س}}{٢}$ + ث

المنحنى يمر بالنقطة ($\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi^{٢}}{٤}$ + ٩)

∴ $\frac{\pi^{٢}}{٤}$ + ٩ = $(\frac{\pi}{٢})^{٢}$ + طا $\frac{\pi}{٤}$ + ث ث = ٨

∴ ص = س^{٢} + طا $\frac{\text{س}}{٢}$ + ٨

١٦

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = أ قتا^{٢} س بالتكامل بالنسبة إلى س

ص = − أ ظتاس + ث

المنحنى يمر بالنقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، ٥) ، ($\frac{٣\pi}{٤}$ ، ١)

٥ = − أ + ث (١)

١ = أ + ث (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ث = ٣ ، أ = −٢

∴ المعادلة ص = ٢ ظتاس + ٣

١٧

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قتا^{٢} س ظتاس بالتكامل بالنسبة إلى س

ص = − ∫ (− قتا^{٢} س) ظتاس ءس

ص = −$\frac{١}{٢}$ ظتا^{٢} س + ث

المنحنى يمر بالنقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، ٢$\frac{١}{٢}$)

$\frac{٥}{٢}$ = −$\frac{١}{٢}$ ظتا^{٢} $(\frac{\pi}{٤})$ + ث ث = ٣

∴ ص = −$\frac{١}{٢}$ ظتا^{٢} س + ٣

١٨

ميل العمودى = (٢ ص + ١) قتاس

∴ ميل المماس = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{-١}{\text{(٢ ص + ١) قتاس}}$

بتكامل الطرفين بالنسبة إلى س بعد فصل المتغيرات

∫ (٢ ص + ١) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ءس = ∫ − جاس ءس

∫ (٢ ص + ١) ءص = − ∫ جاس ءس

ص^{٢} + ص = جتاس + ث

المنحنى يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠) ∴ ث = −١

∴ المعادلة ص^{٢} + ص = جتاس − ١

١٩

∵ ص^{٢} $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = جا^{٢} س

∴ ∫ ص^{٢} ءص = ∫ جا^{٢} س ءس

∴ ∫ ص^{٢} ءص = ∫ ($\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س) ءس

∴ $\frac{١}{٣}$ ص^{٣} = $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{١}{٤}$ جا ٢ س + ث

∵ المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ١) ∴ ث = $\frac{١}{٣}$

∴ $\frac{١}{٣}$ ص^{٣} = $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{١}{٤}$ جا ٢ س + $\frac{١}{٣}$

∴ ٤ ص^{٣} = ٣ (٢ س − جا ٢ س) + ٤

٢٠

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = جتاس − جاس بالتكامل بالنسبة إلى س

ص = ∫ (جتاس − جاس) ءس

ص = جاس + جتاس + ث (١)

لإيجاد النقط الحرجة نضع $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

∴ جتاس − جاس = ٠

منها س = $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٥\pi}{٤}$

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = − جاس − جتاس

$(\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}})_{\text{س} = \frac{\pi}{٤}}$ < ٠ عندها قيمة عظمى ،

$(\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}})_{\text{س} = \frac{٥\pi}{٤}}$ > ٠ عندها قيمة صغرى

∴ المنحنى يمر بالنقطة ($\frac{٥\pi}{٤}$ ، −٢ $\sqrt{٢}$)

∴ من (١) ث = − $\sqrt{٢}$

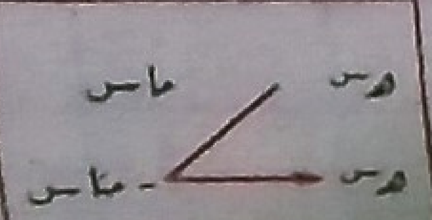
المعادلة هى ص = جاس + جتاس − $\sqrt{٢}$

٢١

① ∫ هـ$^{\text{س}}$ جاس ءس

ك = − هـ$^{\text{س}}$ جتاس

− ∫ − هـ$^{\text{س}}$ جتاس ءس



ك = − $هـ^{س}$ جتا س

+ $\int$ $هـ^{س}$ جتا س ء س

$هـ^{س}$	جتا س
$هـ^{س}$	جا س

ك = − $هـ^{س}$ جتا س + $هـ^{س}$ جا س

− $\int$ $هـ^{س}$ جا س ء س

= − $هـ^{س}$ جتا س + $هـ^{س}$ جا س − ك

بإضافة ك للطرفين

٢ ك = − $هـ^{س}$ جتا س + $هـ^{س}$ جا س + ث

∴ التكامل = $\frac{١}{٢}$ $هـ^{س}$ (جا س − جتا س) + ثَ

② $\int$ $هـ^{س}$ جتا س ء س

$هـ^{س}$	جتا س
$هـ^{س}$	جا س

∴ ك = $هـ^{س}$ جا س

− $\int$ $هـ^{س}$ جا س ء س

$هـ^{س}$	جا س
$هـ^{س}$	− جتا س

= $هـ^{س}$ جا س

− [− $هـ^{س}$ جتا س

− $\int$ − $هـ^{س}$ جتا س ء س]

= $هـ^{س}$ جا س + $هـ^{س}$ جتا س − ك

بإضافة ك للطرفين

٢ ك = $هـ^{س}$ جا س + $هـ^{س}$ جتا س + ث

ك = $\frac{١}{٢}$ $هـ^{س}$ (جا س + جتا س) + ثَ

③ $\int$ $\frac{س}{جا^{٢} ٥ س}$ ء س

= $\int$ س قتا^{٢} ٥ س ء س

س	قتا^{٢} ٥ س
١	− $\frac{١}{٥}$ ظتا ٥ س

= $\frac{-١}{٥}$ س ظتا ٥ س

− $\int$ $\frac{-١}{٥}$ ظتا ٥ س ء س

= $\frac{-١}{٥}$ س ظتا ٥ س + $\frac{١}{٥}$

× $\frac{١}{٥}$ لو$_{هـ}$ | قتا ٥ س | + ث

= $\frac{-١}{٥}$ س ظتا ٥ س − $\frac{١}{٢٥}$ لو$_{هـ}$ | قتا ٥ س | + ث

④ $\int$ قا^{٣} س ء س = $\int$ قا^{٢} س . قا س ء س

ك = $\int$ (١ + ظا^{٢} س) قا س ء س

= $\int$ قا س ء س

ظا س	ظا س قا س
ظا^{٢} س	قا س

+ $\int$ ظا^{٢} س قا س ء س

= لو$_{هـ}$ | قا س + ظا س | + ظا س قا س

− $\int$ قا^{٣} س ء س

ك = لو$_{هـ}$ | قا س + ظا س | + ظا س قا س − ك

٢ ك = لو$_{هـ}$ | قا س + ظا س | + ظا س قا س + ث

ك = $\frac{١}{٢}$ لو$_{هـ}$ | قا س + ظا س |

+ $\frac{١}{٢}$ ظا س قا س + ثَ

⑤ $\int$ جتا (لو$_{هـ}$ س) ء س

نفرض ع = لو$_{هـ}$ س

∴ ء ع = $\frac{١}{س}$ ء س

س = $هـ^{ع}$

التكامل (ك) = $\int$ جتا ع × $هـ^{ع}$ ء ع

$هـ^{ع}$	جتا ع
$هـ^{ع}$	جا ع

ك = $هـ^{ع}$ جا ع

− $\int$ $هـ^{ع}$ جا ع ء ع

ك = $هـ^{ع}$ جا ع + $هـ^{ع}$ جتا ع

− $\int$ $هـ^{ع}$ جتا ع ء ع

$هـ^{ع}$	جا ع
$هـ^{ع}$	− جتا ع

ك = $هـ^{ع}$ جا ع

+ $هـ^{ع}$ جتا ع − ك

٢ ك = $هـ^{ع}$ جا ع + $هـ^{ع}$ جتا ع + ث

∴ ك = $\frac{١}{٢}$ $هـ^{ع}$ (جا ع + جتا ع) + ثَ

= $\frac{١}{٢}$ س (جا (لو$_{هـ}$ س)

+ جتا (لو$_{هـ}$ س)) + ث

⑥ $\int$ جا ٥ س جا ٣ س ء س

= $\frac{١}{٢}$ $\int$ ٢ جا ٥ س جا ٣ س ء س

= $\frac{١}{٢}$ $\int$ [جا ٥ س جا ٣ س + جتا ٥ س جتا ٣ س

− جتا ٥ س جتا ٣ س + جا ٥ س جا ٣ س] ء س

= $\frac{١}{٢}$ $\int$ [جتا (٥ س − ٣ س)

− جتا (٥ س + ٣ س)] ء س

= $\frac{١}{٢}$ $\int$ [جتا ٢ س − جتا ٨ س)] ء س

= $\frac{١}{٤}$ جا ٢ س − $\frac{١}{١٦}$ جا ٨ س + ث

اجابات تمارين 17

١

$\int_{-٢}^{٤}$ (٣ س^{٢} − ٢) ء س

= [س^{٣} − ٢ س]$_{-٢}^{٤}$

= [٤^{٣} − ٢ (٤)] − [(−٢)^{٣} − ٢ (−٢)]

= ٥٦ + ٤ = ٦٠

٢

① $\int_{١}^{٤}$ ٧ ء س = [٧ س]$_{١}^{٤}$ = ٧ × ٤ − ٧ × ١ = ٢١

② $\int_{-١}^{٢}$ (٢ س + ٣) ء س = [س^{٢} + ٣ س]$_{-١}^{٢}$

= (٤ + ٦) − (١ − ٣)

= ١٢

③ $\int_{-١}^{٣}$ (٤ س^{٣} − ٦ س^{٢} + ٥) ء س

= [س^{٤} − ٢ س^{٣} + ٥ س]$_{-١}^{٣}$ = ٤٢ − (−٢)

= ٤٤

④ $\int_{٠}^{٤}$ (٥ س $\sqrt{س}$ − ٣ س$^{\frac{١}{٢}}$) ء س

= $\int_{٠}^{٤}$ (٥ س$^{\frac{٣}{٢}}$ − ٣ س$^{\frac{١}{٢}}$) ء س

= [٢ س$^{\frac{٥}{٢}}$ − ٢ س$^{\frac{٣}{٢}}$]$_{٠}^{٤}$ = ٤٨ − ٠ = ٤٨

⑤ $\int_{٢}^{٤}$ (س^{٢} + $\frac{١}{س^{٢}}$) ء س

= $\int_{٢}^{٤}$ (س^{٢} + س$^{-٢}$) ء س

= [$\frac{١}{٣}$ س^{٣} − س$^{-١}$]$_{٢}^{٤}$ = $\frac{٢٥٣}{١٢}$ − $\frac{١٣}{٦}$ = $\frac{٢٢٧}{١٢}$

⑥ $\int_{١}^{٣}$ $\frac{٦ - س^{٤}}{٢ س^{٢}}$ ء س = $\int_{١}^{٣}$ (٣ س$^{-٢}$ − $\frac{١}{٢}$ س^{٢}) ء س

= [−٣ س$^{-١}$ − $\frac{١}{٦}$ س^{٣}]$_{١}^{٣}$

= $\frac{-١١}{٢}$ − ($\frac{-١٩}{٦}$) = $\frac{-٧}{٣}$

⑦ $\int_{٠}^{٥}$ $\sqrt{٣ س + ١}$ ء س = $\int_{٠}^{٥}$ (٣ س + ١)$^{\frac{١}{٢}}$ ء س

= [$\frac{(٣ س + ١)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢} × ٣}$]$_{٠}^{٥}$

= [$\frac{٢}{٩}$ (٣ س + ١)$^{\frac{٣}{٢}}$]$_{٠}^{٥}$

= $\frac{١٢٨}{٩}$ − $\frac{٢}{٩}$ = ١٤

⑧ $\int_{٠}^{٤}$ (٢ س + ١)$^{\frac{٣}{٢}}$ ء س = [$\frac{١}{٥}$ (٢ س + ١)$^{\frac{٥}{٢}}$]^{٤}

= $\frac{٢٤٣}{٥}$ − $\frac{١}{٥}$ = $\frac{٢٤٢}{٥}$

⑨ $\int_{٠}^{٥}$ $\frac{٣}{\sqrt{ن + ٤}}$ ء ن = $\int_{٠}^{٥}$ ٣ (ن + ٤)$^{-\frac{١}{٢}}$ ء ن

= [٦ (ن + ٤)$^{\frac{١}{٢}}$]$_{٠}^{٥}$

= ١٨ − ١٢ = ٦

⑩ $\int_{٤}^{٠}$ $\frac{ء ن}{\sqrt{٨ - ن}}$ = $\int_{٤}^{٠}$ (٨ − ن)$^{-\frac{١}{٢}}$ ء ن

= [−٢ (٨ − ن)$^{\frac{١}{٢}}$]$_{٤}^{٠}$

= −٤ $\sqrt{٢}$ − (−٤) = ٤ − ٤ $\sqrt{٢}$

⑪ $\int_{١}^{٤}$ $\frac{س - ١}{\sqrt{س} - ١}$ ء س = $\int_{١}^{٤}$ ($\sqrt{س}$ + ١) ء س

= [$\frac{٢}{٣}$ س$^{\frac{٣}{٢}}$ + س]$_{١}^{٤}$

= $\frac{٢٨}{٣}$ − $\frac{٥}{٣}$ = $\frac{٢٣}{٣}$

⑫ $\int_{٠}^{١} \frac{\sqrt{س^٣} + ٨}{\sqrt{س} + ٢} ءس$

$= \int_{٠}^{١} \frac{(\sqrt{س} + ٢)(\sqrt{س^٢} - ٢\sqrt{س} + ٤)}{(\sqrt{س} + ٢)} ءس$

$= \int_{٠}^{١} (\sqrt{س^٢} - ٢\sqrt{س} + ٤) ءس$

$= \left[\frac{٢}{٥}س^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٣}{٢}س^{\frac{٤}{٣}} + ٤س\right]_{٠}^{١}$

$= \frac{٣١}{١٠} - \frac{-٦١}{١٠} = \frac{٩٢}{١٠} = \frac{٤٦}{٥}$

٣

① $\int_{٠}^{\pi} جاس \, ءس = [-جتاس]_{٠}^{\pi} = ١ + ١ = ٢$

② $\int_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}} جتا\theta \, ء\theta = [جا\theta]_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}}$

$= ١ - (-١) = ٢$

③ $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{٠} قاس ظاس \, ءس = [قاس]_{\frac{\pi}{٤}}^{٠}$

$= ١ - \sqrt{٢}$

④ $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} قتا\theta ظتا\theta \, ء\theta = [-قتا\theta]_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}}$

$= [-\sqrt{٢} - (-\sqrt{٢})] =$ صفر

⑤ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} قا^٢س \, ءس = [ظاس]_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$

$= \sqrt{٢} - ٠ = \sqrt{٢}$

⑥ $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} قتا^٢س \, ءس = [-ظتاس]_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}}$

$= -(-\sqrt{٢} - \sqrt{٢}) = ٢\sqrt{٢}$

⑦ $\int_{٠}^{١} ٢ جا \pi ع \, ءع = \left[\frac{-٢}{\pi} جتا \pi ع\right]_{٠}^{١}$

$= \frac{-٢}{\pi}(-١ - ١) = \frac{٤}{\pi}$

⑧ $\int_{-\pi}^{\pi} (٤ + \pi جتا ٢س) ءس$

$= \left[٤س + \frac{\pi}{٢} جا ٢س\right]_{-\pi}^{\pi}$

$= (٤\pi) - (-٤\pi) = ٨\pi$

⑨ $\int_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}} (جاس + جتاس) ءس$

$= [-جتاس + جاس]_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}} = ١ - (-١) = ٢$

⑩ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} ظاع قا^٢ع \, ءع = \left[\frac{١}{٢} ظا^٢ع\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$

$= \frac{١}{٢} - ٠ = \frac{١}{٢}$

⑪ $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{ءس}{جا^٢س} = \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} قتا^٢س \, ءس$

$= [-ظتاس]_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} = ٠ - (-١) = ١$

⑫ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} \frac{جاس}{جتا^٢س} ءس = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} قاس ظاس \, ءس$

$= [قاس]_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} = ٢ - ١ = ١$

٤

① $\int_{١}^{هـ} \frac{٢}{س} ءس = [٢ لو_{هـ}|س|]_{١}^{هـ}$

$= ٢ لو_{هـ} هـ - ٢ لو_{هـ} ١ = ٢$

② $\int_{هـ}^{١} \frac{ءس}{س} = [لو_{هـ}|س|]_{هـ}^{١}$

$= لو_{هـ} ١ - لو_{هـ} هـ = -١$

③ $\int_{-٥}^{-١} \frac{٣}{س} ءس = [٣ لو_{هـ}|س|]_{-٥}^{-١}$

$= ٣ [لو_{هـ} ١ - لو_{هـ} ٥]$

$= -٣ لو_{هـ} ٥$

④ $\int_{٠}^{٢} هـ^{-٢س} ءس = \left[\frac{-١}{٢} هـ^{-٢س}\right]_{٠}^{٢}$

$= \frac{-١}{٢}[هـ^{-٤} - هـ^{٠}]$

$= \frac{-١}{٢}(هـ^{-٤} - ١)$

⑤ $\int_{٠}^{لو_{هـ}٢} هـ^{س} ءس = [هـ^{س}]_{٠}^{لو_{هـ}٢} = ٢ - ١ = ٢$

⑥ $\int_{٠}^{٢} (٢س - ٧ هـ^{س}) ءس$

$= [س^٢ - ٧ هـ^{س}]_{٠}^{٢} = (٤ - ٧ هـ^٢) - (-٧)$

$= ١١ - ٧ هـ^٢$

⑦ $\int_{٠}^{١} ٣س هـ^{س^٢} ءس$

$= \frac{٣}{٢} \int_{٠}^{١} ٢س هـ^{س^٢} ءس$

$= \frac{٣}{٢}[هـ^{س^٢}]_{٠}^{١} = \frac{٣}{٢}[هـ - ١]$

⑧ $\int_{لو_{هـ}٢}^{لو_{هـ}٤} (٢ هـ^{٢س} - هـ^{س}) ءس$

$= [هـ^{٢س} - هـ^{س}]_{لو_{هـ}٢}^{لو_{هـ}٤}$

$= (هـ^{٢لو_{هـ}٤} - هـ^{لو_{هـ}٤}) - (هـ^{٢لو_{هـ}٢} - هـ^{لو_{هـ}٢})$

$= (١٦ - ٤) - (٤ - ٢) = ١٠$

٥

① $\int_{٠}^{٥} س^٢ ءس + \int_{-٢}^{٠} س^٢ ءس$

$= \int_{-٢}^{٥} س^٢ ءس$

② $\int_{-٤}^{٦} \sqrt{س + ٦} \, ءس - \int_{٤}^{٦} \sqrt{س + ٦} \, ءس$

$= \int_{-٤}^{٦} \sqrt{س + ٦} \, ءس + \int_{٦}^{٤} \sqrt{س + ٦} \, ءس$

$= \int_{-٤}^{٤} \sqrt{س + ٦} \, ءس$

③ $\int_{١}^{٦} د \, ءس + \int_{٦}^{٢} د \, ءس$

$= \int_{١}^{٢} د \, ءس - \int_{٣}^{٢} د \, ءس$

$= \int_{١}^{٢} د \, ءس + \int_{٢}^{٣} د \, ءس$

$- \int_{١}^{٣} د \, ءس = \int د \, ءس$

④ $\int_{-٤}^{٤} ٢س^٢ ءس + \int_{٤}^{٥} س^٢ ءس$

$= ٢ \int_{٠}^{٤} س^٢ ءس + \int_{٤}^{٥} س^٢ ءس$

(د(س) = $س^٢$ دالة زوجية)

$= \int_{٤-}^{٤} س^٢ ءس + \int_{٤}^{٥} س^٢ ءس$

$= \int_{-٤}^{٥} س^٢ ءس$

٦

① $\int_{١}^{٥} [د(س) + ر(س)] ءس$

$= \int_{١}^{٥} د(س) ءس + \int_{١}^{٥} ر(س) ءس$

$= ١٠ + (-٢) = ٨$

② $\int_{١}^{٥} [د(س) - ر(س)] ءس$

$= \int_{١}^{٥} د(س) ءس - \int_{١}^{٥} ر(س) ءس$

$= ١٠ - (-٢) = ١٢$

③ $\int_{٥}^{١} ٣ ر(س) ءس$

$= -٣ \int_{١}^{٥} ر(س) ءس = -٣ \times -٢ = ٦$

٧

① $\int_{١}^{٤} ٣ د(س) ءس = ٣ \times ٥ = ١٥$

② $\int_{٤}^{١} ٢ ر(س) ءس = -٢ \int_{١}^{٤} ر(س) ءس$

$= -٢ \times -٣ = ٦$

③ $\int_{١}^{٤} [٣ د(س) - ٢ ر(س)] ءس$

$= ٣ \int_{١}^{٤} د(س) ءس - ٢ \int_{١}^{٤} ر(س) ءس$

$= ٣ \times ٥ - ٢ \times -٣ = ١٥ + ٦ = ٢١$

④ $\int_{١}^{٤} [٣ ر(س) + ٤س] ءس$

$= ٣ \int_{١}^{٤} ر(س) ءس + \int_{١}^{٤} ٤س \, ءس$

$= ٣ \times -٣ + [٢س^٢]_{١}^{٤} = -٩ + ٣٢ - ٨ = ١٥$

٨

$\int [٣ د(س) - ٦س] ءس$

$= ٣ \int د(س) ءس - [٣س^٢]$

$= ٣ [\int د(س) ءس + \int د(س) ءس]$

$- [٣ \times ٢٥ - ٣ \times ٤]$

$= ٣ [٩ + (-٤)] - ٦٣ = -٤٨$

٩

$$\int_{٢}^{٤} د(س)\,ءس$$

$$= \int_{-١}^{٤} د(س)\,ءس - \int_{-١}^{٢} د(س)\,ءس$$

$$= ٢٥٥ - (-(-١٥)) = ٢٤٠$$

١٠

$$\int_{٠}^{٣} د(س)\,ءس$$

$$= \int_{٠}^{٢} د(س)\,ءس + \int_{٢}^{٣} د(س)\,ءس$$

$$= \int_{٢}^{٣} (٣س - ٢)\,ءس + \int_{٠}^{٢} س^{٢}\,ءس$$

$$= \left[\frac{٣}{٢}س^{٢} - ٢س\right]_{٢}^{٣} + \left[\frac{١}{٣}س^{٣}\right]_{٠}^{٢}$$

$$= \frac{١١}{٢} + \frac{٨}{٣} = \frac{٤٩}{٦}$$

١١

$$\int_{٠}^{٦} د(س)\,ءس$$

$$= \int_{٠}^{٢} ٢\,ءس + \int_{٢}^{٦} س\,ءس$$

$$= [٢س]_{٠}^{٢} + \left[\frac{١}{٢}س^{٢}\right]_{٢}^{٦}$$

$$= (٤ - ٠) + (١٨ - ٢) = ٢٠$$

١٢

$$\int_{-١}^{٣} د(س)\,ءس$$

$$= \int_{-١}^{٠} د(س)\,ءس + \int_{٠}^{٣} د(س)\,ءس$$

$$= \int_{-١}^{٠} (٢س + س^{٢})\,ءس + \int_{٠}^{٣} (٢س - س^{٢})\,ءس$$

$$= \left[س^{٢} + \frac{١}{٣}س^{٣}\right]_{-١}^{٠} + \left[س^{٢} - \frac{١}{٣}س^{٣}\right]_{٠}^{٣}$$

$$= \frac{-٢}{٣} + ٠ = \frac{-٢}{٣}$$

١٣

$$\int_{٠}^{٢} د(س)\,ءس$$

$$= \int_{٠}^{١} (س^{٢} + ١)\,ءس + \int_{١}^{٢} (٣س - ١)\,ءس$$

$$= \left[\frac{١}{٣}س^{٣} + س\right]_{٠}^{١} + \left[\frac{٣}{٢}س^{٢} - س\right]_{١}^{٢}$$

$$= \frac{٤}{٣} + \frac{٧}{٢} = \frac{٢٩}{٦}$$

١٤

(١) $\int_{-١}^{٣} |س - ١|\,ءس$ ، $د(س) = |س - ١|$

$$= \begin{cases} -س + ١ ، & س < ١ \\ س - ١ ، & س \geq ١ \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-١}^{٣} د(س)\,ءس$$

$$= \int_{-١}^{١} (-س + ١)\,ءس + \int_{١}^{٣} (س - ١)\,ءس$$

$$= \left[-\frac{١}{٢}س^{٢} + س\right]_{-١}^{١} + \left[\frac{١}{٢}س^{٢} - س\right]_{١}^{٣}$$

$$= ٢ + ٢ = ٤$$

(٢) $د(س) = |س - ٣|$

$$= \begin{cases} -س + ٣ ، & س < ٣ \\ س - ٣ ، & س \geq ٣ \end{cases}$$

$$\therefore \int_{٠}^{٥} د(س)\,ءس = \int_{٠}^{٣} (-س + ٣)\,ءس$$

$$+ \int_{٣}^{٥} (س - ٣)\,ءس$$

$$= \left[\frac{-١}{٢}س^{٢} + ٣س\right]_{٠}^{٣}$$

$$+ \left[\frac{١}{٢}س^{٢} - ٣س\right]_{٣}^{٥} = \frac{٩}{٢} + ٢ = \frac{١٣}{٢}$$

(٣) $د(س) = |س - ٢|$

$$= \begin{cases} -س + ٢ ، & س < ٢ \\ س - ٢ ، & س \geq ٢ \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-٢}^{٤} د(س)\,ءس$$

$$= \int_{-٢}^{٢} (-س + ٢)\,ءس + \int_{٢}^{٤} (س - ٢)\,ءس$$

$$= \left[-\frac{١}{٢}س^{٢} + ٢س\right]_{-٢}^{٢} + \left[\frac{١}{٢}س^{٢} - ٢س\right]_{٢}^{٤}$$

$$= ٨ + ٢ = ١٠$$

(٤) $د(س) = |س + ١|$

$$= \begin{cases} -س - ١ ، & س < -١ \\ س + ١ ، & س \geq -١ \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-٤}^{٢} د(س)\,ءس$$

$$= \int_{-٤}^{-١} (-س - ١)\,ءس + \int_{-١}^{٢} (س + ١)\,ءس$$

$$= \left[-\frac{١}{٢}س^{٢} - س\right]_{-٤}^{-١} + \left[\frac{١}{٢}س^{٢} + س\right]_{-١}^{٢}$$

$$= \frac{٩}{٢} + \frac{٩}{٢} = ٩$$

(٥) $د(س) = |٢س - ٣|$

$$= \begin{cases} -٢س + ٣ ، & س < \frac{٣}{٢} \\ ٢س - ٣ ، & س \geq \frac{٣}{٢} \end{cases}$$

$$\therefore \int_{٠}^{٣} د(س)\,ءس$$

$$= \int_{٠}^{\frac{٣}{٢}} (-٢س + ٣)\,ءس + \int_{\frac{٣}{٢}}^{٣} (٢س - ٣)\,ءس$$

$$= \left[-س^{٢} + ٣س\right]_{٠}^{\frac{٣}{٢}} + \left[س^{٢} - ٣س\right]_{\frac{٣}{٢}}^{٣}$$

$$= \frac{٩}{٤} + \frac{٩}{٤} = \frac{٩}{٢}$$

(٦) $د(س) = |٢س - ١|$

$$= \begin{cases} -٢س + ١ ، & س < \frac{١}{٢} \\ ٢س - ١ ، & س \geq \frac{١}{٢} \end{cases}$$

$$\therefore \int_{٠}^{٢} د(س)\,ءس$$

$$= \int_{٠}^{\frac{١}{٢}} (-٢س + ١)\,ءس + \int_{\frac{١}{٢}}^{٢} (٢س - ١)\,ءس$$

$$= \left[-س^{٢} + س\right]_{٠}^{\frac{١}{٢}} + \left[س^{٢} - س\right]_{\frac{١}{٢}}^{٢}$$

$$= \frac{١}{٤} + \frac{٩}{٤} = \frac{٥}{٢}$$

(٧) $د(س) = \sqrt{س^{٢} + ٤س + ٤} = |س + ٢|$

$$= \begin{cases} -س - ٢ ، & س < -٢ \\ س + ٢ ، & س \geq -٢ \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-٣}^{١} د(س)\,ءس$$

$$= \int_{-٣}^{-٢} (-س - ٢)\,ءس$$

$$+ \int_{-٢}^{١} (س + ٢)\,ءس$$

$$= \left[-\frac{١}{٢}س^{٢} - ٢س\right]_{-٣}^{-٢}$$

$$+ \left[\frac{١}{٢}س^{٢} + ٢س\right]_{-٢}^{١} = \frac{١}{٢} + \frac{٩}{٢} = ٥$$

(٨) $د(س) = س|س| = \begin{cases} -س^{٢} ، & س < ٠ \\ س^{٢} ، & س \geq ٠ \end{cases}$

$$\therefore \int_{-١}^{٣} د(س)\,ءس$$

$$= \int_{-١}^{٠} -س^{٢}\,ءس + \int_{٠}^{٣} س^{٢}\,ءس$$

$$= \left[-\frac{١}{٣}س^{٣}\right]_{-١}^{٠} + \left[\frac{١}{٣}س^{٣}\right]_{٠}^{٣}$$

$$= \frac{-١}{٣} + ٩ = \frac{٢٦}{٣}$$

(٩) $د(س) = ٣س|س - ٤|$

$$= \begin{cases} -٣س^{٢} + ١٢س ، & س < ٤ \\ ٣س^{٢} - ١٢س ، & س \geq ٤ \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-١}^{٣} د(س)\,ءس$$

$$= \int_{-١}^{٣} (-٣س^{٢} + ١٢س)\,ءس$$

$$= \left[-س^{٣} + ٦س^{٢}\right]_{-١}^{٣} = ٢٠$$

(١٠) $د(س) = س|س - ١|$

$$= \begin{cases} -س^{٢} + س ، & س < ١ \\ س^{٢} - س ، & س \geq ١ \end{cases}$$

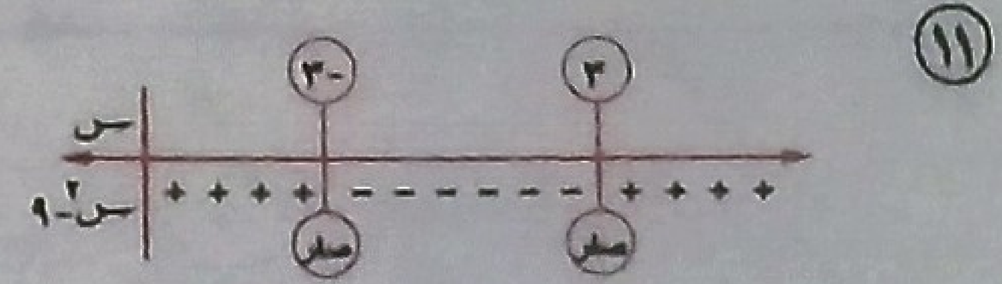
$$\therefore \int_{-٢}^{٢} د(س)\,ءس = \int_{-٢}^{١} (-س^{٢} + س)\,ءس$$

$$+ \int_{١}^{٢} (س^{٢} - س)\,ءس$$

$$= \left[-\frac{١}{٣}س^{٣} + \frac{١}{٢}س^{٢}\right]_{-٢}^{١}$$

$$+ \left[\frac{١}{٣}س^{٣} - \frac{١}{٢}س^{٢}\right]_{١}^{٢} = \frac{-٩}{٢} + \frac{٥}{٦} = -٣\frac{٢}{٣}$$

١١



$\text{د}(\text{س}) = |\text{س}^٢ - ٩|$

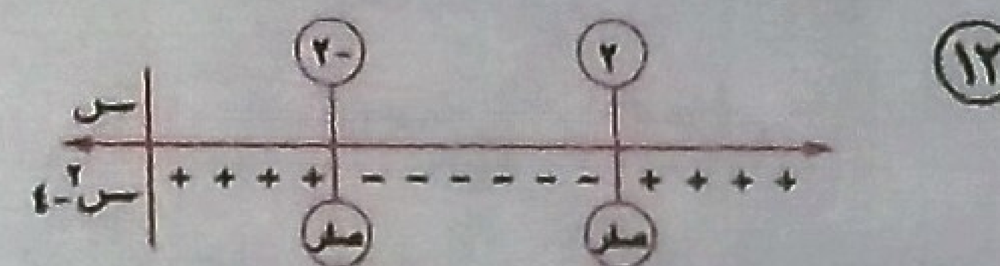
$$= \begin{cases} \text{س}^٢ - ٩ &، \text{س} \le -٣ \\ -\text{س}^٢ + ٩ &، -٣ < \text{س} < ٣ \\ \text{س}^٢ - ٩ &، \text{س} \ge ٣ \end{cases}$$

$\therefore \int_{-١}^{١} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \int_{-١}^{١} (-\text{س}^٢ + ٩)\,\text{ءس}$

$= \left[-\frac{١}{٣}\text{س}^٣ + ٩\text{س}\right]_{-١}^{١}$

$= \frac{٥٢}{٣}$

١٢



$\text{د}(\text{س}) = |\text{س}^٢ - ٤|$

$$= \begin{cases} \text{س}^٢ - ٤ &، \text{س} \le -٢ \\ -\text{س}^٢ + ٤ &، -٢ < \text{س} < ٢ \\ \text{س}^٢ - ٤ &، \text{س} \ge ٢ \end{cases}$$

$\therefore \int_{-٣}^{٣} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$

$= \int_{-٣}^{-٢} (\text{س}^٢ - ٤)\,\text{ءس}$

$+ \int_{-٢}^{٢} (-\text{س}^٢ + ٤)\,\text{ءس}$

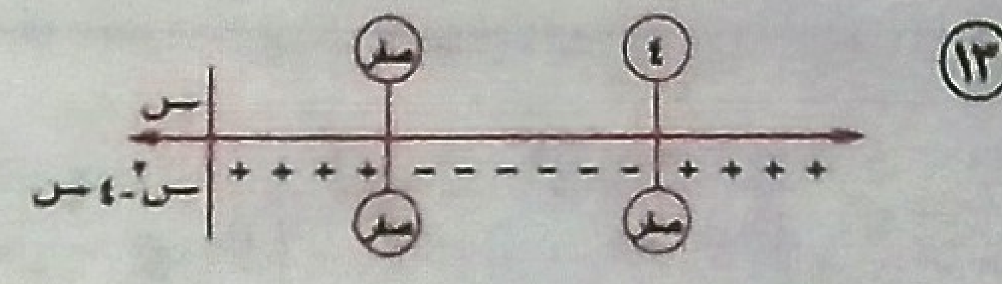
$+ \int_{٢}^{٣} (\text{س}^٢ - ٤)\,\text{ءس}$

$= \left[\frac{١}{٣}\text{س}^٣ - ٤\text{س}\right]_{-٣}^{-٢} + \left[-\frac{١}{٣}\text{س}^٣ + ٤\text{س}\right]_{-٢}^{٢}$

$+ \left[\frac{١}{٣}\text{س}^٣ - ٤\text{س}\right]_{٢}^{٣} = \frac{٧}{٣} + \frac{٣٢}{٣} + \frac{٧}{٣}$

$= \frac{٤٦}{٣} = ١٥\frac{١}{٣}$

١٣



$\text{د}(\text{س}) = |\text{س}^٢ - ٤\text{س}|$

$$= \begin{cases} \text{س}^٢ - ٤\text{س} &، \text{س} \le ٠ \\ -\text{س}^٢ + ٤\text{س} &، ٠ < \text{س} < ٤ \\ \text{س}^٢ - ٤\text{س} &، \text{س} \ge ٤ \end{cases}$$

$\therefore \int_{-١}^{٥} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \int_{-١}^{٠} (\text{س}^٢ - ٤\text{س})\,\text{ءس}$

$+ \int_{٠}^{٤} (-\text{س}^٢ + ٤\text{س})\,\text{ءس}$

$+ \int_{٤}^{٥} (\text{س}^٢ - ٤\text{س})\,\text{ءس}$

$= \left[\frac{١}{٣}\text{س}^٣ - ٢\text{س}^٢\right]_{-١}^{٠}$

$+ \left[-\frac{١}{٣}\text{س}^٣ + ٢\text{س}^٢\right]_{٠}^{٤} + \left[\frac{١}{٣}\text{س}^٣ - ٢\text{س}^٢\right]_{٤}^{٥}$

$= \frac{٧}{٣} + \frac{٣٢}{٣} + \frac{٧}{٣} = \frac{٤٦}{٣} = ١٥\frac{١}{٣}$

١٥

① (د)	② (جـ)	③ (أ)	④ (جـ)	⑤ (ب)
⑥ (د)	⑦ (ب)	⑧ (ب)	⑨ (ب)	⑩ (جـ)
⑪ (ب)	⑫ (ب)	⑬ (جـ)	⑭ (أ)	⑮ (د)
⑯ (أ)	⑰ (ب)			

١٦

① $\because \text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{١ + \text{س}^٢}$ فردية

$\therefore \int_{-٣}^{٣} \frac{\text{س}}{١ + \text{س}^٢}\,\text{ءس} = \text{صفر}$

② $\because \text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٣ - ٣\text{س}}{\text{س}^٢ + ١}$ فردية

$\therefore \int_{-٢}^{٢} \frac{\text{س}^٣ - ٣\text{س}}{\text{س}^٢ + ١}\,\text{ءس} = \text{صفر}$

③ $\because \text{د}(\text{س}) = \text{س}^٢ - ١$ زوجية

$\therefore \int_{-٣}^{٣} (\text{س}^٢ - ١)\,\text{ءس} = ٢\int_{٠}^{٣} (\text{س}^٢ - ١)\,\text{ءس}$

$= ٢\left[\frac{١}{٣}\text{س}^٣ - \text{س}\right]_{٠}^{٣} = ١٢$

④ $\because \text{د}(\text{س}) = \text{س}^٣\sqrt{\text{س}^٢ + ٣}$ فردية

$\therefore \int_{-٢}^{٢} (\text{س}^٣\sqrt{\text{س}^٢ + ٣})\,\text{ءس} = \text{صفر}$

⑤ $\because \text{د}(\text{س}) = ٤ - |\text{س}|$ زوجية

$\therefore \int_{-٤}^{٤} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = ٢\int_{٠}^{٤} (٤ - |\text{س}|)\,\text{ءس}$

$= ٢\int_{٠}^{٤} (٤ - \text{س})\,\text{ءس}$

$= ٢\left[٤\text{س} - \frac{١}{٢}\text{س}^٢\right]_{٠}^{٤}$

$= ٢ \times (٨) = ١٦$

⑥ $\because \text{د}(\text{س}) = \text{س}^٢(٣ - ٢|\text{س}|)$ زوجية

$\therefore \int_{-٢}^{٢} \text{س}^٢(٣ - ٢|\text{س}|)\,\text{ءس}$

$= ٢\int_{٠}^{٢} \text{س}^٢(٣ - ٢\text{س})\,\text{ءس}$

$= ٢\int_{٠}^{٢} (٣\text{س}^٢ - ٢\text{س}^٣)\,\text{ءس}$

$= ٢\left[\text{س}^٣ - \frac{١}{٢}\text{س}^٤\right]_{٠}^{٢} = ٢ \times ٠ = \text{صفر}$

⑦ $\text{د}(\text{س}) = (٢\text{س}^٥ - ٣\,\text{جا}\,\frac{\pi}{٦}\,\text{س})$ فردية

$\therefore \int_{-٣}^{٣} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{صفر}$

⑧ $\because \text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^٤ + \text{س}^٢}$ زوجية

$\therefore \int_{-١}^{١} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = ٢\int_{٠}^{١} \sqrt{\text{س}^٤ + \text{س}^٢}\,\text{ءس}$

$= ٢\int_{٠}^{١} |\text{س}|\sqrt{\text{س}^٢ + ١}\,\text{ءس}$

$= \int_{٠}^{١} ٢\text{س}\sqrt{\text{س}^٢ + ١}\,\text{ءس}$

$= \left[\frac{٢}{٣}(\text{س}^٢ + ١)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{١}$

$= \frac{٢}{٣}\left[٢\sqrt{٢} - ١\right] = \frac{٤\sqrt{٢} - ٢}{٣}$

⑨ $\text{د}(\text{س}) = |\text{جاس}|$ دالة زوجية

$\therefore \int_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$

$= ٢\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = ٢\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جاس}\,\text{ءس}$

$= ٢\left[-\text{جتاس}\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

$= ٢\left[٠ + ١\right] = ٢$

١٧

① $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^٢$ دالة زوجية

$\therefore \int_{-٢}^{٠} \text{س}^٢\,\text{ءس} = \int_{٠}^{٢} \text{س}^٢\,\text{ءس} = \frac{٨}{٣}$

② $\int_{-٢}^{٢} \text{س}^٢\,\text{ءس} = ٢\int_{٠}^{٢} \text{س}^٢\,\text{ءس} = ٢ \times \frac{٨}{٣} = \frac{١٦}{٣}$

③ $\int_{٠}^{٢} -\text{س}^٢\,\text{ءس} = -\int_{٠}^{٢} \text{س}^٢\,\text{ءس} = -\frac{٨}{٣}$

١٨

$\text{د}(\text{س}) = \text{س}^٣$ دالة فردية

① $\int_{-٢}^{٠} \text{س}^٣\,\text{ءس} = -\int_{٠}^{٢} \text{س}^٣\,\text{ءس} = -٤$

② $\int_{-٢}^{٢} \text{س}^٣\,\text{ءس} = \text{صفر}$

③ $\int_{٠}^{٢} ٣\text{س}^٣\,\text{ءس} = ٣\int_{٠}^{٢} \text{س}^٣\,\text{ءس}$

$= ٣ \times ٤ = ١٢$

١٩

① $\int_{٠}^{٤} [\text{د}(\text{س}) - ٢]\,\text{ءس}$

$= \int_{٠}^{٤} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} - \int_{٠}^{٤} ٢\,\text{ءس}$

$= ٣ - [٢\text{س}]_{٠}^{٤} = ٣ - (٨ - ٠) = -٥$

② $\int_{-٤}^{٤} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{صفر}$

③ $\int_{-٤}^{٤} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = ٢\int_{٠}^{٤} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$

$= ٢ \times ٣ = ٦$

٢٠

$\int_{-٣}^{٥} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \int_{-٣}^{٣} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$

$+ \int_{٣}^{٥} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$

$= \text{صفر} + ٩ = ٩$

٢١

∵ $\int_{-٤}^{٤} د(س)\,ءس = ٢\int_{-٤}^{٠} د(س)\,ءس = ٢٠$

∴ $\int_{-٤}^{٠} د(س)\,ءس = ١٠$

∴ $\int_{-٤}^{٢} د(س)\,ءس = \int_{-٤}^{٠} د(س)\,ءس + \int_{٠}^{٢} د(س)\,ءس$

$= ١٠ + ٦ = ١٦$

٢٢

(١) $\int_{٠}^{٢} س(س^٢ - ٣)^٢\,ءس$

$= \frac{١}{٢}\int_{٠}^{٢} ٢س(س^٢ - ٣)^٢\,ءس$

$= \frac{١}{٢}\left[\frac{١}{٣}(س^٢ - ٣)^٣\right]_{٠}^{٢} = \frac{١}{٦}(١ - (-٢٧))$

$= \frac{١٤}{٣}$

(٢) $\int_{٠}^{٣} س\sqrt{٢٥ - س^٢}\,ءس$

$= \frac{-١}{٢}\int_{٠}^{٣} -٢س\sqrt{٢٥ - س^٢}\,ءس$

$= \frac{-١}{٢}\left[\frac{٢}{٣}(٢٥ - س^٢)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{٣}$

$= \frac{-١}{٢} \times \frac{٢}{٣}[٦٤ - ١٢٥] = \frac{٦١}{٣}$

(٣) $\int_{٠}^{٢} س^٢\sqrt[٣]{س^٣ + ١}\,ءس$

$= \frac{١}{٣}\int_{٠}^{٢} ٣س^٢\sqrt[٣]{س^٣ + ١}\,ءس$

$= \frac{١}{٣}\left[\frac{٣}{٤} \times (س^٣ + ١)^{\frac{٤}{٣}}\right]_{٠}^{٢}$

$= \frac{١}{٣} \times \frac{٣}{٤}(٩^{\frac{٤}{٣}} - ١) = \frac{١}{٤}(٩\sqrt[٣]{٩} - ١)$

(٤) $\int_{٠}^{٤} \frac{س}{\sqrt{٩ + س^٢}}\,ءس$

$= \frac{١}{٢}\int_{٠}^{٤} ٢س(٩ + س^٢)^{-\frac{١}{٢}}\,ءس$

$= \frac{١}{٢}\left[٢(٩ + س^٢)^{\frac{١}{٢}}\right]_{٠}^{٤}$

$= \frac{١}{٢}[١٠ - ٦] = ٢$

(٥) $\int_{٠}^{٢} \frac{س^٢ + ٢س}{\sqrt{س^٣ + ٣س^٢ + ١٦}}\,ءس$

$= \frac{١}{٣}\int_{٠}^{٢} (٣س^٢ + ٦س)(س^٣ + ٣س^٢ + ١٦)^{-\frac{١}{٢}}\,ءس$

$= \frac{١}{٣}\left[٢(س^٣ + ٣س^٢ + ١٦)^{\frac{١}{٢}}\right]_{٠}^{٢}$

$= \frac{٢}{٣}[٦ - ٤] = \frac{٤}{٣}$

(٦) $\int_{-٤}^{٠} س(س + ٤)^٣\,ءس$

$= \int_{-٤}^{٠} (س + ٤ - ٤)(س + ٤)^٣\,ءس$

$= \int_{-٤}^{٠} (س + ٤)^٤ - ٤(س + ٤)^٣\,ءس$

$= \left[\frac{١}{٥}(س + ٤)^٥ - (س + ٤)^٤\right]_{-٤}^{٠}$

$= \frac{-٢٥٦}{٥}$

(٧) $\int_{٠}^{٨} \frac{س}{\sqrt{س + ١}}\,ءس = \int_{٠}^{٨} س(س + ١)^{-\frac{١}{٢}}\,ءس$

$= \int_{٠}^{٨} (س + ١ - ١)(س + ١)^{-\frac{١}{٢}}\,ءس$

$= \int_{٠}^{٨} (س + ١)^{\frac{١}{٢}} - (س + ١)^{-\frac{١}{٢}}\,ءس$

$= \left[\frac{٢}{٣}(س + ١)^{\frac{٣}{٢}} - ٢(س + ١)^{\frac{١}{٢}}\right]_{٠}^{٨}$

$= ١٢ - \frac{-٤}{٣} = \frac{٤٠}{٣}$

(٨) $\int_{-٢}^{٠} ص\sqrt[٣]{١ + ص}\,ءص$

$= \int_{-٢}^{٠} (ص + ١ - ١)(ص + ١)^{\frac{١}{٣}}\,ءص$

$= \int_{-٢}^{٠} (ص + ١)^{\frac{٤}{٣}} - (ص + ١)^{\frac{١}{٣}}\,ءص$

$= \left[\frac{٣}{٧}(ص + ١)^{\frac{٧}{٣}} - \frac{٣}{٤}(ص + ١)^{\frac{٤}{٣}}\right]_{-٢}^{٠}$

$= \frac{-٩}{٢٨} - \frac{-٣٣}{٢٨} = \frac{٦}{٧}$

(٩) $\int_{١}^{هـ} (لو_{هـ} س)\,ءس$

لو$_{هـ}$ س — ١ ، س — $\frac{١}{س}$

$= [س\, لو_{هـ} س]_{١}^{هـ}$

$- \int_{١}^{هـ} س \times \frac{١}{س}\,ءس$

$= [س\, لو_{هـ} س]_{١}^{هـ} - [س]_{١}^{هـ}$

$= هـ - (هـ - ١) = ١$

٢٣

(١) (أ)	(٢) (جـ)	(٣) (د)	(٤) (أ)	(٥) (د)
(٦) (أ)	(٧) (جـ)	(٨) (ب)	(٩) (ب)	(١٠) (جـ)
(١١) (ب)	(١٢) (جـ)	(١٣) (جـ)	(١٤) (ب)	(١٥) (ب)
(١٦) (ب)	(١٧) (ب)	(١٨) (جـ)	(١٩) (أ)	(٢٠) (ب)
(٢١) (جـ)	(٢٢) (ب)	(٢٣) (جـ)		

٢٤

(١) (ب)	(٢) (جـ)	(٣) (جـ)	(٤) (د)	(٥) (جـ)
(٦) (جـ)	(٧) (أ)	(٨) (د)	(٩) (جـ)	(١٠) (جـ)
(١١) (أ)	(١٢) (جـ)	(١٣) (ب)	(١٤) (جـ)	(١٥) (جـ)

إرشادات لحل رقم ٢٤

(١) بوضع ن = ٢ س ∴ ءن = ٢ ءس

، عند س = ٦ فإن: ن = ١٢

، عند س = ١٢ فإن: ن = ٢٤

∵ $\int_{٦}^{١٢} د(٢س)\,ءس = \frac{١}{٢}\int_{١٢}^{٢٤} د(ن)\,ءن = ١٠$

∴ $\int_{١٢}^{٢٤} د(ن)\,ءن = ٢٠$

(٢) بوضع س^٢ = ص ∴ ٢ س ءس = ءص

، عند س = ٢ ∴ ص = ٤

، عند س = ٣ فإن: ص = ٩

∴ $\int_{٢}^{٣} ٢س\, ق(س^٢)\, قَ(س^٢)\,ءس$

$= \int_{٤}^{٩} ق(ص)\, قَ(ص)\,ءص = \left[\frac{١}{٢}[ق(ص)]^٢\right]_{٤}^{٩}$

$= \frac{١}{٢}(ق(٩))^٢ - \frac{١}{٢}(ق(٤))^٢$

$= \frac{١}{٢} \times (٧)^٢ - \frac{١}{٢} \times (٣)^٢ = ٢٠$

(٣)

ص ، س ، و ، π ، ٢π ، ٣π ، سَ ، صَ

∵ $\int_{٠}^{\pi} جا س\,ءس = [-جتا س]_{٠}^{\pi} = -جتا\,\pi + جتا\,صفر$

$= ٢$

∴ $\int_{٠}^{٢٠\pi} |جا س|\,ءس = ٢٠ \times \int_{٠}^{\pi} جا س\,ءس$

$= ٢٠ \times ٢ = ٤٠$

(٤) ∵ $\int_{جا\theta}^{جتا\theta} \frac{س}{٢}\,ءس = \frac{-\sqrt{٣}}{٨}$

∴ $\left[\frac{س^٢}{٤}\right]_{جا\theta}^{جتا\theta} = \frac{-\sqrt{٣}}{٨}$

∴ $جتا^٢\theta - جا^٢\theta = \frac{-\sqrt{٣}}{٢}$

∴ $جتا\,٢\theta = \frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ $٢\theta = ١٥٠^\circ$

∴ $\theta = ٧٥^\circ$

(٥) $\int_{١}^{هـ} هـ^{س}\left(\frac{١ + س\, لو_{هـ} س}{س}\right)ءس$

$= \int_{١}^{هـ} هـ^{س}\left(\frac{١}{س} + لو_{هـ} س\right)ءس$

$= \int_{١}^{هـ} هـ^{س} \times \frac{١}{س}\,ءس$

$+ \int_{١}^{هـ} هـ^{س}\, لو_{هـ} س\,ءس$

لو$_{هـ}$ س — هـ^{س} ، $\frac{١}{س}$ — هـ^{س}

$= \int_{١}^{هـ} هـ^{س} \times \frac{١}{س}\,ءس + [هـ^{س}\, لو_{هـ} س]_{١}^{هـ}$

$- \int_{١}^{هـ} هـ^{س} \times \frac{١}{س}\,ءس$

$= هـ^{هـ}\, لو_{هـ} هـ - هـ^{١}\, لو_{هـ} ١ = هـ^{هـ}$

(٦) $\int_{١}^{٥} س\, دَ(س)\,ءس$

س — دَ(س) ، ءس — د(س)

$= [س\, د(س)]_{١}^{٥}$

$- \int_{١}^{٥} د(س)\,ءس$

$= [٥\, د(٥) - د(١)] - ٧$

$= ٥ \times ٩ - ٣ - ٧ = ٣٥$

⑦ ∵ $د(س) = س لو_{هـ} س$

∴ $د̀(س) = س \times \frac{١}{س} + لو_{هـ} س = ١ + لو_{هـ} س$

∴ $\int_{١}^{هـ} د̀(س) ءس = [د(س)]_{١}^{هـ}$

$= د(هـ) - د(١)$

$= لو_{هـ} هـ + ١ - لو_{هـ} ١ - ١$

$= ١$

⑧ ∵ $\int_{٢}^{٥} \frac{١}{س + ٢} ءس = [لو_{هـ} |س + ٢|]_{٢}^{٥}$

$لو_{هـ} ٧ - لو_{هـ} ٤ = لو_{هـ} \frac{٧}{٤}$

وبالمثل نجد أن:

$\int_{٠}^{٣} \frac{١}{س + ٤} ءس = \int_{-١}^{٢} \frac{١}{س + ٥} ءس$

$= \int_{٣}^{٦} \frac{١}{س + ١} ءس = لو_{هـ} \frac{٧}{٤}$

⑨ $\int_{ا}^{ب} |س - ٢| ءس$

$= \int_{ا}^{٢} (٢ - س) ءس + \int_{٢}^{ب} (س - ٢) ءس$

$= [٢س - \frac{١}{٢} س^٢]_{ا}^{٢} + [\frac{١}{٢} س^٢ - ٢س]_{٢}^{ب}$

$= ٢ - (٢ا - \frac{١}{٢} ا^٢) + (\frac{١}{٢} ب^٢ - ٢ب) + ٢$

∴ $٤ - ٢ا - ٢ب + \frac{١}{٢} ا^٢ + \frac{١}{٢} ب^٢ = ٤$

∴ $\frac{١}{٢} (ا^٢ + ب^٢) = ٢ (ا + ب)$

∴ $\frac{ا^٢ + ب^٢}{ا + ب} = ٤$

⑩ $\int_{٠}^{٢} (س + ٦)^٢ هـ^{س^٢} ءس$

$- \int_{٠}^{٢} (س - ٦)^٢ هـ^{س^٢} ءس$

$= \int_{٠}^{٢} \left((س + ٦)^٢ - (س - ٦)^٢\right) هـ^{س^٢} ءس$

$= \int_{٠}^{٢} ٢٤ س هـ^{س^٢} ءس$

$= ١٢ \int_{٠}^{٢} ٢ س هـ^{س^٢} ءس = ١٢ [هـ^{س^٢}]_{٠}^{٢}$

$= ١٢ [هـ^٤ - ١]$

⑪ $\int_{٠}^{٢} [د(س)]^٢ د̀(س) ءس = [\frac{١}{٣} [د(س)]^٣]_{٠}^{٢}$

$= \frac{١}{٣} [(د(٢))^٣ - (د(٠))^٣]$

$= \frac{١}{٣} (صفر - (٤)^٣) = \frac{-٦٤}{٣}$

⑫ $\int_{٠}^{٢} د̀(س) ءس = [د(س)]_{٠}^{٢} = د(٢) - د(٠)$

$= صفر - ٤ = -٤$

⑬ ∵ ميل المماس ل $= \frac{٢ - ٤}{١ - ٠} = -٢$

∴ $د̀(١) = -٢$

$\int_{-٣}^{١} د̀(س) ءس = [د̀(س)]_{-٣}^{١}$

$= د̀(١) - د̀(-٣) = -٢ - صفر = -٢$

⑭ ∵ ميل $ل_١ =$ ظا ٤٥° = ١ ∴ $د̀(٣) = ١$

، ∵ ميل $ل_٢ = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

∴ $د̀(-٤) = \frac{٣}{٢}$

∴ $\int_{-٤}^{٣} \frac{د̀(س)}{د(س)} ءس$

$= [لو_{هـ} |د(س)|]_{-٤}^{٣}$

$= لو_{هـ} |د(٣)| - لو_{هـ} |د(-٤)|$

$= لو_{هـ} ١ - لو_{هـ} \frac{٣}{٢} = لو_{هـ} \frac{٢}{٣}$

⑮ ∵ ميل المماس ل $= \frac{٣ + ٢}{٣ - ٠} = \frac{٥}{٣}$

∴ $د̀(٣) = \frac{٥}{٣}$

$\int_{٠}^{٣} س د̀(س) ءس$

$= [س د̀(س) - د(س)]_{٠}^{٣}$

$= [٣ د̀(٣) - د(٣)]$

$- [صفر - د(٠)]$

$= [٣ \times \frac{٥}{٣} - ٣] + ٢ = ٤$

تفاضل		تكامل
س	+	د(س)
١	−	د(س)
صفر		د(س)

اجابات تمارين 18

١

① $\int_{-١}^{٤} (٢س + ٣) ءس = [س^٢ + ٣س]_{-١}^{٤}$

$= (١٦ + ١٢) - (١ - ٣) = ٣٠$ وحدة مربعة.

② ص = |س − ٣| يقع فوق محور السينات في الفترة [٢ ، ٥]

∴ المساحة $= \int_{٢}^{٥} |س - ٣| ءس$

$= \int_{٢}^{٣} (-س + ٣) ءس$

$+ \int_{٣}^{٥} (س - ٣) ءس$

$= [-\frac{١}{٢} س^٢ + ٣س]_{٢}^{٣}$

$+ [\frac{١}{٢} س^٢ - ٣س]_{٣}^{٥}$

= ٢.٥ وحدة مربعة.

③ ص = ٣س² يقع فوق محور السينات في الفترة [−٣ ، ١]

∴ المساحة $= \int_{-٣}^{١} ٣س^٢ ءس$

$= [س^٣]_{-٣}^{١} = ١ - (-٢٧) = ٢٨$

٢

① $\int_{٠}^{٣} (١ + \frac{١}{٢} س) ءس = [س + \frac{١}{٤} س^٢]_{٠}^{٣}$

$= \frac{٢١}{٤}$ وحدة مربعة.

② $\int_{٢}^{٤} س ءس = [\frac{١}{٢} س^٢]_{٢}^{٤} = ٦$ وحدة مربعة.

③ $\int_{-١}^{٢} س^٢ ءس = [\frac{١}{٣} س^٣]_{-١}^{٢} = ٣$ وحدة مربعة.

④ $\int_{-١}^{٠} (س^٢ - ٢س) ءس$

$+ \left|\int_{٠}^{٢} (س^٢ - ٢س) ءس\right|$

$= [\frac{١}{٣} س^٣ - س^٢]_{-١}^{٠} + \left|[\frac{١}{٣} س^٣ - س^٢]_{٠}^{٢}\right|$

$= \frac{٤}{٣} + \frac{٤}{٣} = \frac{٨}{٣}$ وحدة مربعة.

⑤ $\int_{٠}^{٢} (٤ - س^٢) ءس + \left|\int_{٢}^{٣} (٤ - س^٢) ءس\right|$

$= [٤س - \frac{١}{٣} س^٣]_{٠}^{٢}$

$+ \left|[٤س - \frac{١}{٣} س^٣]_{٢}^{٣}\right|$

$= \frac{١٦}{٣} + \frac{٧}{٣} = \frac{٢٣}{٣}$ وحدة مربعة.

⑥ $\int_{-٢}^{١} (١ - س^٣) ءس = [س - \frac{١}{٤} س^٤]_{-٢}^{١}$

$= \frac{٢٧}{٤}$ وحدة مربعة.

⑦ $\int_{١}^{٣} \frac{٢}{س} ءس = [٢ لو_{هـ} |س|]_{١}^{٣}$

$= ٢ (لو_{هـ} ٣ - ٢ لو_{هـ} ١)$

$= ٢ لو_{هـ} ٣$ وحدة مربعة.

⑧ $\int_{-٢}^{١} (٤ - س^٢) ءس - \int_{-٢}^{١} (س + ٢) ءس$

$= \int_{-٢}^{١} (٤ - س^٢ - س - ٢) ءس$

$= \int_{-٢}^{١} (٢ - س^٢ - س) ءس$

$= [٢س - \frac{١}{٣} س^٣ - \frac{١}{٢} س^٢]_{-٢}^{١}$

$= \frac{٩}{٢}$ وحدة مربعة.

⑨ $\int_{-٢}^{٢} (٤ - س^٢) ءس - \int_{-٢}^{٢} (٢ - \frac{س^٢}{٢}) ءس$

$= \int_{-٢}^{٢} (٢ - \frac{١}{٢} س^٢) ءس$

$= [(٢س - \frac{١}{٦} س^٣)]_{-٢}^{٢} = \frac{١٦}{٣}$ وحدة مربعة.

⑩ $\int_{-٤}^{٥} ٢ \sqrt{س + ٤} ءس$

$= [٢ \times \frac{٢}{٣} (س + ٤)^{\frac{٣}{٢}}]_{-٤}^{٥}$

$= \frac{٤}{٣} \times ٢٧ = ٣٦$ وحدة مربعة.

⑪ $\left|\int_{\frac{١}{هـ}}^{١} (\frac{لو_{هـ} س}{س}) ءس\right| + \int_{١}^{هـ} \frac{لو_{هـ} س}{س} ءس$

$= \left|[\frac{١}{٢} (لو_{هـ} س)^٢]_{\frac{١}{هـ}}^{١}\right| + [\frac{١}{٢} (لو_{هـ} س)^٢]_{١}^{هـ}$

$= \left|\frac{١}{٢} (صفر - (-١)^٢)\right| + \frac{١}{٢} (١^٢ - صفر^٢)$

$= \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} = ١$ وحدة مربعة.

(١٢) $\left|\int_{٠}^{١} (هـ^{س} - هـ) ء س\right| + \int_{١}^{٢} (هـ^{س} - هـ) ء س$

$= \left|[هـ^{س} - هـ س]_{٠}^{١}\right| + [هـ^{س} - هـ س]_{١}^{٢}$

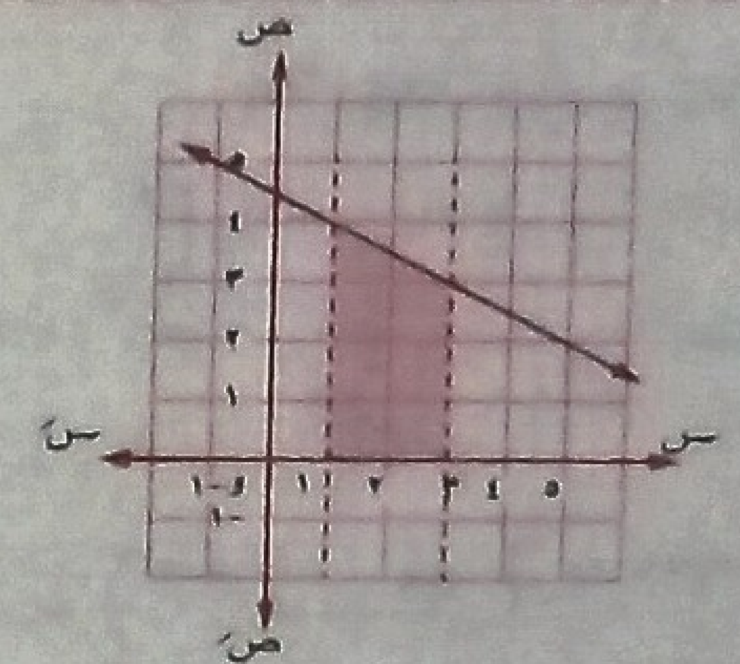
$= |٠ - ١| + ((هـ^{٢} - ٢ هـ) - (هـ - هـ))$

$= ١ + هـ^{٢} - ٢ هـ = هـ^{٢} - ٢ هـ + ١$

$= (هـ - ١)^{٢}$ وحدة مربعة.

٣

(١)



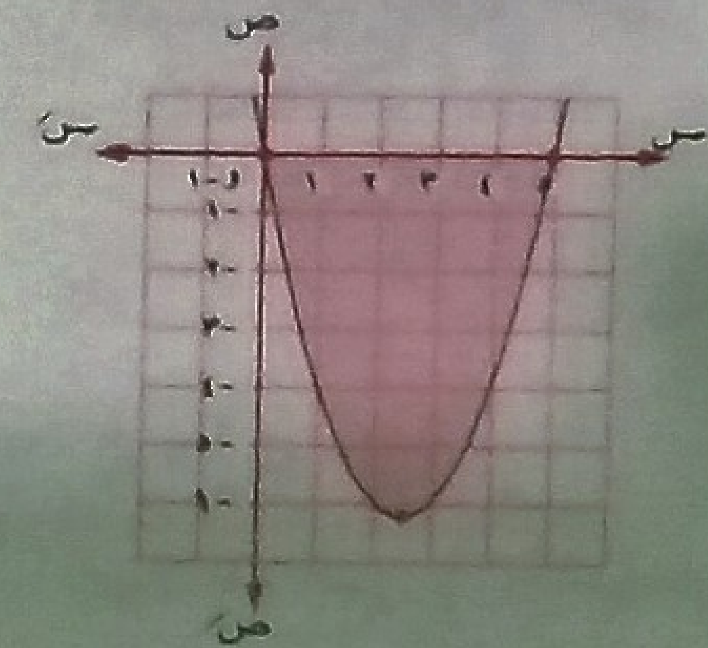
$س + ٢ ص = ٩$ ∴ $ص = \frac{-١}{٢} س + \frac{٩}{٢}$

∴ المساحة $= \int_{١}^{٣} (\frac{-١}{٢} س + \frac{٩}{٢}) ء س$

$= [\frac{-١}{٤} س^{٢} + \frac{٩}{٢} س]_{١}^{٣}$

$= ٧$ وحدة مربعة.

(٢)



* نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات

$س^{٢} - ٥ س = ٠$ ∴ $س = ٠$ ، $س = ٥$

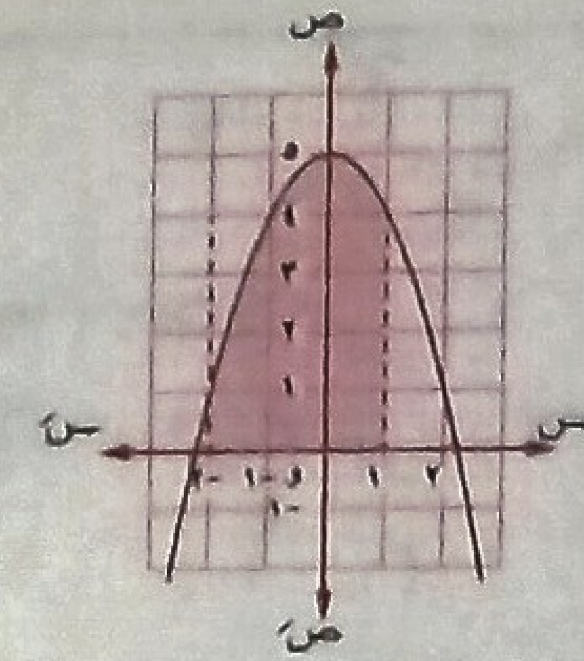
، ∵ المنحنى يقع تحت محور السينات فى الفترة $[٠ ، ٥]$

∴ المساحة $= \left|\int_{٠}^{٥} (س^{٢} - ٥ س) ء س\right|$

$= \left|[\frac{١}{٣} س^{٣} - \frac{٥}{٢} س^{٢}]_{٠}^{٥}\right|$

$= ٢٠ \frac{٥}{٦}$ وحدة مربعة.

(٣)



* نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات نضع

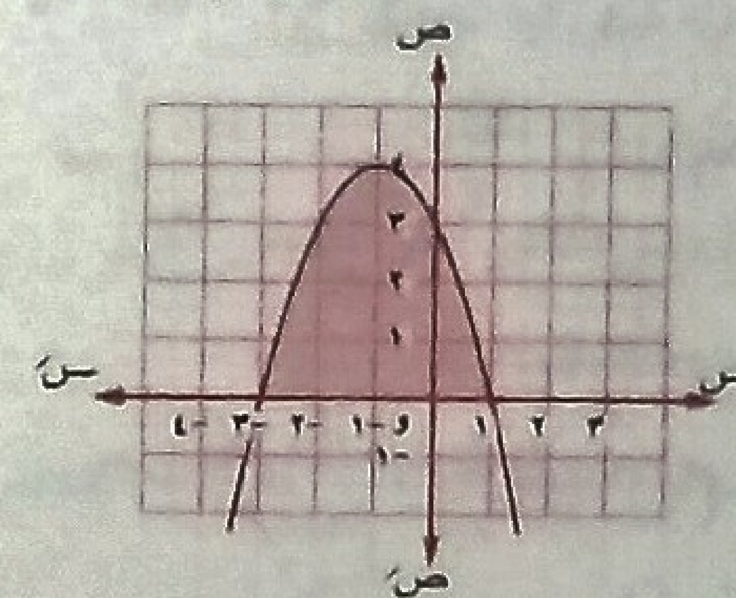
$٥ - س^{٢} = ٠$ ∴ $س = \pm \sqrt{٥}$

∴ المساحة $= \int_{-٢}^{١} (٥ - س^{٢}) ء س$

$= [٥ س - \frac{١}{٣} س^{٣}]_{-٢}^{١}$

$= ١٢$ وحدة مربعة.

(٤)



* نقط التقاطع مع محور السينات

$٣ - ٢ س - س^{٢} = ٠$

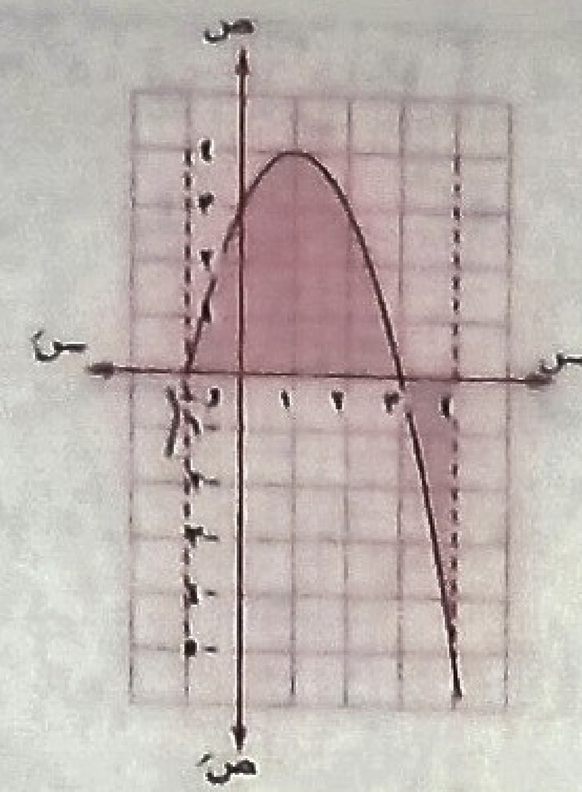
∴ $س = -٣$ ، $س = ١$

∴ المساحة $= \int_{-٣}^{١} (٣ - ٢ س - س^{٢}) ء س$

$= [٣ س - س^{٢} - \frac{١}{٣} س^{٣}]_{-٣}^{١}$

$= \frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة.

(٥)



* نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات نضع

$٣ + ٢ س - س^{٢} = ٠$

∴ $س = -١$ أ، $س = ٣$

∴ المساحة $= \int_{-١}^{٣} (٣ + ٢ س - س^{٢}) ء س$

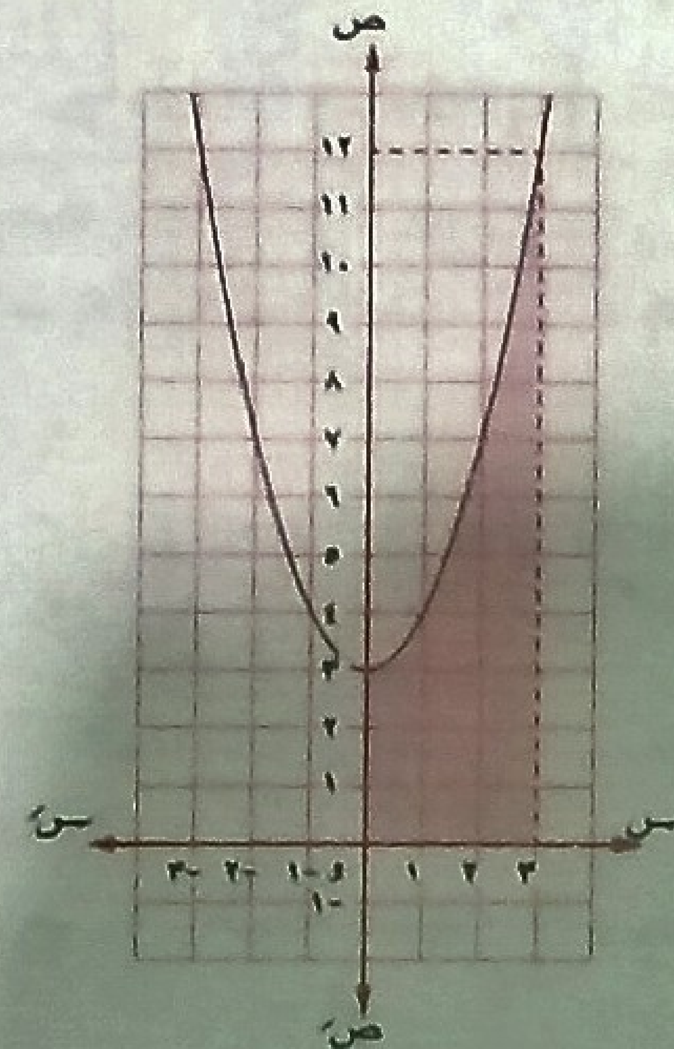
$+ \left|\int_{٣}^{٤} (٣ + ٢ س - س^{٢}) ء س\right|$

$= [٣ س + س^{٢} - \frac{١}{٣} س^{٣}]_{-١}^{٣}$

$+ \left|[٣ س + س^{٢} - \frac{١}{٣} س^{٣}]_{٣}^{٤}\right|$

$= \frac{٣٢}{٣} + \frac{٧}{٣} = ١٣$ وحدة مربعة.

(٦)



* نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات نضع

$س^{٢} + ٣ = ٠$

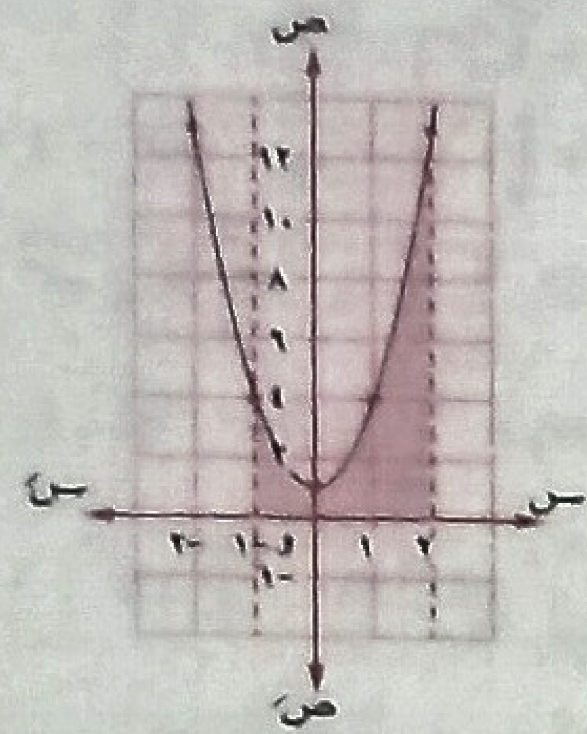
∴ المعادلة ليس لها حل فى ح

∴ المنحنى لايقطع محور السينات

∴ المساحة $= \int_{صفر}^{٣} (س^{٢} + ٣) ء س$

$= [\frac{١}{٣} س^{٣} + ٣ س]_{٠}^{٣} = ١٨$ وحدة مربعة.

(٧)



* نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات نضع

$٣ س^{٢} + ١ = ٠$

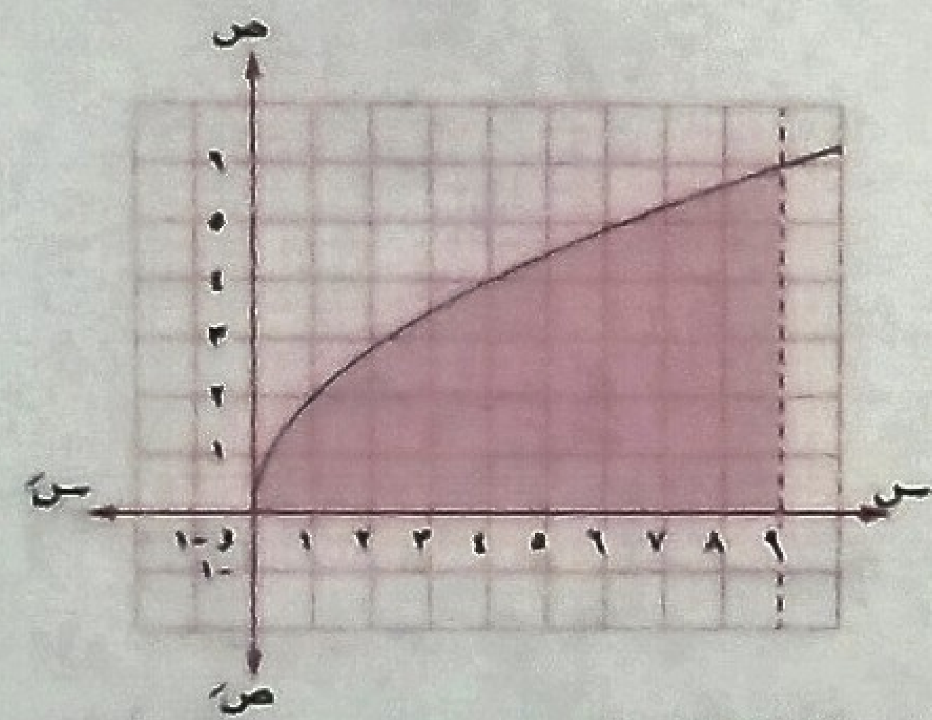
∴ المعادلة ليس لها حل فى ح

∴ المنحنى لايقطع محور السينات

∴ المساحة $= \int_{-١}^{٢} (٣ س^{٢} + ١) ء س$

$= [س^{٣} + س]_{-١}^{٢} = ١٢$ وحدة مربعة.

(٨)



* نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات

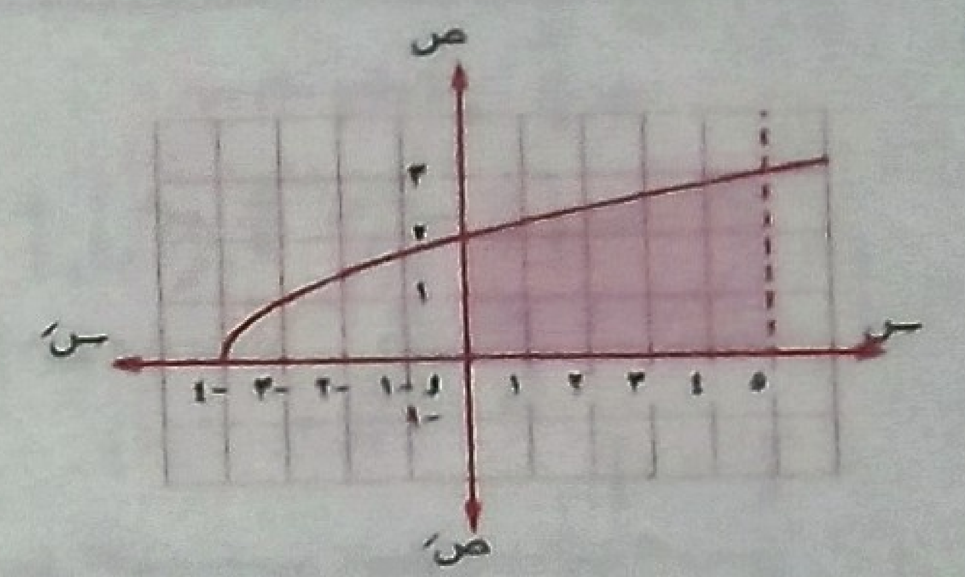
نضع $\sqrt{٤ س} = ٠$ ∴ $س = ٠$

∴ المساحة $= \int_{٠}^{٩} \sqrt{٤ س}\, ء س$

$= ٢ \int_{٠}^{٩} س^{\frac{١}{٢}} ء س$

$= ٢ [\frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}}]_{٠}^{٩} = ٣٦$ وحدة مربعة.

(٩)



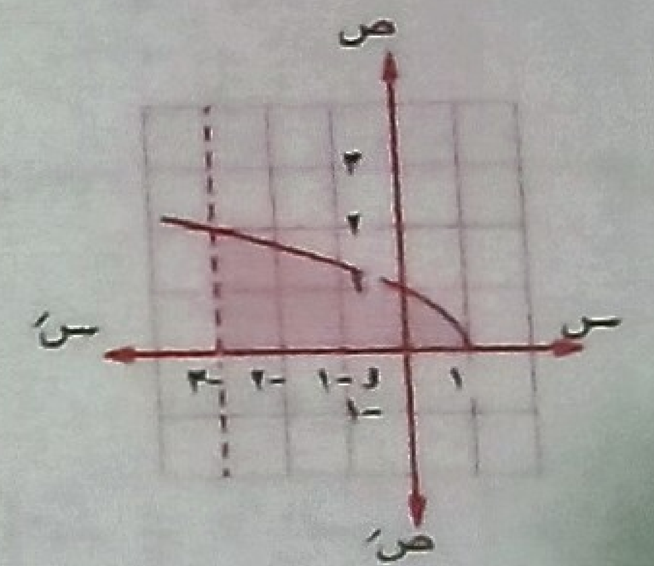
* نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات نضع

$\sqrt{\text{س} + ٤} = ٠ \quad \therefore \text{س} = -٤$

$\therefore \text{المساحة} = \int_{٠}^{٥} \sqrt{\text{س} + ٤}\ \text{ء س}$

$= \left[\frac{٢}{٣} (\text{س} + ٤)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{٥} = \frac{٣٨}{٣}$ وحدة مربعة.

(١٠)



* نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات نضع

$\sqrt{١ - \text{س}} = ٠ \quad \therefore \text{س} = ١$

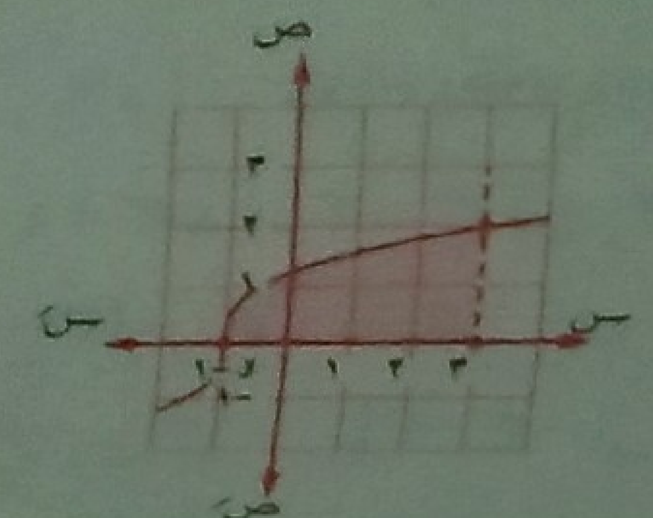
$\therefore \text{المساحة} = \int_{-٣}^{١} \sqrt{١ - \text{س}}\ \text{ء س}$

$= \left[\frac{(١ - \text{س})^{\frac{٣}{٢}}}{-١ \times \frac{٣}{٢}}\right]_{-٣}^{١}$

$= \left[\frac{-٢}{٣} (١ - \text{س})^{\frac{٣}{٢}}\right]_{-٣}^{١}$

$= ٥ \frac{١}{٣}$ وحدة مربعة.

(١١)



* نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات نضع

$\sqrt{٢ \text{س} + ٢} = ٠ \quad \therefore \text{س} = -١$

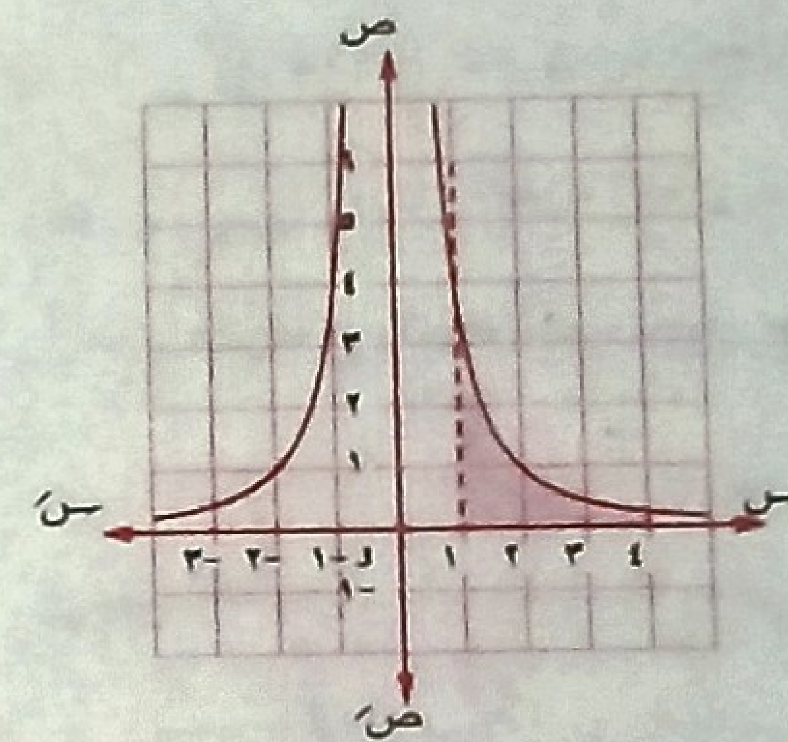
$\therefore \text{المساحة} = \int_{-١}^{٣} \sqrt[٣]{٢ \text{س} + ٢}\ \text{ء س}$

$= \left[\frac{(٢ \text{س} + ٢)^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣} \times ٢}\right]_{-١}^{٣}$

$= \left[\frac{٣}{٨} (٢ \text{س} + ٢)^{\frac{٤}{٣}}\right]_{-١}^{٣}$

$= ٦$ وحدة مربعة.

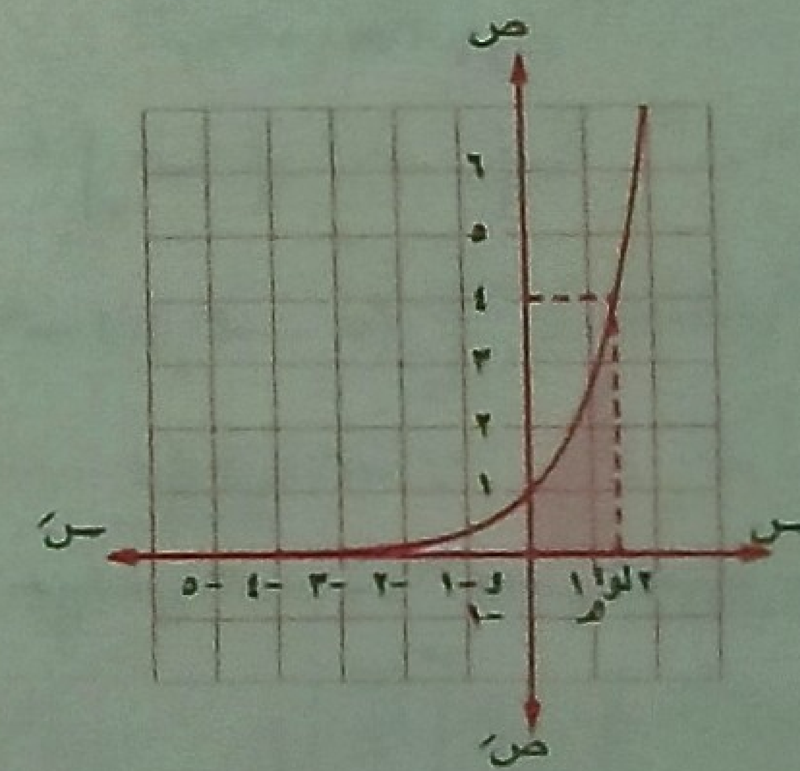
(١٢)



$\text{المساحة} = \int_{١}^{٤} \frac{٤}{\text{س}^{٢}}\ \text{ء س} = \int_{١}^{٤} ٤ \text{س}^{-٢}\ \text{ء س}$

$= \left[-٤ \text{س}^{-١}\right]_{١}^{٤} = ٣$ وحدة مربعة.

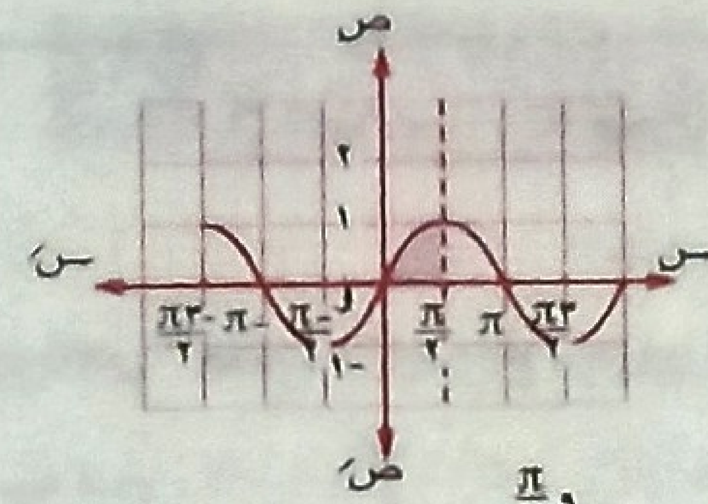
(١٣)



$\therefore \text{المساحة} = \int_{٠}^{\text{لو}_{\text{هـ}} ٤} \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{ء س} = \left[\text{هـ}^{\text{س}}\right]_{٠}^{\text{لو}_{\text{هـ}} ٤}$

$= ٤ - ١ = ٣$ وحدة مربعة.

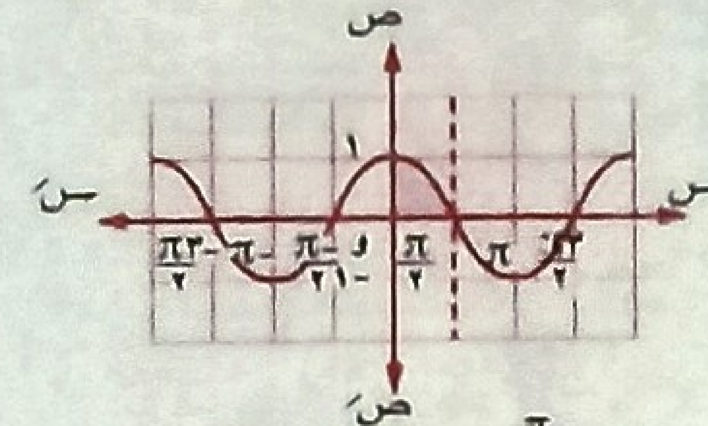
(١٤)



$\text{المساحة} = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جا س}\ \text{ء س} = \left[-\text{جتا س}\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

$= ١$ وحدة مربعة.

(١٥)



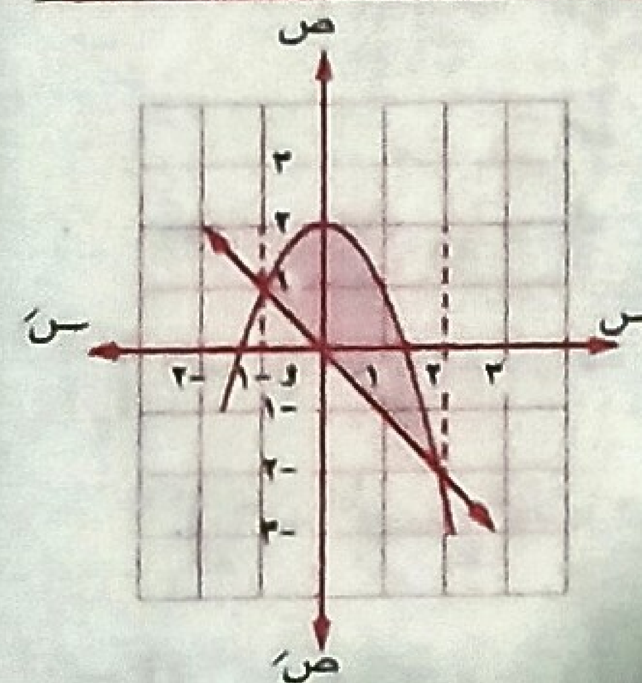
$\text{المساحة} = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جتا س}\ \text{ء س} = \left[\text{جا س}\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

$= ١$ وحدة مربعة.

٤

① $\text{ص} = ٢ - \text{س}^{٢}$

، $\text{س} + \text{ص} = ٠$



بحل المعادلتين

$\therefore \text{س} = ٢$

أ، $\text{س} = -١$

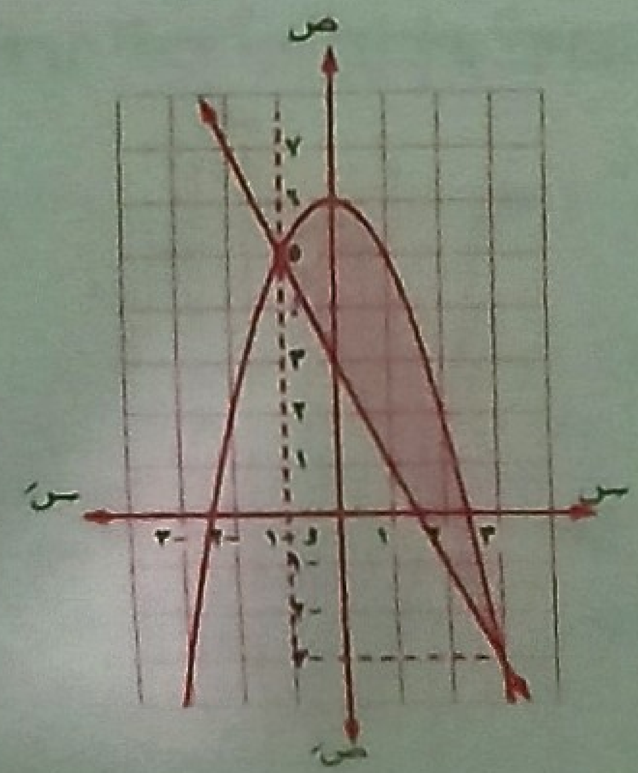
$\therefore \text{المساحة} = \int_{-١}^{٢} \left[(٢ - \text{س}^{٢}) - (-\text{س})\right] \text{ء س}$

$= \int_{-١}^{٢} (٢ - \text{س}^{٢} + \text{س})\ \text{ء س}$

$= \left[٢ \text{س} - \frac{١}{٣} \text{س}^{٣} + \frac{١}{٢} \text{س}^{٢}\right]_{-١}^{٢}$

$= \frac{٩}{٢}$ وحدة مربعة.

②



$\text{ص} + \text{س}^{٢} = ٦$ منها $\text{ص} = -\text{س}^{٢} + ٦$ (١)

، $\text{ص} + ٢ \text{س} - ٣ = ٠$

منها $\text{ص} = -٢ \text{س} + ٣$ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) :

$\therefore \text{س} = ٣ \quad ، \quad \text{س} = -١$

$\therefore \text{المساحة} = \int_{-١}^{٣} (-\text{س}^{٢} + ٦)$

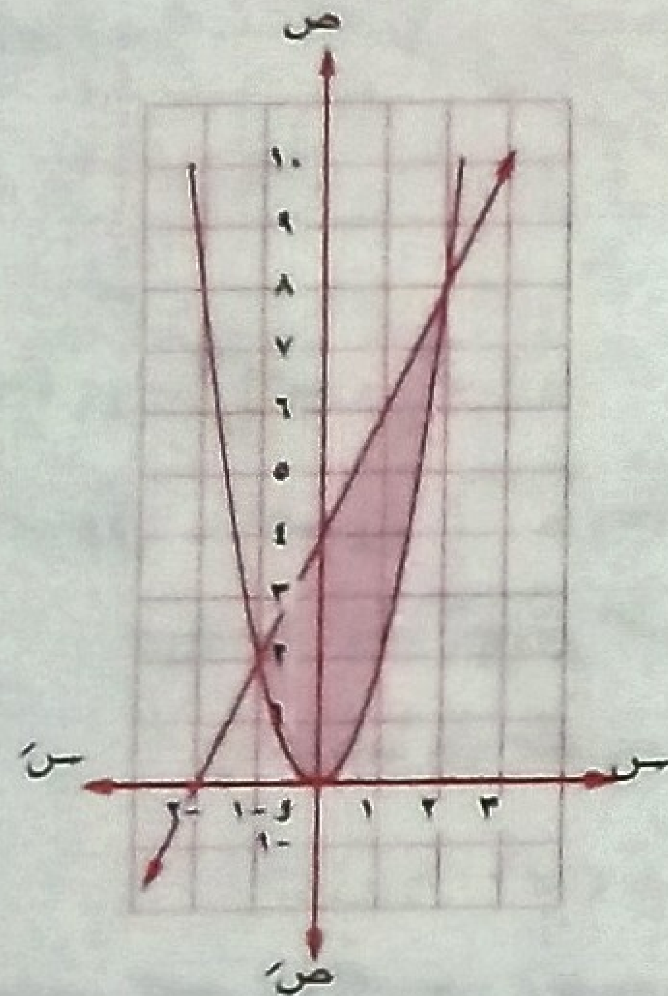
$- (-٢ \text{س} + ٣)\ \text{ء س}$

$= \int_{-١}^{٣} (-\text{س}^{٢} + ٢ \text{س} + ٣)\ \text{ء س}$

$= \left[-\frac{١}{٣} \text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + ٣ \text{س}\right]_{-١}^{٣}$

$= \frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة.

③



$\text{د}(\text{س}) = ٢ \text{س}^{٢} \ ، \ \text{ر}(\text{س}) = ٢ \text{س} + ٤$

بحل المعادلتين :

$\therefore \text{س} = ٢ \quad ، \quad \text{س} = -١$

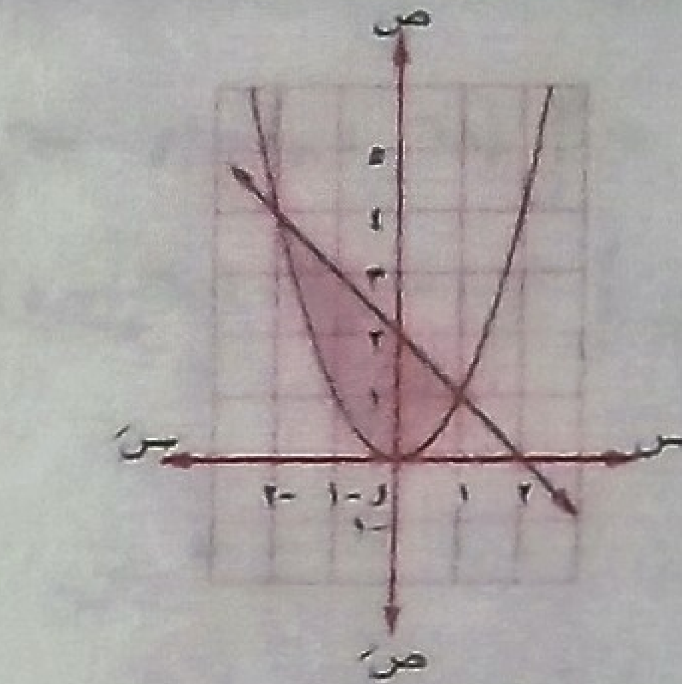
$\therefore \text{المساحة} = \int_{-١}^{٢} \left((٢ \text{س} + ٤) - (٢ \text{س}^{٢})\right) \text{ء س}$

$= \int_{-١}^{٢} (-٢ \text{س}^{٢} + ٢ \text{س} + ٤)\ \text{ء س}$

$= \left[-\frac{٢}{٣} \text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + ٤ \text{س}\right]_{-١}^{٢}$

$= ٩$ وحدة مربعة.

④



* نقط التقاطع بحل المعادلتين

∴ س = -٢ ، س = ١

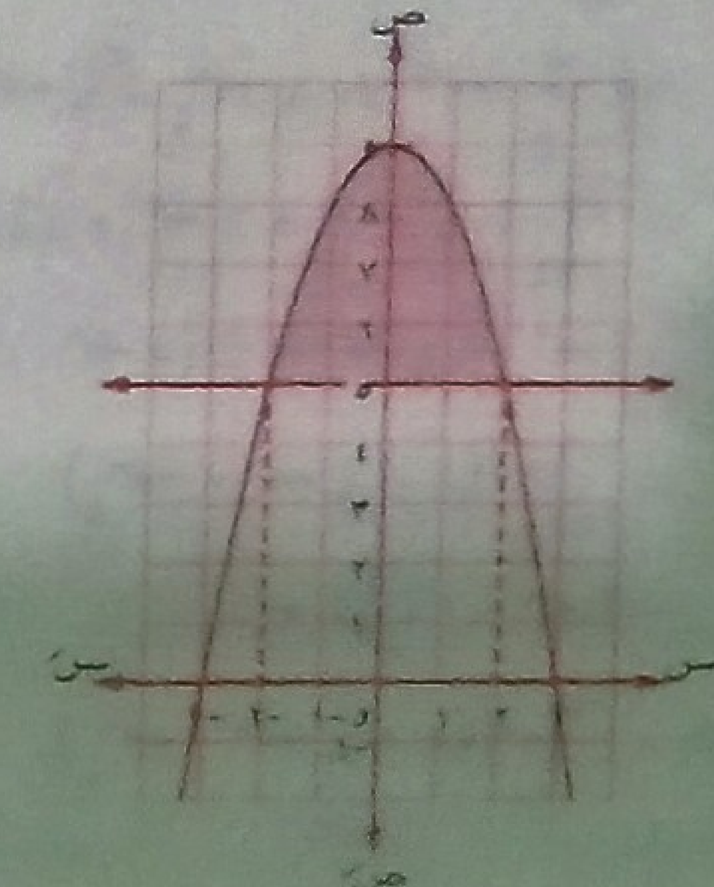
∴ المساحة = $\int_{-2}^{1} (2 - \text{س}) - (\text{س}^2)\, \text{ءس}$

= $\int_{-2}^{1} (2 - \text{س} - \text{س}^2)\, \text{ءس}$

= $\left[2\text{س} - \frac{1}{2}\text{س}^2 - \frac{1}{3}\text{س}^3\right]_{-2}^{1}$

= $4\frac{1}{2}$ وحدة مربعة.

⑤



* نقط تقاطع المنحنيين بحل المعادلتين

ص = ٩ - س^2 ، ص = ٥

∴ ٩ - س^2 = ٥ ∴ س = -٢ ، ٢

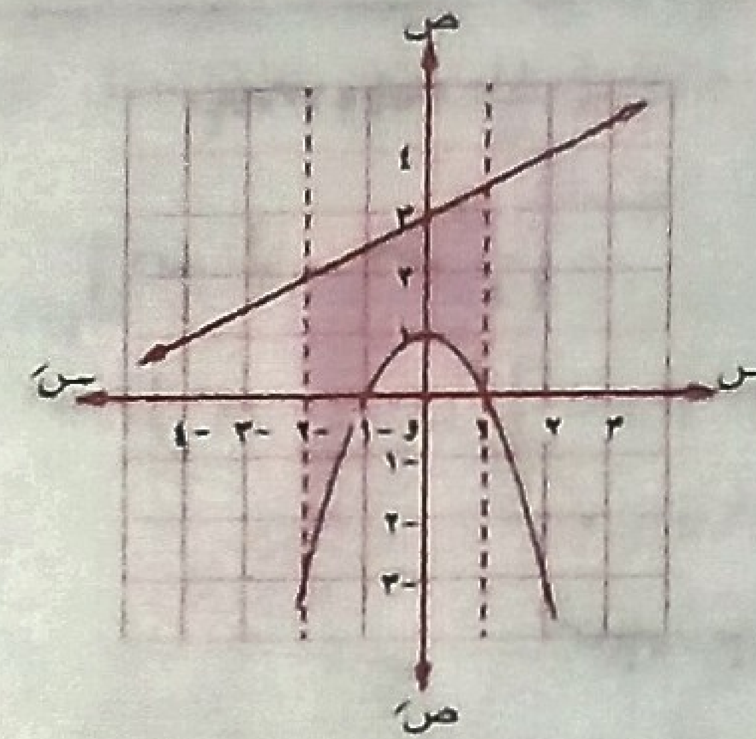
∴ المساحة = $\int_{-2}^{2} ((9 - \text{س}^2) - 5)\, \text{ءس}$

= $\int_{-2}^{2} (4 - \text{س}^2)\, \text{ءس}$

= $\left[4\text{س} - \frac{1}{3}\text{س}^3\right]_{-2}^{2}$

= $\frac{32}{3}$ وحدة مربعة.

⑥



بحل المعادلتين : ص = $-\text{س}^2 + 1$

، ص = $\frac{1}{2}\text{س} + 3$

∴ $-\text{س}^2 + 1 = \frac{1}{2}\text{س} + 3$

∴ $\text{س}^2 + \frac{1}{2}\text{س} + 2 = 0$

∴ $2\text{س}^2 + \text{س} + 4 = 0$

∴ المعادلة ليس لها حل فى ح

∴ المنحنيين غير متقاطعين

، ∵ المنحنى الثانى أعلى المنحنى الأول

∴ المساحة المطلوبة

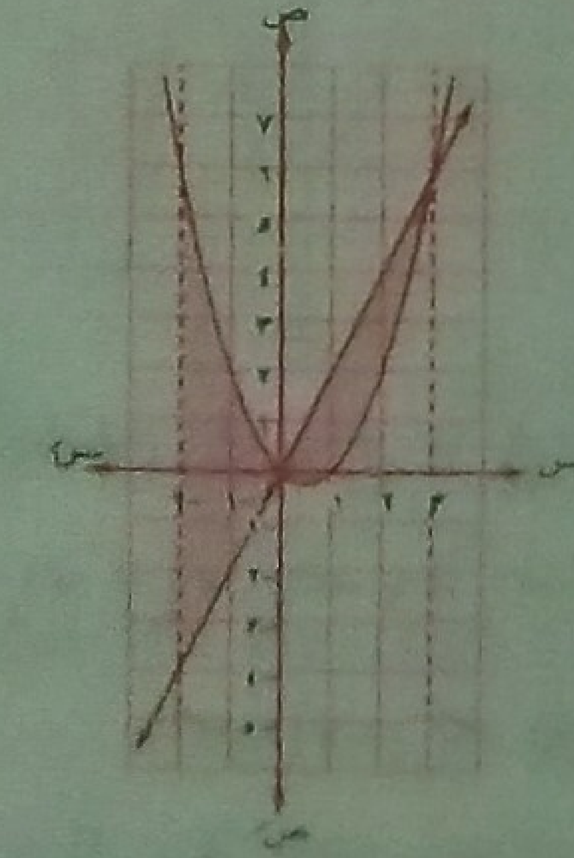
= $\int_{-2}^{1} (\frac{1}{2}\text{س} + 3) - (-\text{س}^2 + 1)\, \text{ءس}$

= $\int_{-2}^{1} (\frac{1}{2}\text{س} + 2 + \text{س}^2)\, \text{ءس}$

= $\left[\frac{1}{4}\text{س}^2 + 2\text{س} + \frac{1}{3}\text{س}^3\right]_{-2}^{1}$

= $\frac{33}{4}$ وحدة مربعة.

⑦



∴ المساحة = $\int_{-2}^{0} ((\text{س}^2 - \text{س}) - (2\text{س}))\, \text{ءس}$

+ $\int_{0}^{3} ((2\text{س}) - (\text{س}^2 - \text{س}))\, \text{ءس}$

= $\int_{-2}^{0} (\text{س}^2 - 3\text{س})\, \text{ءس}$

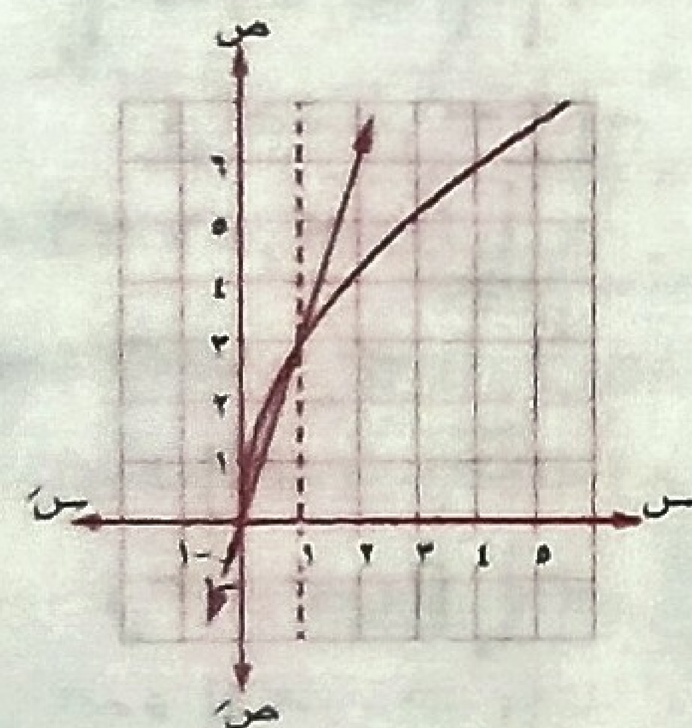
+ $\int_{0}^{3} (3\text{س} - \text{س}^2)\, \text{ءس}$

= $\left[\frac{1}{3}\text{س}^3 - \frac{3}{2}\text{س}^2\right]_{-2}^{0}$

+ $\left[\frac{3}{2}\text{س}^2 - \frac{1}{3}\text{س}^3\right]_{0}^{3}$

= $\frac{26}{3} + \frac{9}{2} = 13\frac{1}{6}$ وحدة مربعة.

⑧ بحل المعادلتين : ∴ س = ٠ ، ١

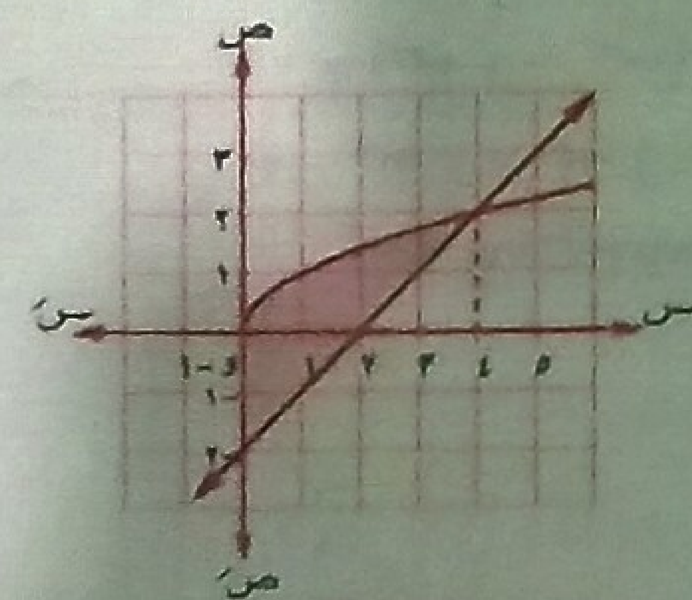


المساحة = $\int_{0}^{1} (3\sqrt{\text{س}} - 3\text{س})\, \text{ءس}$

= $\left[2(\text{س})^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\text{س}^2\right]_{0}^{1}$

= $\frac{1}{2}$ وحدة مربعة.

⑨

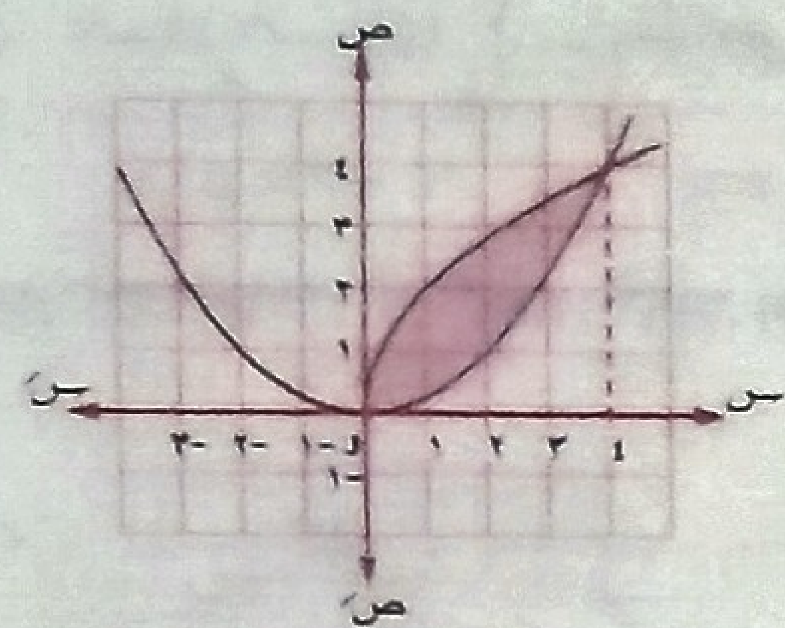


المساحة = $\int_{\text{صفر}}^{4} (\sqrt{\text{س}} - (\text{س} - 2))\, \text{ءس}$

= $\left[\frac{2}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\text{س}^2 + 2\text{س}\right]_{\text{صفر}}^{4}$

= $5\frac{1}{3}$ وحدة مربعة.

⑩ بحل المعادلتين : ∴ س = ٠ أ، ٤

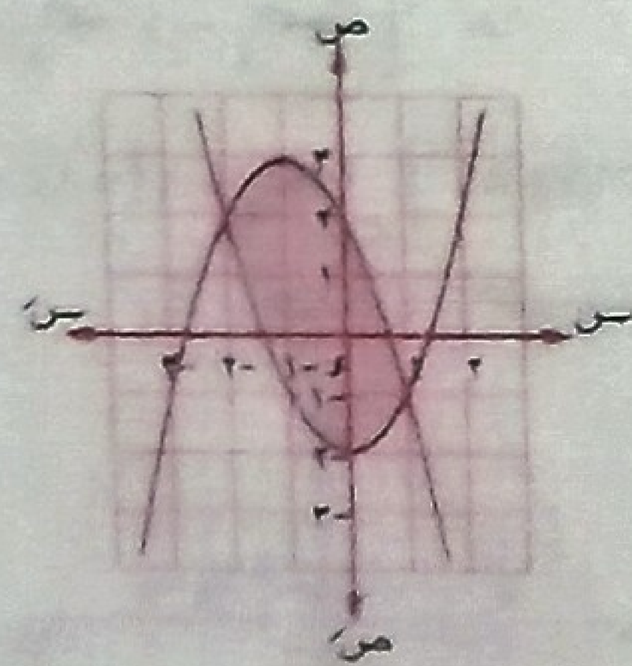


المساحة = $\int_{0}^{4} (2\sqrt{\text{س}} - \frac{1}{4}\text{س}^2)\, \text{ءس}$

= $\left[\frac{4}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}\text{س}^3\right]_{0}^{4}$

= $\frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$ وحدة مربعة.

⑪ بحل المعادلتين : ∴ س = -٢ أ، ١



∴ المساحة =

$\int_{-2}^{1} (3 - (\text{س} + 1)^2) - (\text{س}^2 - 2))\, \text{ءس}$

= $\int_{-2}^{1} (3 - (\text{س} + 1)^2 - \text{س}^2 + 2)\, \text{ءس}$

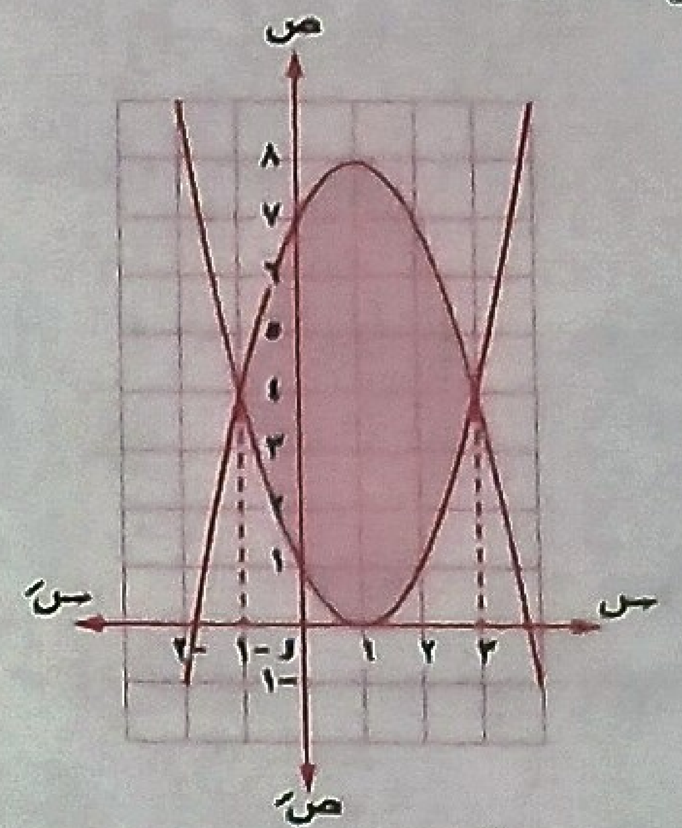
= $\int_{-2}^{1} (5 - (\text{س} + 1)^2 - \text{س}^2)\, \text{ءس}$

= $\left[5\text{س} - \frac{1}{3}(\text{س} + 1)^3 - \frac{1}{3}\text{س}^3\right]_{-2}^{1}$

= ٩ وحدة مربعة.

(١٢) بحل المعادلتين :

∴ $س = 3$ أ، -1



$المساحة = \int_{-1}^{3} \left((7 + 2س - س^2) - (س - 1)^2\right) ءس$

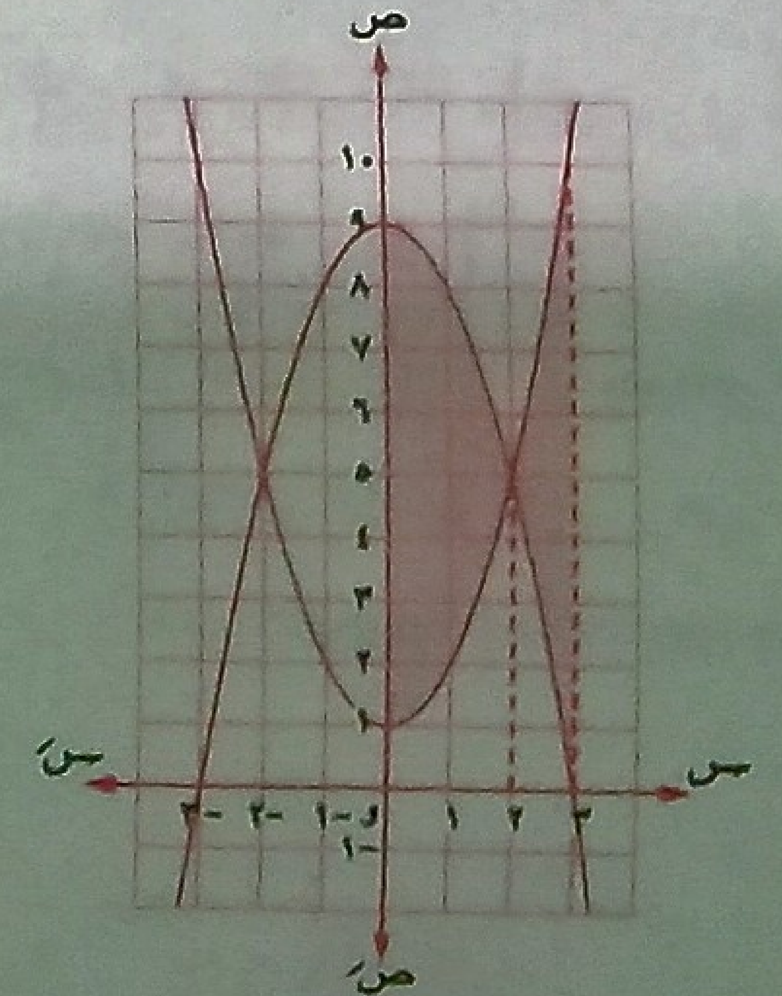
$= \int_{-1}^{3} \left((7 + 2س - س^2) - (س^2 - 2س + 1)\right) ءس$

$= \int_{-1}^{3} (-2س^2 + 4س + 6) ءس$

$= \left[\frac{-2}{3} س^3 + 2س^2 + 6س\right]_{-1}^{3}$

$= \frac{64}{3} = 21\frac{1}{3}$ وحدة مربعة.

(١٣)



$المساحة = \int_{0}^{2} (9 - س^2) - (س^2 + 1) ءس$

$+ \int_{2}^{3} (س^2 + 1) - (9 - س^2) ءس$

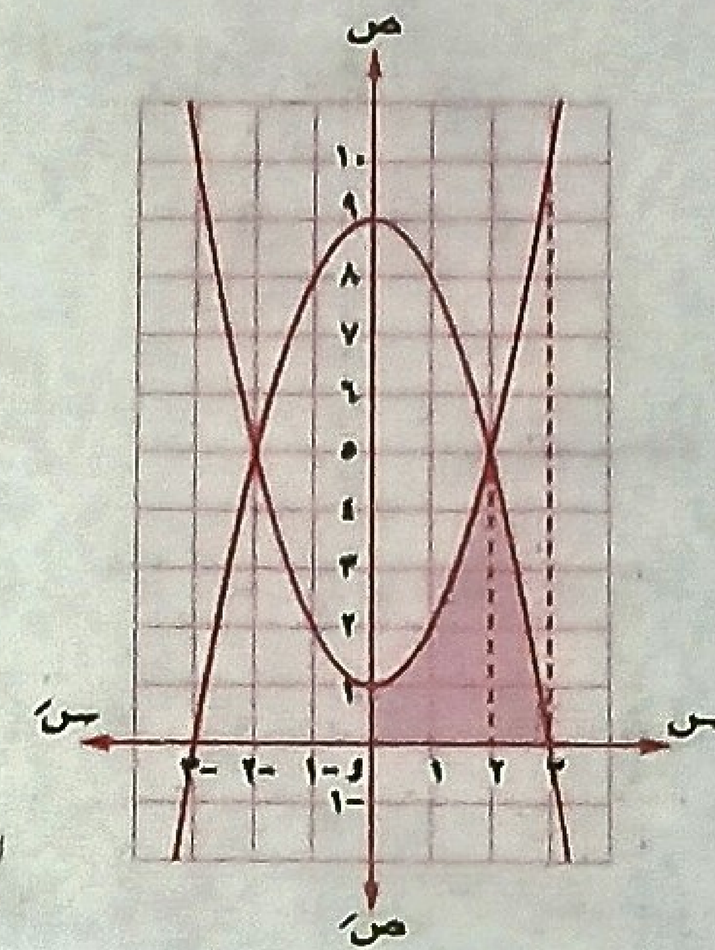
$= \int_{0}^{2} (-2س^2 + 8) ءس$

$+ \int_{2}^{3} (2س^2 - 8) ءس$

$= \left[-\frac{2}{3} س^3 + 8س\right]_{0}^{2} + \left[\frac{2}{3} س^3 - 8س\right]_{2}^{3}$

$= \frac{32}{3} + \frac{14}{3} = \frac{46}{3} = 15\frac{1}{3}$ وحدة مربعة.

(١٤)



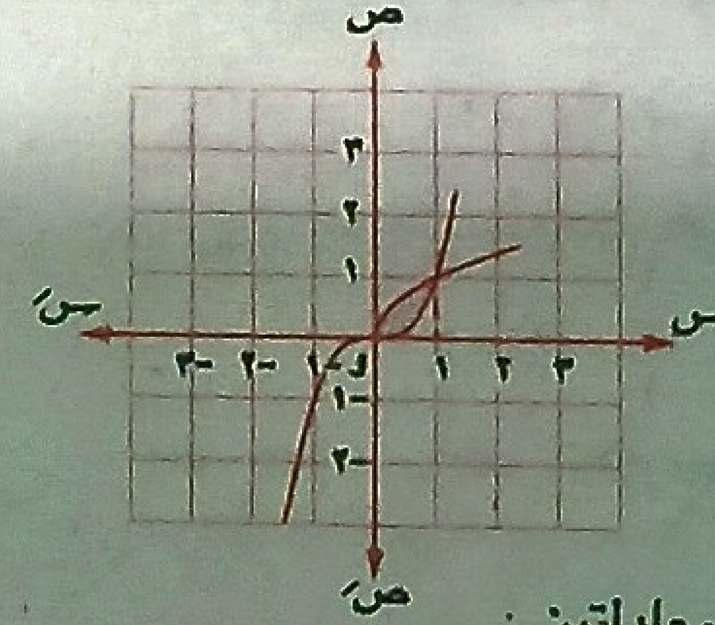
المساحة المطلوبة

$= \int_{0}^{2} (س^2 + 1) ءس + \int_{2}^{3} (9 - س^2) ءس$

$= \left[\frac{1}{3} س^3 + س\right]_{0}^{2} + \left[9س - \frac{1}{3} س^3\right]_{2}^{3}$

$= \frac{14}{3} + \frac{8}{3} = \frac{22}{3}$ وحدة مربعة.

(١٥)



بحل المعادلتين :

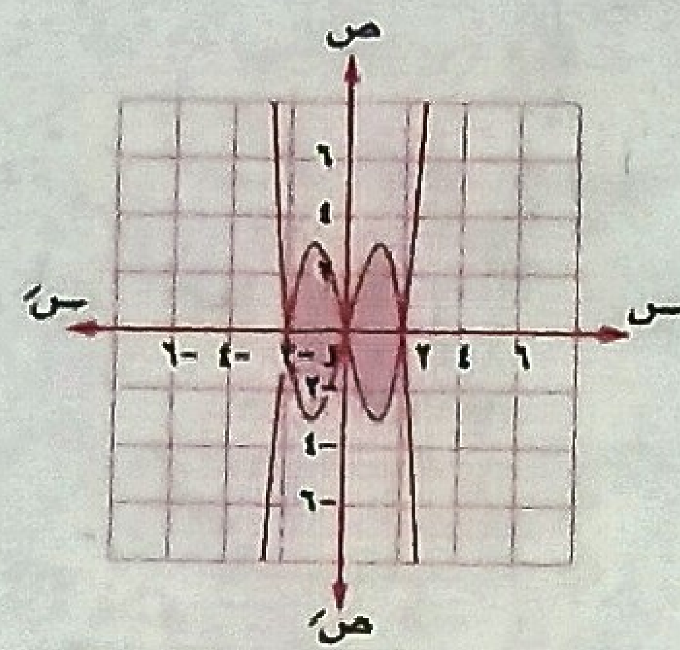
∴ $س = 0 ، 1$

∴ $المساحة = \int_{0}^{1} (\sqrt{س} - س^3) ءس$

$= \left[\frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} س^4\right]_{0}^{1}$

$= \frac{5}{12}$ وحدة مربعة.

(١٦)



لحل المعادلتين معًا نضع

$س^3 - 4س = 4س - س^3$

∴ $2(س^3 - 4س) = 0$

∴ $2س(س^2 - 4) = 0$

∴ $2س(س + 2)(س - 2) = 0$

∴ $س = 0$ أ، $س = 2$ أ، $س = -2$

$المساحة = \int_{-2}^{0} [(س^3 - 4س)$

$- (4س - س^3)] ءس$

$+ \int_{0}^{2} [(4س - س^3)$

$- (س^3 - 4س)] ءس$

$= \int_{-2}^{0} (2س^3 - 8س) ءس$

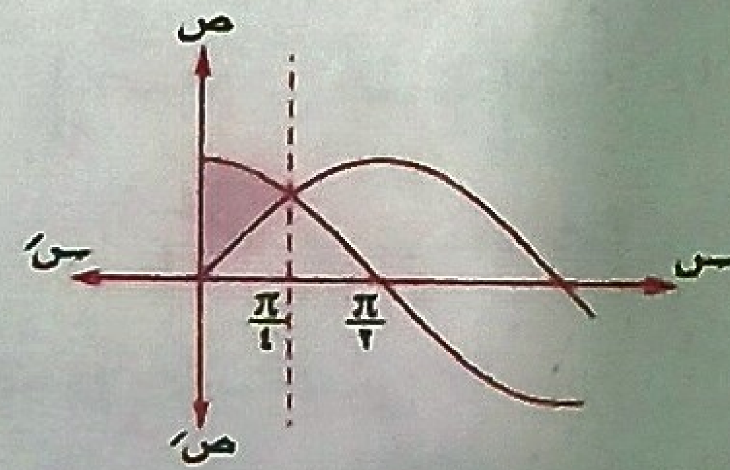
$+ \int_{0}^{2} (-2س^3 + 8س) ءس$

$= \left[\frac{1}{2} س^4 - 4س^2\right]_{-2}^{0}$

$+ \left[\frac{-1}{2} س^4 + 4س^2\right]_{0}^{2}$

$= 8 + 8 = 16$ وحدة مربعة.

(١٧)



لحل المعادلتين معًا نضع

جاس = جتاس ∴ ظاس = ١

∴ $س = \frac{\pi}{4} + ن\pi$ ∴ $س = 45°$ أ، ...

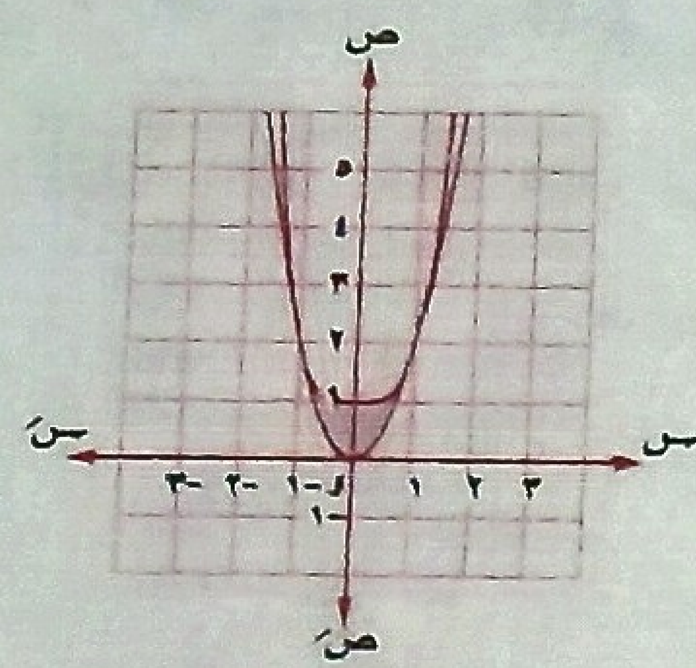
$المساحة = \int_{صفر}^{\frac{\pi}{4}} (جتاس - جاس) ءس$

$= [(جاس + جتاس)]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (0 + 1)$

$= \sqrt{2} - 1$ وحدة مربعة.

(١٨)



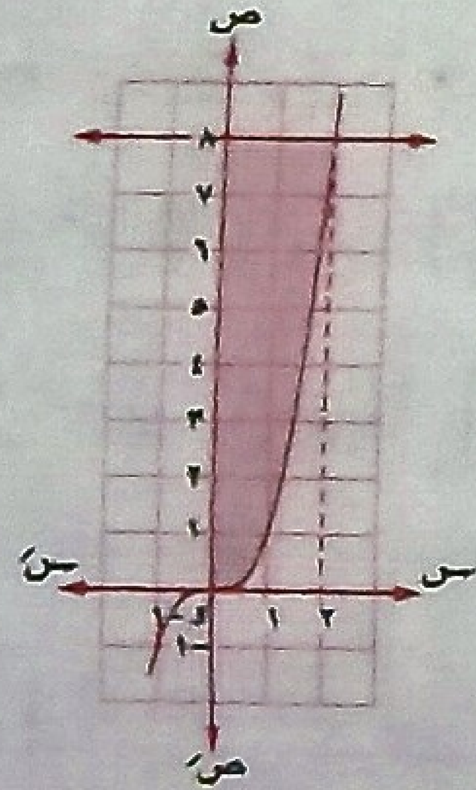
بحل المعادلتين : ∴ $س = \pm 1$

∴ $المساحة = \int_{-1}^{1} (س^4 + 1) - (2س^2) ءس$

$= \int_{-1}^{1} (س^4 - 2س^2 + 1) ءس$

$= \left[\frac{1}{5} س^5 - \frac{2}{3} س^3 + س\right]_{-1}^{1} = \frac{16}{15}$

(١٩)



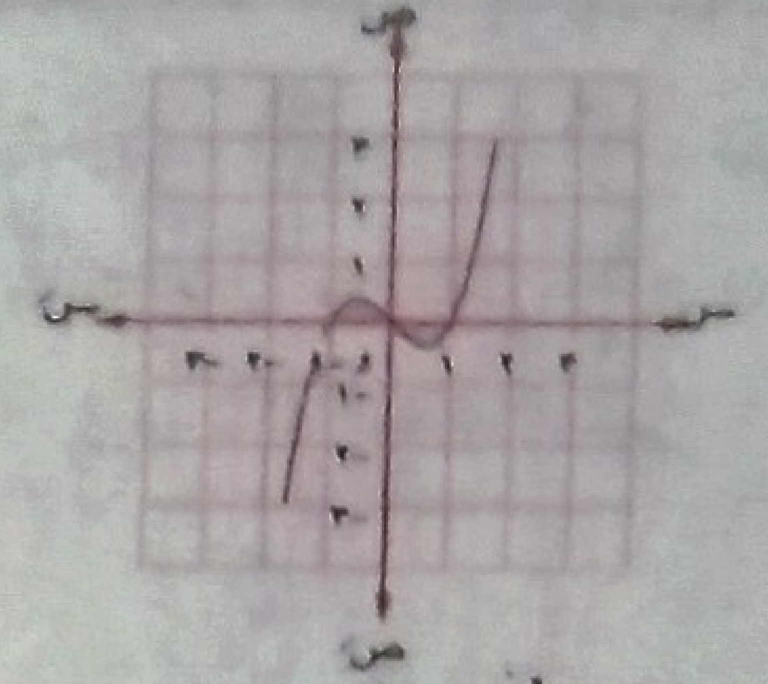
* نقط تقاطع المنحنى مع المستقيم نحل المعادلتين

$س^3 = 8$ ∴ $س = 2$

∴ $المساحة = \int_{0}^{2} (8 - س^3) ءس$

$= \left[8س - \frac{1}{4} س^4\right]_{0}^{2} = 12$

(٢٠)



المساحة = $\left| \int_{-١}^{٠} (س^{٣} - س)\, ء س \right|$

$+ \left| \int_{٠}^{١} (س^{٣} - س)\, ء س \right|$

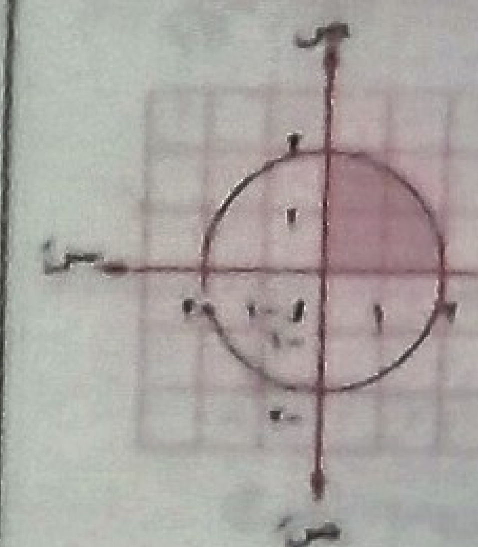
$= \left| \left[\frac{١}{٤} س^{٤} - \frac{١}{٢} س^{٢} \right]_{-١}^{٠} \right|$

$+ \left| \left[\frac{١}{٤} س^{٤} - \frac{١}{٢} س^{٢} \right]_{٠}^{١} \right|$

$= \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢}$

٥

(١) $\int_{٠}^{٢} \sqrt{٤ - س^{٢}}\, ء س$



$\therefore$ ص = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$

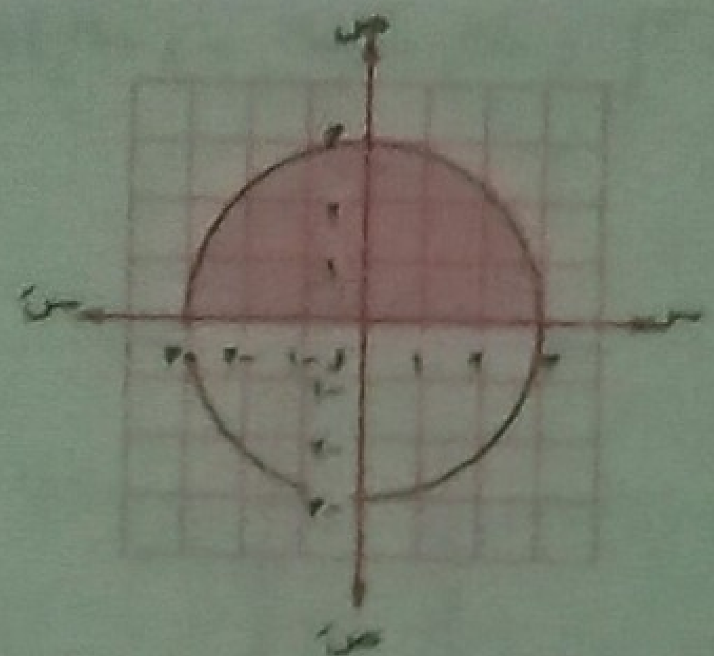
$\therefore$ ص^{٢} = ٤ − س^{٢}

$\therefore$ س^{٢} + ص^{٢} = ٤

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٢

$\therefore$ المساحة = $\frac{١}{٤}$ (π (٢)^{٢}) = π وحدة مربعة.

(٢)



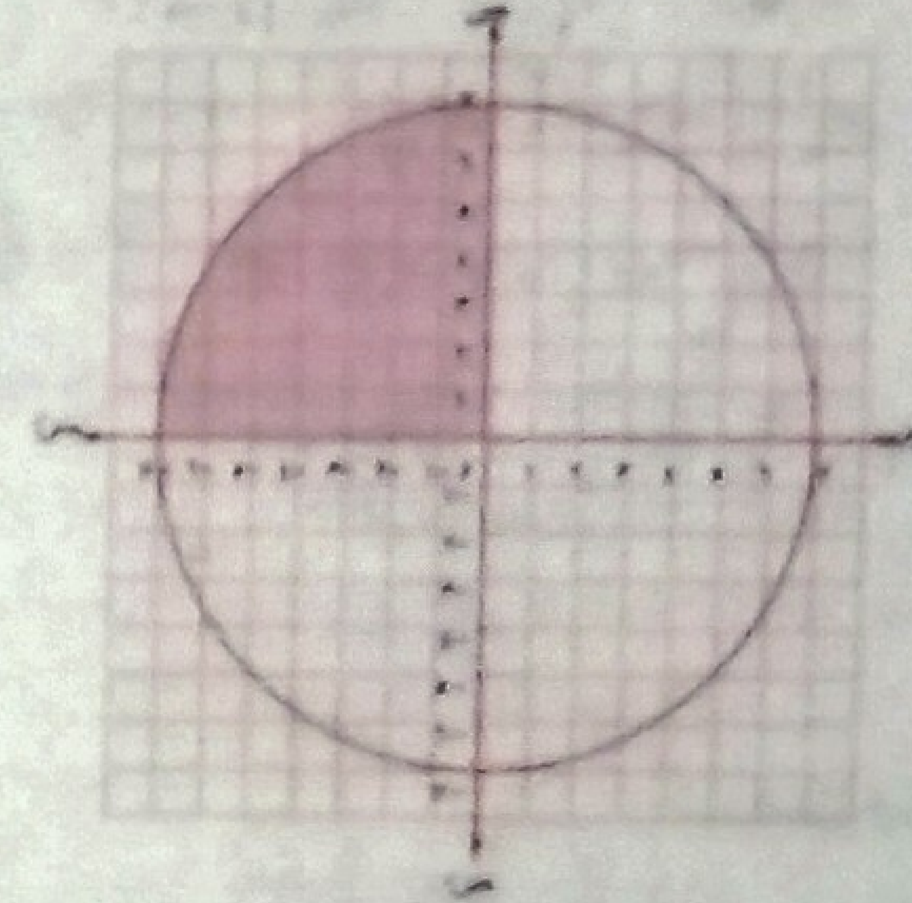
$\int_{-٣}^{٣} \sqrt{٩ - س^{٢}}\, ء س$ $\therefore$ ص = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$

منها س^{٢} + ص^{٢} = ٩

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٣ وحدات

$\therefore$ المساحة = $\frac{١}{٢}$ (π (٣)^{٢}) = $\frac{٩}{٢}$ π وحدة مربعة.

(٣)



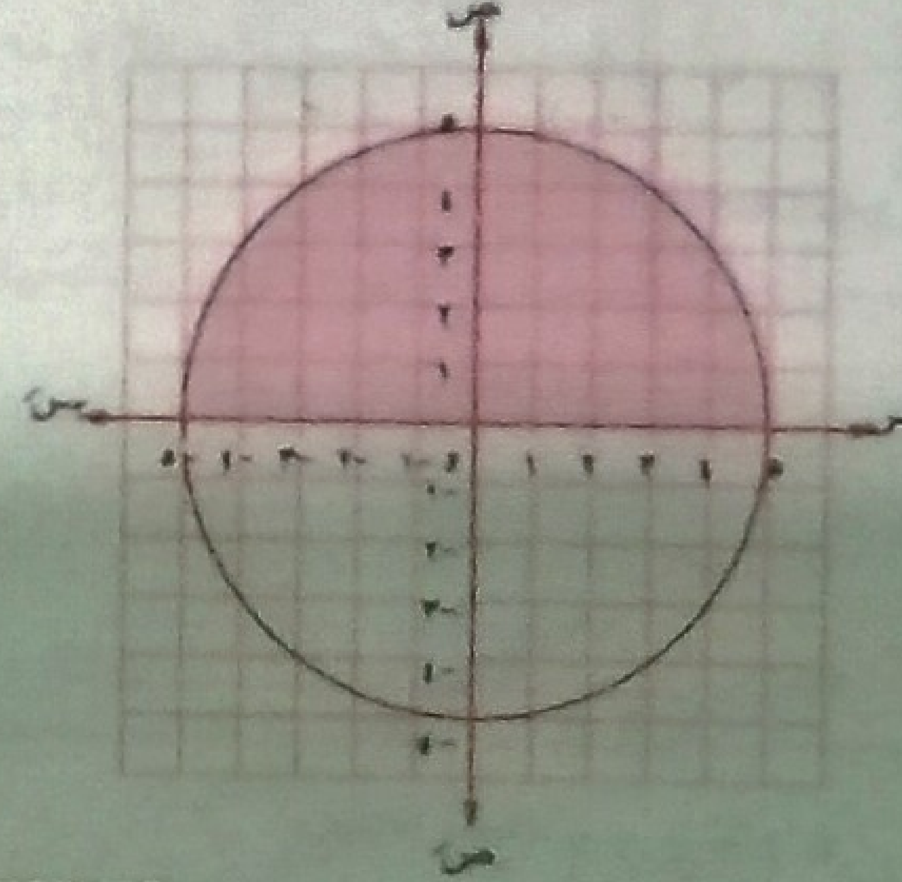
$\int_{-٧}^{٠} \sqrt{٤٩ - س^{٢}}\, ء س$ $\therefore$ ص = $\sqrt{٤٩ - س^{٢}}$

منها س^{٢} + ص^{٢} = ٤٩

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٧ وحدات

$\therefore$ المساحة = $\frac{١}{٤}$ (π (٧)^{٢}) = $\frac{٤٩}{٤}$ π وحدة مربعة.

(٤)



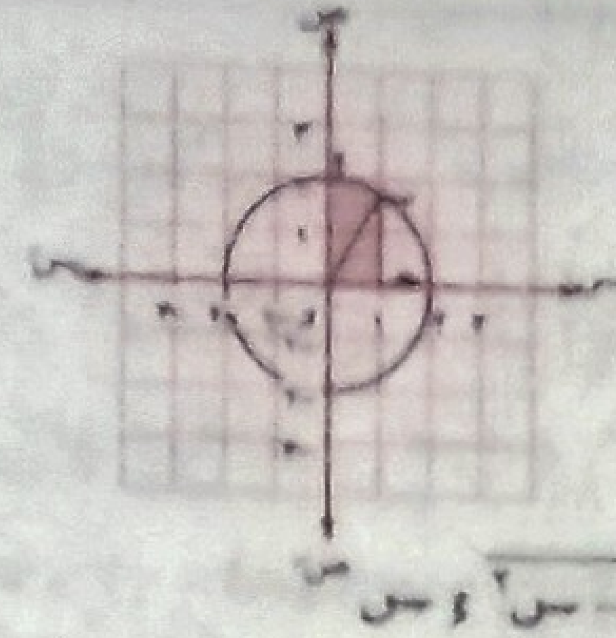
$\int_{-٥}^{٥} \sqrt{٢٥ - س^{٢}}\, ء س$ $\therefore$ ص = $\sqrt{٢٥ - س^{٢}}$

منها س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٥ وحدات

$\therefore$ المساحة = $\frac{١}{٢}$ (π (٥)^{٢}) = $\frac{٢٥}{٢}$ π وحدة مربعة.

(٥)



$\int_{٠}^{١} \sqrt{٤ - س^{٢}}\, ء س$

ص = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ منها س^{٢} + ص^{٢} = ٤

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٢

$\therefore$ المساحة المطلوبة عبارة عن

Δ ب و حـ + القطاع و ا ب

$\because$ حـ و = $\frac{١}{٢}$ و ب $\therefore$ ق(∠ د حـ ب و) = ٣٠°

ومنها ق(∠ د ا و ب) = ٣٠°

$\therefore$ المساحة المطلوبة

= $\frac{١}{٢}$ القاعدة × الارتفاع + $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} × هـ^{ء}

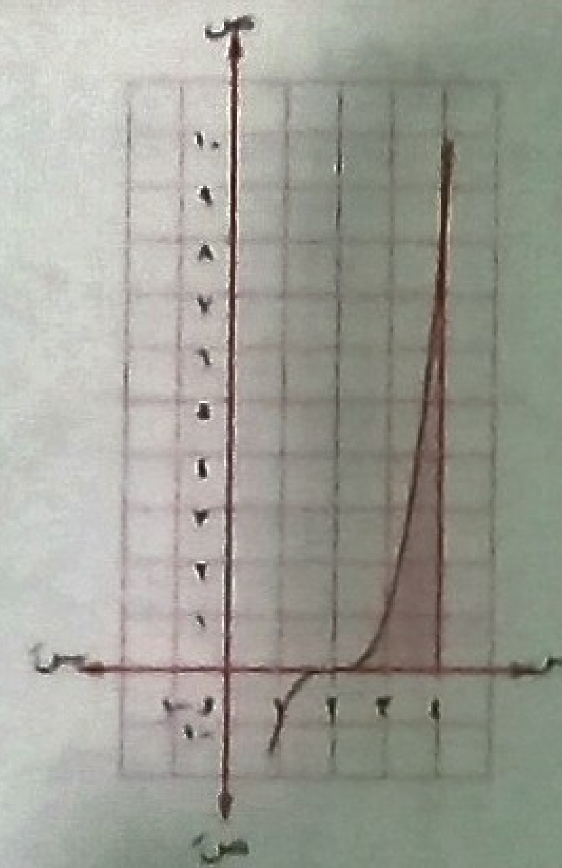
= $\frac{١}{٢}$ × ١ × $\sqrt{٣}$ + $\frac{١}{٢}$ (٢)^{٢} × $\frac{\pi}{٦}$

= $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{\pi}{٣}\right)$ وحدة مساحة.

٦

(١) (جـ)	(٢) (د)	(٣) (جـ)	(٤) (ب)
(٥) (جـ)	(٦) (أ)	(٧) (جـ)	(٨) (جـ)
(٩) (ب)	(١٠) (جـ)	(١١) (جـ)	(١٢) (ب)
(١٣) (د)	(١٤) (د)	(١٥) (ب)	(١٦) (ب)
(١٧) (جـ)			

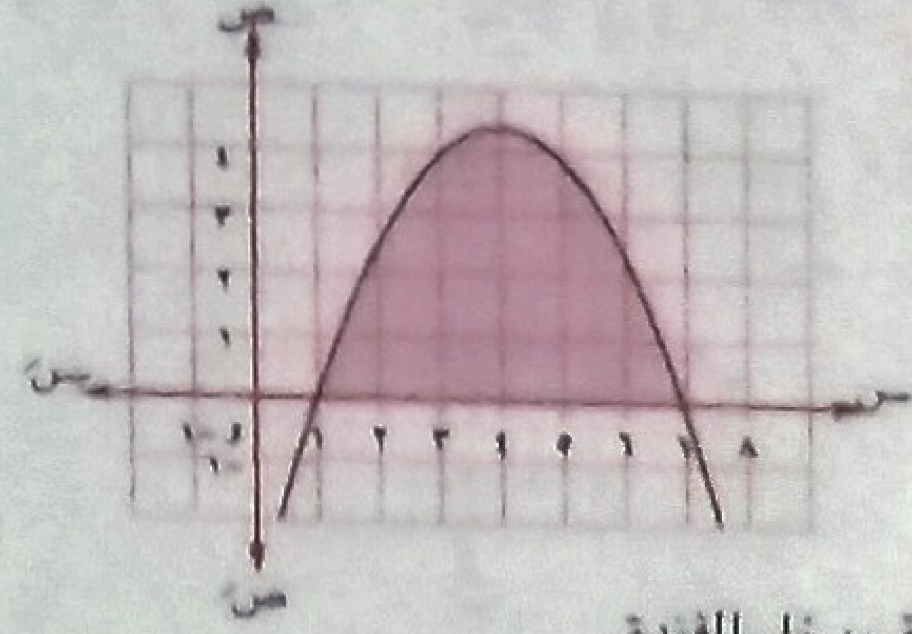
٧



المساحة = $\int_{٢}^{٤} (س - ٢)^{٣}\, ء س$

$= \left[\frac{١}{٤} (س - ٢)^{٤} \right]_{٢}^{٤}$ = ٤ وحدات مربعة.

٨



مساحة مدخل الفندق

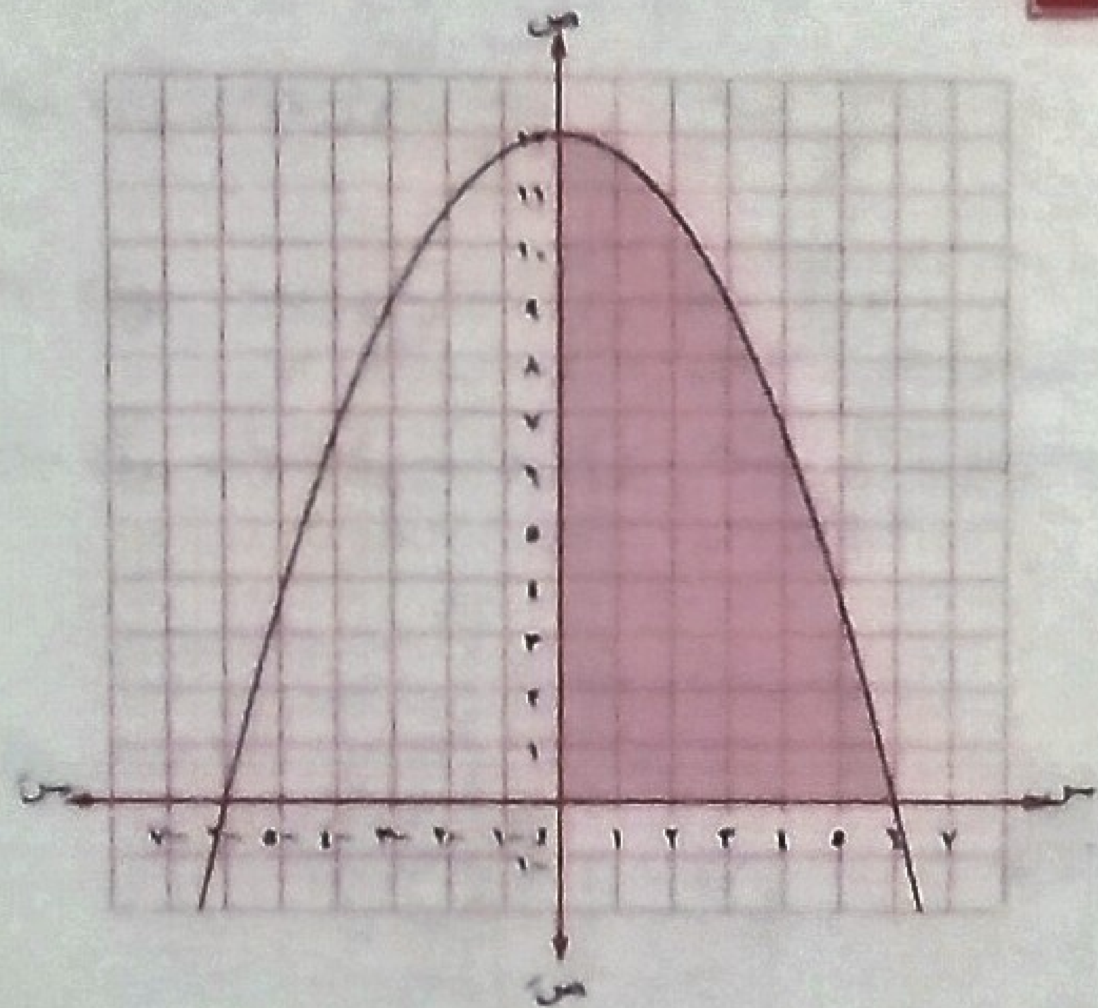
$= \int_{١}^{٧} -\frac{١}{٢} (س - ١)(س - ٧)\, ء س$

$= -\frac{١}{٢} \int_{١}^{٧} (س^{٢} - ٨ س + ٧)\, ء س$

$= -\frac{١}{٢} \left[\frac{١}{٣} س^{٣} - ٤ س^{٢} + ٧ س \right]_{١}^{٧}$ = ١٨ متر مربع.

$\therefore$ تكلفة المدخل = ١٨ × ١٥٠٠ = ٢٧٠٠٠ جنيهًا.

٩



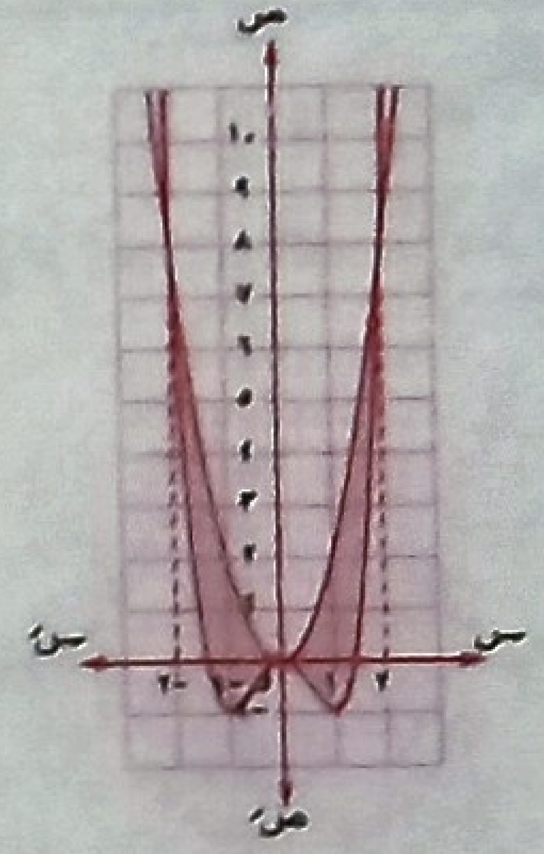
مساحة الممر الواحد = $\int_{٠}^{٦} (١٢ - \frac{١}{٣} س^{٢})\, ء س$

$= \left[١٢ س - \frac{١}{٩} س^{٣} \right]_{٠}^{٦}$ = ٤٨ متر مربع

$\therefore$ تكلفة الخمس ممرات = ٥ × ٤٠٠ × ٤٨

= ٩٦٠٠٠ جنيهًا.

١٠



المساحة = $\int_{-٢}^{٢} ٢ س^{٢} - (س^{٤} - ٢ س^{٢}) \, ءس$

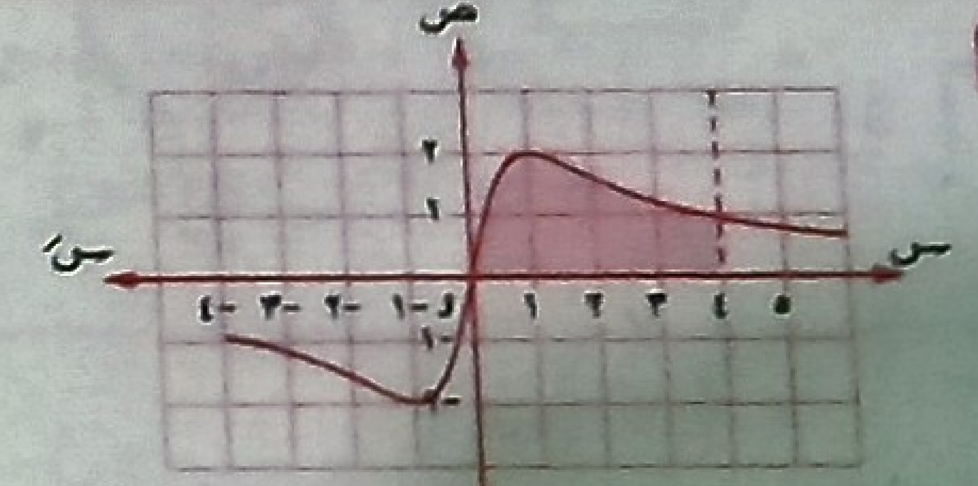
= $\int_{-٢}^{٢} (-س^{٤} + ٤ س^{٢}) \, ءس$

= $\left[-\frac{١}{٥} س^{٥} + \frac{٤}{٣} س^{٣}\right]_{-٢}^{٢} = \frac{١٢٨}{١٥}$ ديسم^{٢}

∴ المساحة اللازمة من الورق اللاصق لإنتاج

١٠٠٠ ملصق = ١٠٠٠ × $\frac{١٢٨}{١٥} = \frac{٢٥٦٠٠}{٣}$ ديسم^{٢}

١١

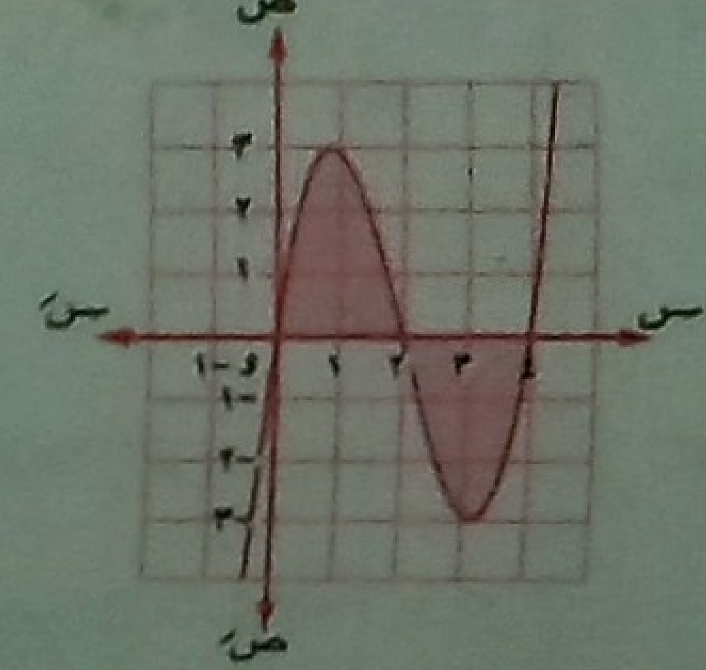


المساحة = $\int_{٠}^{٤} \frac{٤ س}{س^{٢} + ١} \, ءس = ٢ \int_{٠}^{٤} \frac{٢ س}{س^{٢} + ١} \, ءس$

= $٢ \left[لو_{هـ} (س^{٢} + ١)\right]_{٠}^{٤}$

= ٢ $لو_{هـ}$ ١٧ وحدة مربعة.

١٢



المساحة = $\int_{٠}^{٢} (س^{٣} - ٦ س^{٢} + ٨ س) \, ءس$

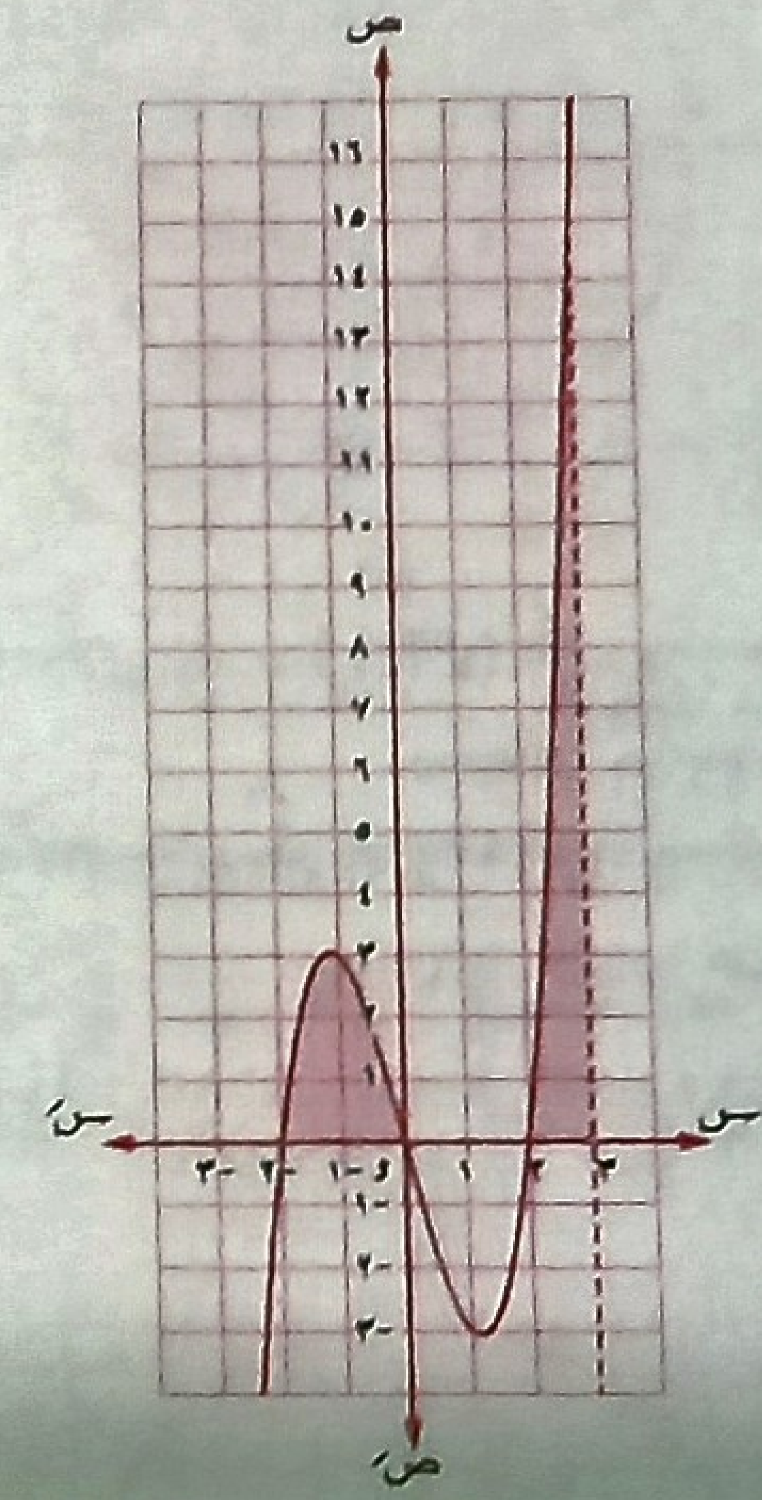
+ $\left| \int_{٢}^{٤} (س^{٣} - ٦ س^{٢} + ٨ س) \, ءس \right|$

= $\left[\frac{١}{٤} س^{٤} - ٢ س^{٣} + ٤ س^{٢}\right]_{٠}^{٢}$

+ $\left| \left[\frac{١}{٤} س^{٤} - ٢ س^{٣} + ٤ س^{٢}\right]_{٢}^{٤} \right|$

= ٤ + ٤ = ٨ وحدة مربعة.

١٣



المساحة = $\int_{-٢}^{٠} (س^{٣} - ٤ س) \, ءس$

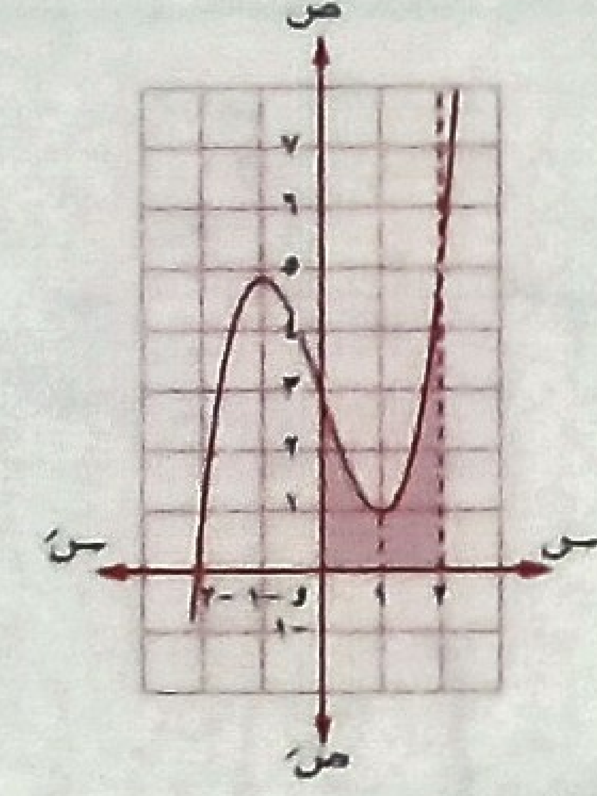
+ $\int_{٢}^{٣} (س^{٣} - ٤ س) \, ءس$

= $\left[\frac{١}{٤} س^{٤} - ٢ س^{٢}\right]_{-٢}^{٠}$

+ $\left[\frac{١}{٤} س^{٤} - ٢ س^{٢}\right]_{٢}^{٣}$

= ٤ + $\frac{٢٥}{٤} = \frac{٤١}{٤} = ١٠ \frac{١}{٤}$ وحدة مربعة.

١٤



د(س) = $س^{٣} - ٣ س + ٣$

∴ دَ(س) = $٣ س^{٢} - ٣$

، بوضع دَ(س) = ٠   ∴ س = ١ ، −١

، د(٠) = ٣ ، د(١) = ١ ، د(٢) = ٥

∴ القيمة الصغرى المطلقة = ١

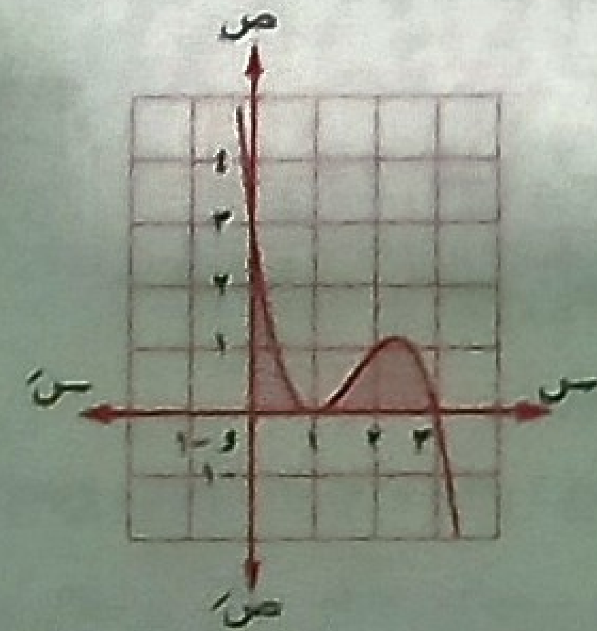
، القيمة العظمى المطلقة = ٥

المساحة المطلوبة = $\int_{٠}^{٢} س^{٣} - ٣ س + ٣ \, ءس$

= $\left[\frac{١}{٤} س^{٤} - \frac{٣}{٢} س^{٢} + ٣ س\right]_{٠}^{٢}$

= ٤ وحدة مربعة.

١٥



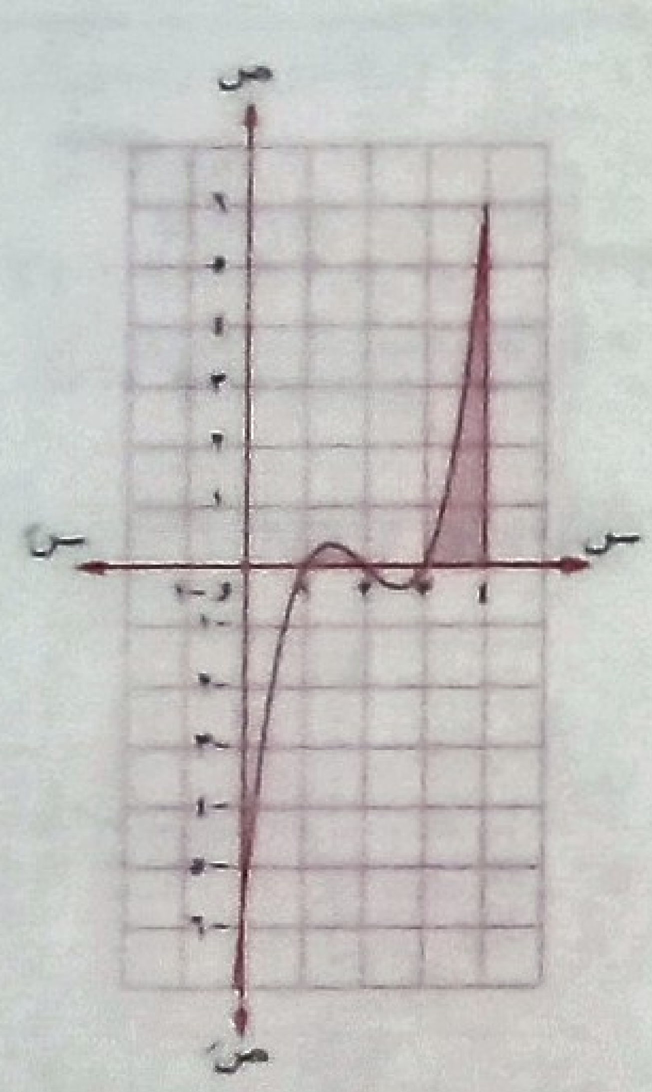
المساحة = $\int_{٠}^{٣} (٣ - س)(س - ١)^{٢} \, ءس$

= $\int_{٠}^{٣} (-س^{٣} + ٥ س^{٢} - ٧ س + ٣) \, ءس$

= $\left[-\frac{١}{٤} س^{٤} + \frac{٥}{٣} س^{٣} - \frac{٧}{٢} س^{٢} + ٣ س\right]_{٠}^{٣}$

= $\frac{٩}{٤}$ وحدة مربعة.

١٦



المساحة = $\int_{١}^{٢} (س - ١)(س - ٢)(س - ٣) \, ءس$

+ $\int_{٣}^{٤} (س - ١)(س - ٢)(س - ٣) \, ءس$

= $\int_{١}^{٢} (س^{٣} - ٦ س^{٢} + ١١ س - ٦) \, ءس$

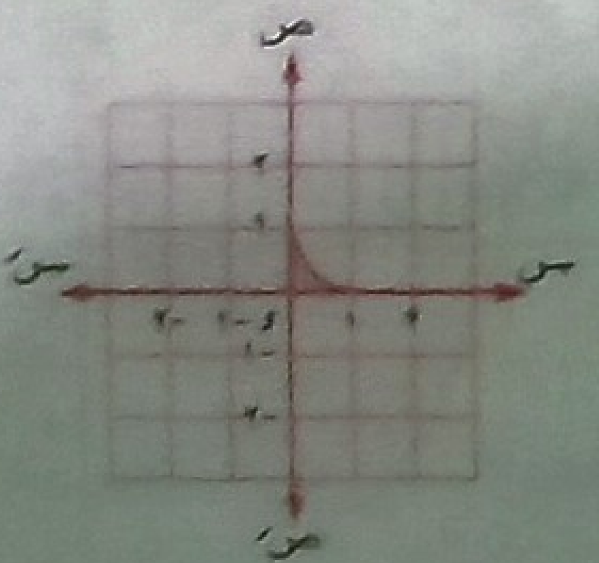
+ $\int_{٣}^{٤} (س^{٣} - ٦ س^{٢} + ١١ س - ٦) \, ءس$

= $\left[\frac{١}{٤} س^{٤} - ٢ س^{٣} + \frac{١١}{٢} س^{٢} - ٦ س\right]_{١}^{٢}$

+ $\left[\frac{١}{٤} س^{٤} - ٢ س^{٣} + \frac{١١}{٢} س^{٢} - ٦ س\right]_{٣}^{٤}$

= $\frac{١}{٤} + \frac{٩}{٤} = \frac{٥}{٢} = ٢ \frac{١}{٢}$ وحدة مربعة.

١٧



$\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ١$ ∴ $\sqrt{ص} = ١ - \sqrt{س}$

∴ ص = $١ - ٢ \sqrt{س} + س$

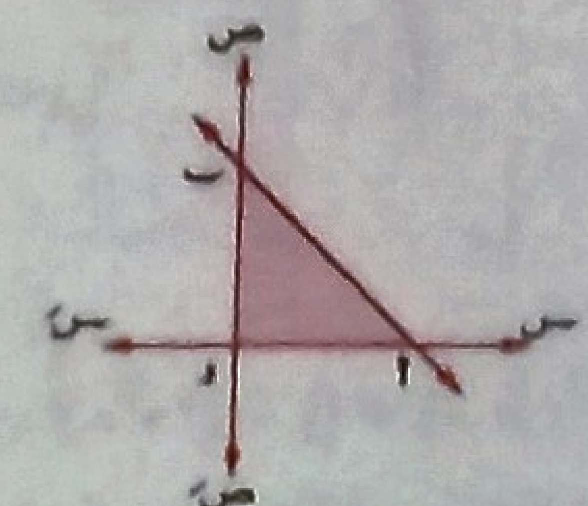
، س = ٠ ، ص = ٠

∴ المساحة = $\int_{0}^{1} (1 - 2\text{س}^{\frac{1}{2}} + \text{س})\,\text{ءس}$

= $\left[\text{س} - \frac{4}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\text{س}^{2}\right]_{0}^{1}$

= $\frac{1}{6}$ وحدة مربعة.

١٨



أى مثلث طول قاعدته أ وارتفاعه ب مساحته تساوى مساحة المثلث القائم الذى طول ضلعى القائمة فيه أ ، ب على الترتيب يمكن حساب مساحته بإيجاد المساحة أسفل المستقيم الذى معادلته $\frac{\text{س}}{\text{أ}} + \frac{\text{ص}}{\text{ب}} = 1$

∴ ص = $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$ س + ب

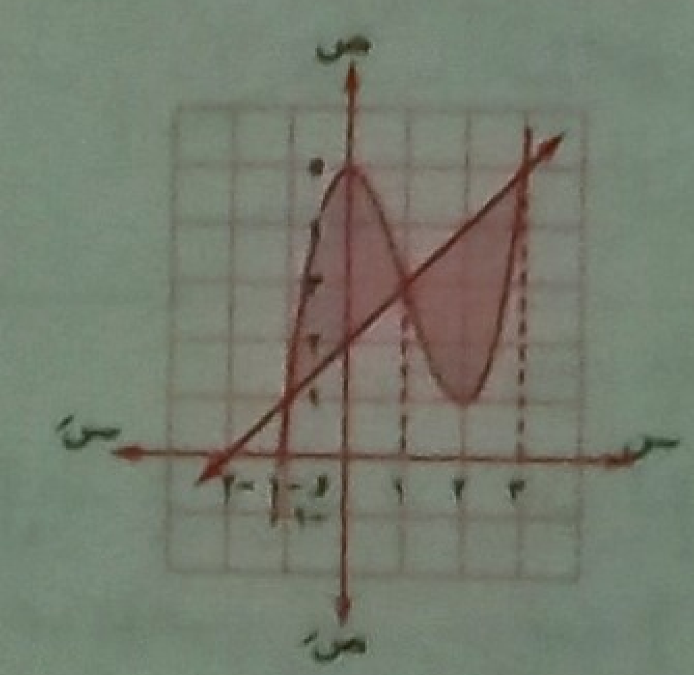
∴ المساحة = $\int_{0}^{\text{أ}} \left(\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}\text{س} + \text{ب}\right)\text{ءس}$

= $\left[\frac{-\text{ب}}{2\text{أ}}\text{س}^{2} + \text{ب س}\right]_{0}^{\text{أ}}$

= $\frac{-\text{ب}}{2\text{أ}} \times \text{أ}^{2} + \text{ب أ} = -\frac{1}{2}\text{أ ب} + \text{أ ب}$

= $\frac{1}{2}$ أ ب

١٩



المساحة = $\int_{-1}^{1} (\text{س}^{3} - 3\text{س}^{2} + 5) - (\text{س} + 2)\,\text{ءس}$

+ $\int_{1}^{3} (\text{س} + 2) - (\text{س}^{3} - 3\text{س}^{2} + 5)\,\text{ءس}$

= $\int_{-1}^{1} (\text{س}^{3} - 3\text{س}^{2} - \text{س} + 3)\,\text{ءس}$

+ $\int_{1}^{3} (-\text{س}^{3} + 3\text{س}^{2} + \text{س} - 3)\,\text{ءس}$

= $\left[\frac{1}{4}\text{س}^{4} - \text{س}^{3} - \frac{1}{2}\text{س}^{2} + 3\text{س}\right]_{-1}^{1}$

+ $\left[-\frac{1}{4}\text{س}^{4} + \text{س}^{3} + \frac{1}{2}\text{س}^{2} - 3\text{س}\right]_{1}^{3}$

= ٤ + ٤ = ٨ وحدة مربعة.

٢٠

المساحة المطلوبة

= $\int_{-4}^{0} (\text{س} + 6) - (\frac{-1}{2}\text{س})\,\text{ءس}$

+ $\int_{0}^{2} (\text{س} + 6) - \text{س}^{2}\,\text{ءس}$

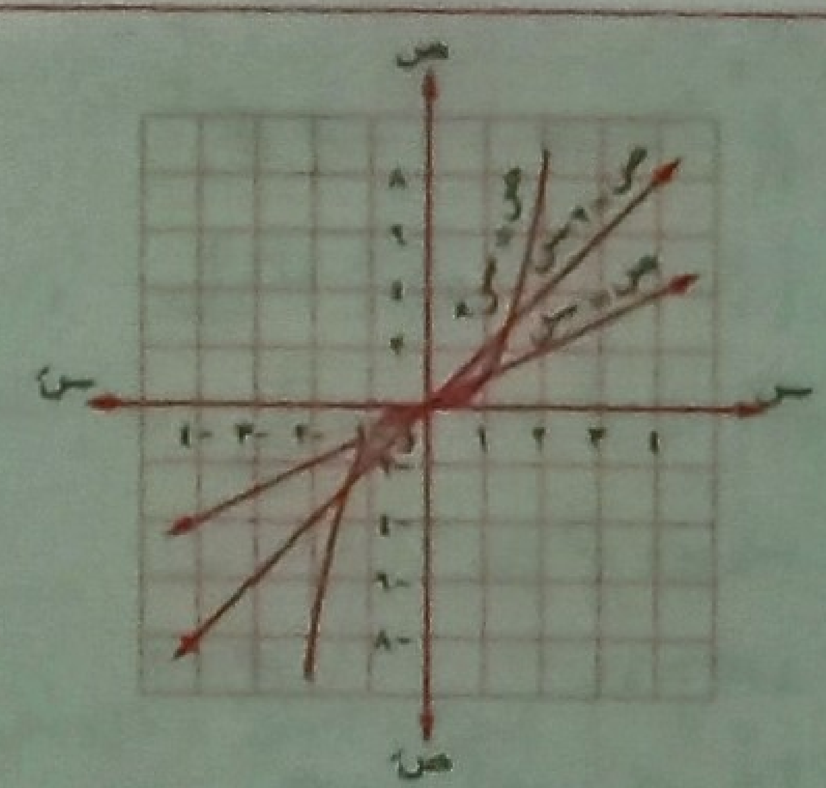
= $\int_{-4}^{0} (\frac{3}{2}\text{س} + 6)\,\text{ءس} + \int_{0}^{2} (-\text{س}^{2} + \text{س} + 6)\,\text{ءس}$

= $\left[\frac{3}{4}\text{س}^{2} + 6\text{س}\right]_{-4}^{0}$

+ $\left[-\frac{1}{3}\text{س}^{3} + \frac{1}{2}\text{س}^{2} + 6\text{س}\right]_{0}^{2}$ = ١٢ + ١٠

= ٢٢ وحدة مربعة.

٢١



المساحة = ٢ $\left[\int_{0}^{1} (2\text{س} - \text{س})\,\text{ءس}\right.$

+ $\left.\int_{1}^{\sqrt{2}} (2\text{س} - \text{س}^{3})\,\text{ءس}\right]$

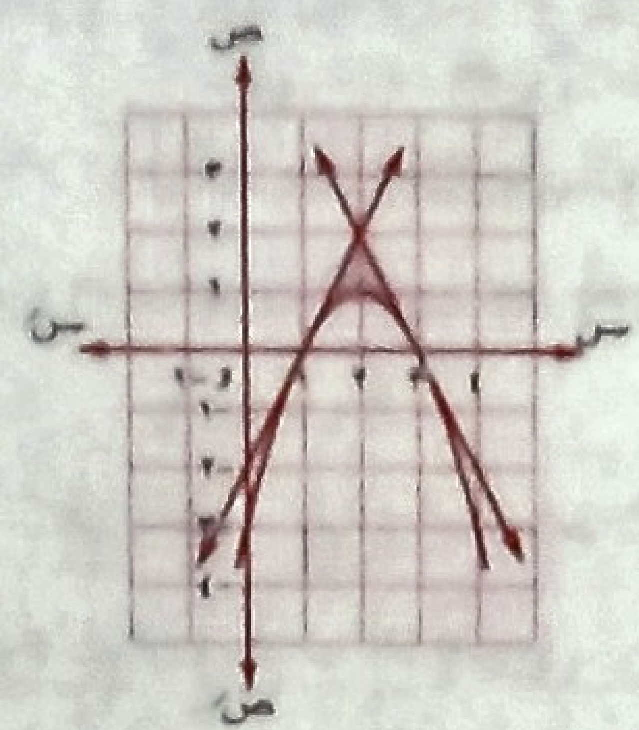
= ٢ $\left[\int_{0}^{1} \text{س}\,\text{ءس}\right.$

+ $\left.\int_{1}^{\sqrt{2}} (2\text{س} - \text{س}^{3})\,\text{ءس}\right]$

= ٢ $\left(\left[\frac{1}{2}\text{س}^{2}\right]_{0}^{1} + \left[\text{س}^{2} - \frac{1}{4}\text{س}^{4}\right]_{1}^{\sqrt{2}}\right)$

= ٢ $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}$ وحدة مربعة.

٢٢



ص = $-\text{س}^{2} + 4\text{س} - 3$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -2\text{س} + 4$

∴ ميل المماس عند س = ١ هو ٢

∴ معادلته $\frac{\text{ص} - 0}{\text{س} - 1} = 2$ منها ص = ٢ س − ٢

، ميل المماس عند س = ٣ هو −٢

∴ معادلته $\frac{\text{ص} - 0}{\text{س} - 3} = -2$ منها ص = −٢ س + ٦

∴ المساحة = $\int_{1}^{2} (2\text{س} - 2)$

$- (-\text{س}^{2} + 4\text{س} - 3)\,\text{ءس}$

+ $\int_{2}^{3} (-2\text{س} + 6)$

$- (-\text{س}^{2} + 4\text{س} - 3)\,\text{ءس}$

= $\int_{1}^{2} (\text{س}^{2} - 2\text{س} + 1)\,\text{ءس}$

+ $\int_{2}^{3} (\text{س}^{2} - 6\text{س} + 9)\,\text{ءس}$

= $\int_{1}^{2} (\text{س} - 1)^{2}\,\text{ءس}$

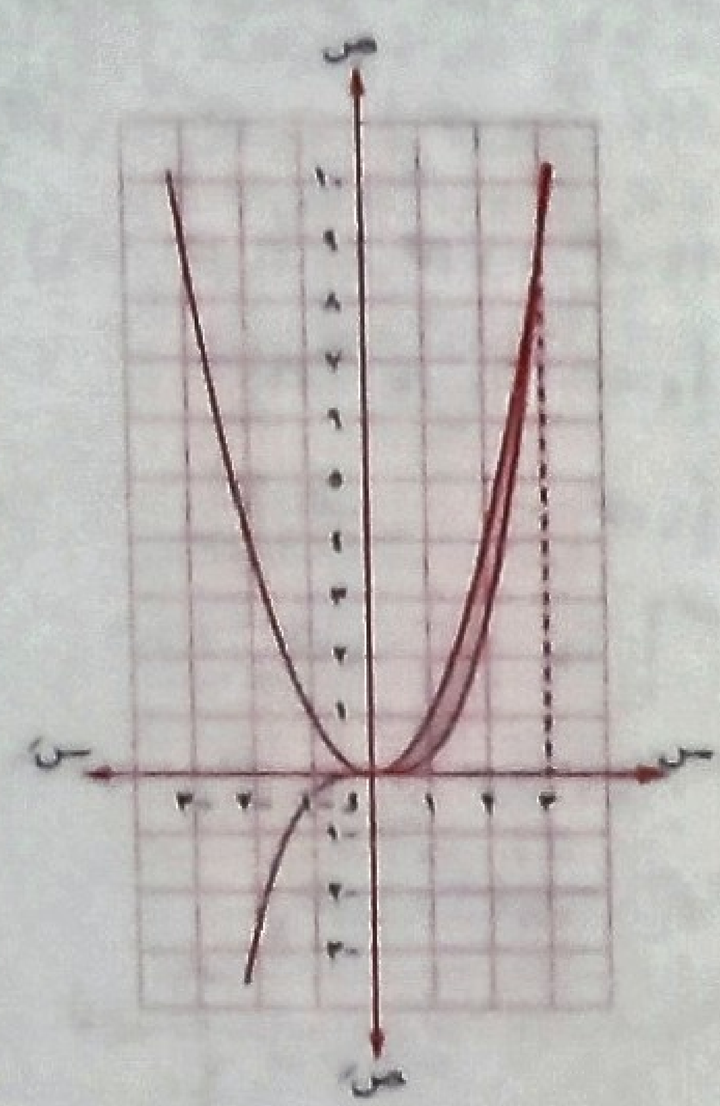
+ $\int_{2}^{3} (\text{س} - 3)^{2}\,\text{ءس}$

= $\left[\frac{1}{3}(\text{س} - 1)^{3}\right]_{1}^{2}$

+ $\left[\frac{1}{3}(\text{س} - 3)^{3}\right]_{2}^{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$

= $\frac{2}{3}$ وحدة مربعة.

٢٣

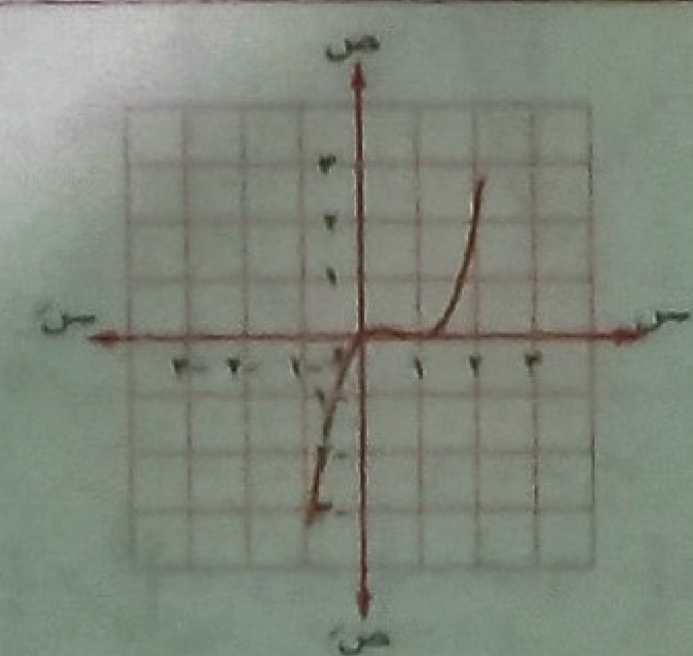


المساحة = $\int_{0}^{3} (\text{س}^{2} - \frac{1}{3}\text{س}^{3})\,\text{ءس}$

= $\left[\frac{1}{3}\text{س}^{3} - \frac{1}{12}\text{س}^{4}\right]_{0}^{3}$

= $\frac{9}{4}$ وحدة مربعة.

٢٤



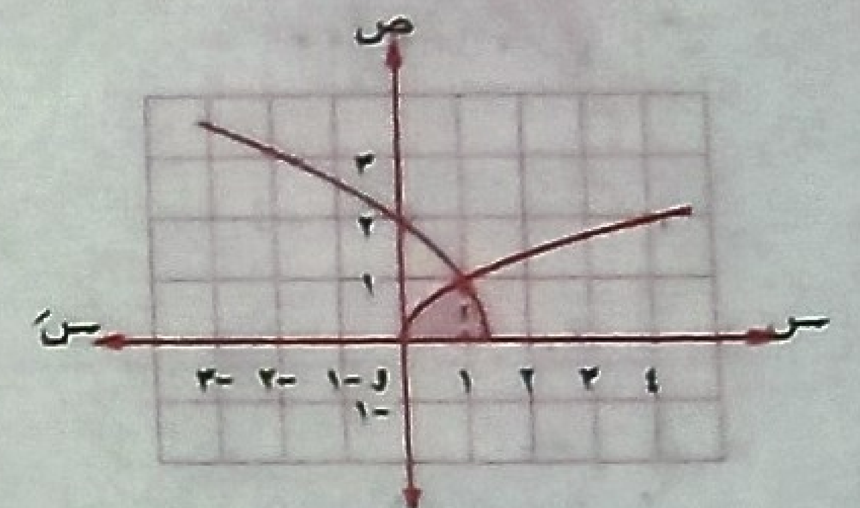
$\text{المساحة} = \int_{0}^{1} \text{س}(\text{س} - 1)^2 \, \text{ء س}$

$= \int_{0}^{1} (\text{س}^3 - 2\text{س}^2 + \text{س}) \, \text{ء س}$

$= \left[\frac{1}{4}\text{س}^4 - \frac{2}{3}\text{س}^3 + \frac{1}{2}\text{س}^2\right]_{0}^{1}$

$= \frac{1}{12}$ وحدة مربعة.

٢٥



$\text{المساحة} = \int_{0}^{1} \sqrt{\text{س}} \, \text{ء س} + \int_{1}^{\frac{4}{3}} \sqrt{4 - 3\text{س}} \, \text{ء س}$

$= \left[\frac{2}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{1} + \left[\frac{-2}{9}(4 - 3\text{س})^{\frac{3}{2}}\right]_{1}^{\frac{4}{3}}$

$= \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$ وحدة مربعة.

٢٦ ① (د) ② (ب) ③ (جـ) ④ (د)

⑤ (أ) ⑥ (جـ) ⑦ (أ) ⑧ (جـ)

إرشادات لحل رقم **٢٦**

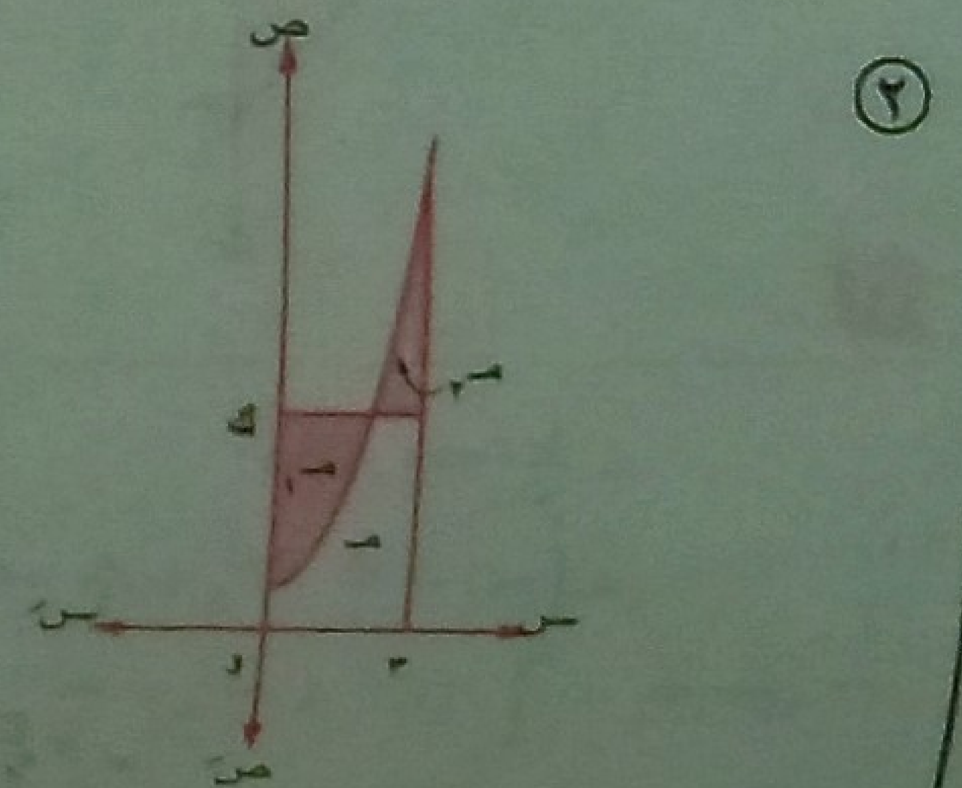
① $\because \int_{0}^{\text{أ}} \text{د}(\text{س}) \, \text{ء س} = \int_{0}^{\text{أ}} \text{ر}(\text{س}) \, \text{ء س}$

$\text{أ} > 4$ من هندسة الشكل $\text{أ} > 4$

$\therefore \frac{1}{2} \times 4 \times 40 + (\text{أ} - 4) \times 40 = 30\text{أ}$

$\therefore \text{أ} = 8$

②



$\because \text{م}_2 = \text{م}_1 \qquad \therefore \text{م}_2 + \text{م} = \text{م}_1 + \text{م}$

$\therefore \int_{0}^{2} (\text{س}^2 + 1) \, \text{ء س} = 3\text{ك}$

$\therefore \left[\frac{1}{3}\text{س}^3 + \text{س}\right]_{0}^{2} = 3\text{ك}$

$\therefore 3\text{ك} = 12 \qquad \therefore \text{ك} = 4$

③ $\because \text{م}_2 = 7\,\text{م}_1$

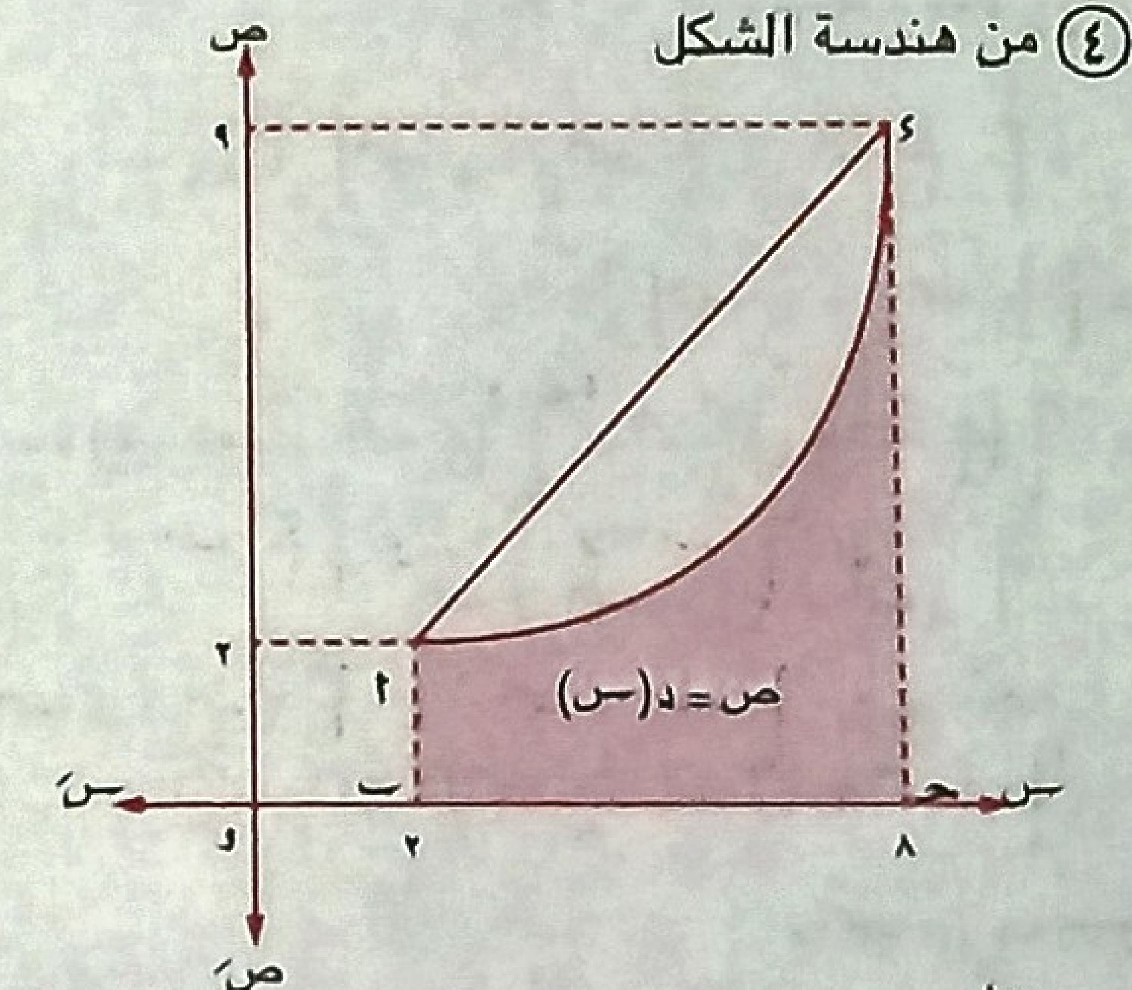
$\therefore \int_{\text{ك}}^{2} 2\text{س}^2 \, \text{ء س} = 7 \int_{0}^{\text{ك}} 2\text{س}^2 \, \text{ء س}$

$\left[\frac{2}{3}\text{س}^3\right]_{\text{ك}}^{2} = 7\left[\frac{2}{3}\text{س}^3\right]_{0}^{\text{ك}}$

$\frac{16}{3} - \frac{2}{3}\text{ك}^3 = 7 \times \frac{2}{3}\text{ك}^3$

$\therefore \text{ك}^3 = 1 \qquad \therefore \text{ك} = 1$

④ من هندسة الشكل



$\int_{2}^{8} \text{د}(\text{س}) \, \text{ء س} <$ مساحة شبة المنحرف أ ب جـ ء

$\therefore \int_{2}^{8} \text{د}(\text{س}) \, \text{ء س} < \left(\frac{2 + 9}{2} \times 6\right)$

$\therefore \int_{2}^{8} \text{د}(\text{س}) \, \text{ء س} < 33$ وحدة مربعة.

$\therefore \int_{2}^{8} \text{د}(\text{س}) \, \text{ء س}$ لا يمكن أن يساوى ٣٤

⑤ $\because \text{س} = 6\text{ن} \qquad \therefore \text{س}^2 = 36\text{ن}^2 \quad (1)$

$\because \text{ص} = 3\text{ن}^2 \quad (2)$

من (١) ، (٢) ينتج أن : $\text{س}^2 = 12\,\text{ص}$

أى أن : $\text{ص} = \frac{1}{12}\text{س}^2$

$\therefore \text{المساحة} = \int_{0}^{12} \text{ص} \, \text{ء س}$

$= \frac{1}{12}\int_{0}^{12} \text{س}^2 \, \text{ء س} = \frac{1}{12}\left[\frac{1}{3}\text{س}^3\right]_{0}^{12}$

$= \frac{1}{36} \times (12)^3 = 48$ وحدة مربعة

حل آخر :

$\because \text{المساحة} = \int_{0}^{12} \text{ص} \, \text{ء س}$

، عند س = ٠ فإن : ن = ٠

، عند س = ١٢ فإن : ن = ٢

$\therefore \text{المساحة} = \int_{0}^{2} \text{ص} \frac{\text{ء س}}{\text{ء ن}} \, \text{ء ن}$

$= \int_{0}^{2} (3\text{ن}^2 \times 6) \, \text{ء ن}$

$= 18 \int_{0}^{2} \text{ن}^2 \, \text{ء ن}$

$= 18 \times \left[\frac{1}{3}\text{ن}^3\right]_{0}^{2} = 48$ وحدة مربعة

⑥ $\because \text{م}_3 = \int_{0}^{4} \frac{1}{4}\text{س}^2 \, \text{ء س} = \frac{16}{3}$ وحدة مربعة

$\therefore \text{م}_2 = \int_{0}^{4} \left(2\sqrt{\text{س}} - \frac{1}{4}\text{س}^2\right) \text{ء س}$

$= \frac{16}{3}$ وحدة مربعة.

، ∵ مساحة المربع = ٤ × ٤ = ١٦ وحدة مربعة.

$\therefore \text{م}_1 = 16 - \left(\frac{16}{3} + \frac{16}{3}\right) = \frac{16}{3}$ وحدة مربعة.

$\therefore \text{م}_1 : \text{م}_2 : \text{م}_3 = \frac{16}{3} : \frac{16}{3} : \frac{16}{3}$

$= 1 : 1 : 1$

⑦ لإيجاد نقط التقاط نضع جا س = جا ٢ س

$\therefore 2\,\text{جا س جتا س} - \text{جا س} = 0$

$\therefore \text{جا س}(2\,\text{جتا س} - 1) = 0$

$\therefore \text{جا س} = 0$ ومنها س = ٠ ، س = π

أ، $2\,\text{جتا س} - 1 = 0$

$\therefore \text{جتا س} = \frac{1}{2}$ ومنها $\text{س} = \frac{\pi}{3}$

$\therefore \text{م}_1 = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (\text{جا}\,2\text{س} - \text{جا س}) \, \text{ء س}$

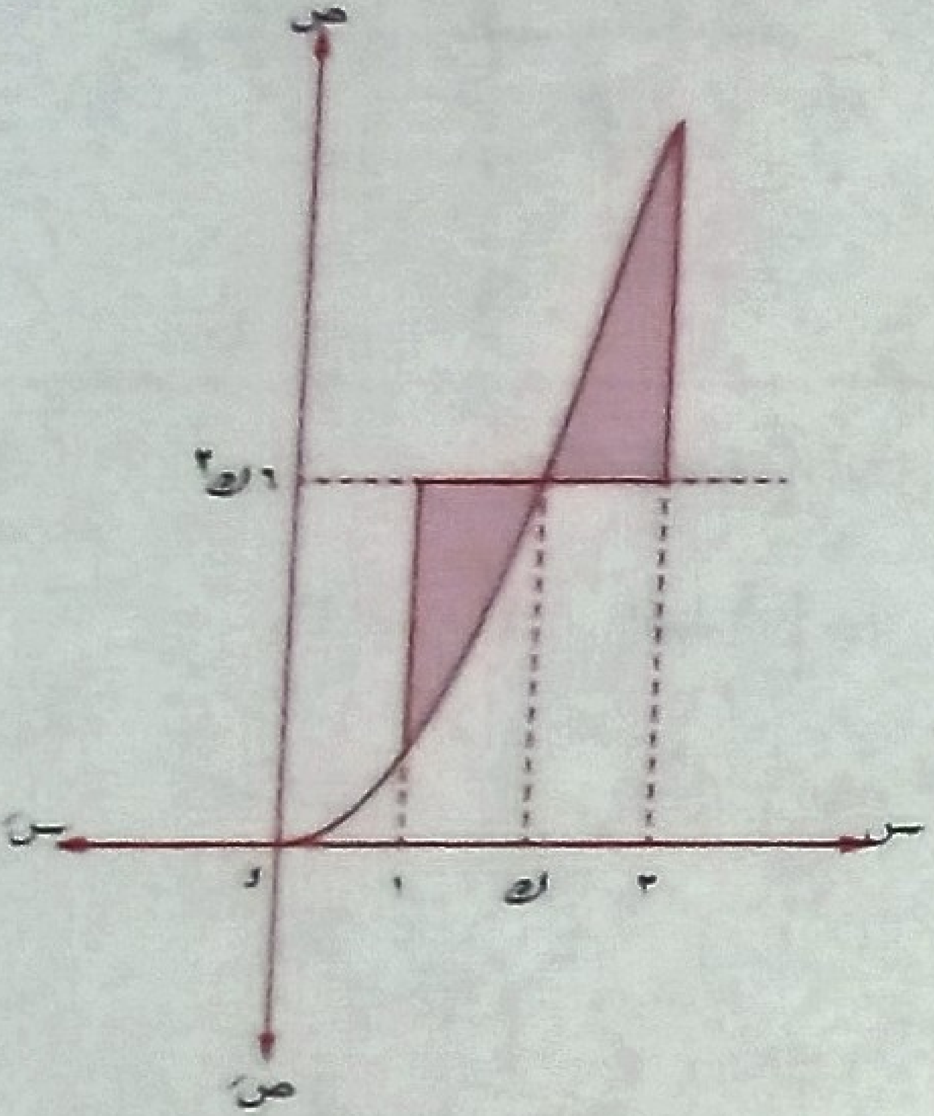
$= \left[-\frac{1}{2}\text{جتا}\,2\text{س} + \text{جتا س}\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4}$

، $\text{م}_2 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\text{جا س} - \text{جا}\,2\text{س}) \, \text{ء س}$

$= \left[-\text{جتا س} + \frac{1}{2}\text{جتا}\,2\text{س}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = \frac{9}{4}$

$\therefore \text{م}_1 : \text{م}_2 = 1 : 9$

⑧



نفرض أن : $\text{د}(\text{ك}) = 6\text{ك}^2$

$\therefore \text{المساحة}(\text{م}) = \int_{1}^{\text{ك}} (6\text{ك}^2 - 6\text{س}^2) \, \text{ء س}$

$+ \int_{\text{ك}}^{3} (6\text{س}^2 - 6\text{ك}^2) \, \text{ء س}$

$= \left[6\text{ك}^2\text{س} - 2\text{س}^3\right]_{1}^{\text{ك}}$

$+ \left[2\text{س}^3 - 6\text{ك}^2\text{س}\right]_{\text{ك}}^{3}$

$= (6\text{ك}^3 - 2\text{ك}^3) - (6\text{ك}^2 - 2)$

$+ (54 - 18\text{ك}^2) - (2\text{ك}^3 - 6\text{ك}^3)$

$= (4\text{ك}^3 - 6\text{ك}^2 + 2) + (54 - 18\text{ك}^2 + 4\text{ك}^3)$

$= 8\text{ك}^3 - 24\text{ك}^2 + 56$

$\therefore \frac{\text{ء م}}{\text{ء ك}} = 24\text{ك}^2 - 48\text{ك}$

وبوضع $\frac{\text{ء م}}{\text{ء ك}} = \text{صفر} \qquad \therefore \text{ك} = 2$

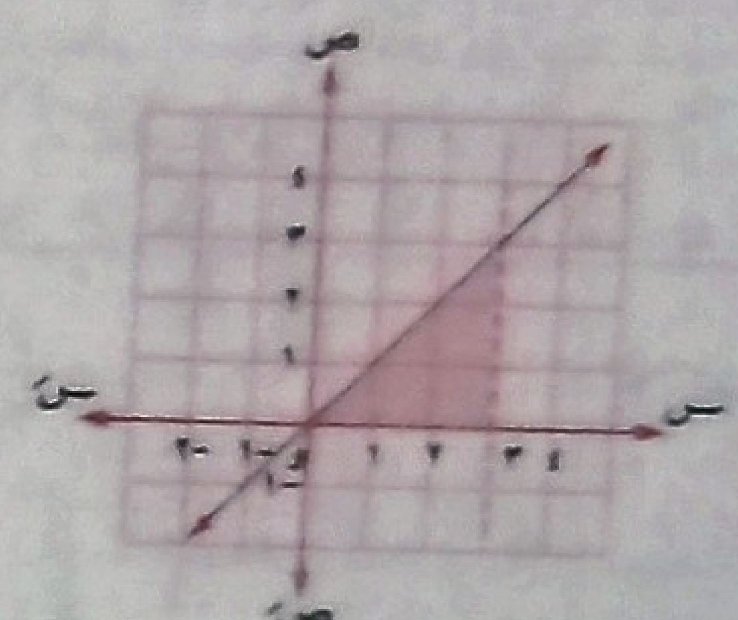
، $\because \left(\frac{\text{ء}^2\text{م}}{\text{ء ك}^2}\right)_{\text{ك}=2} = (48\text{ك} - 48)_{\text{ك}=2} > \text{صفر}$

∴ عند ك = ٢ تكون المساحة أصغر ما يمكن.

إجابات تمارين 19

1

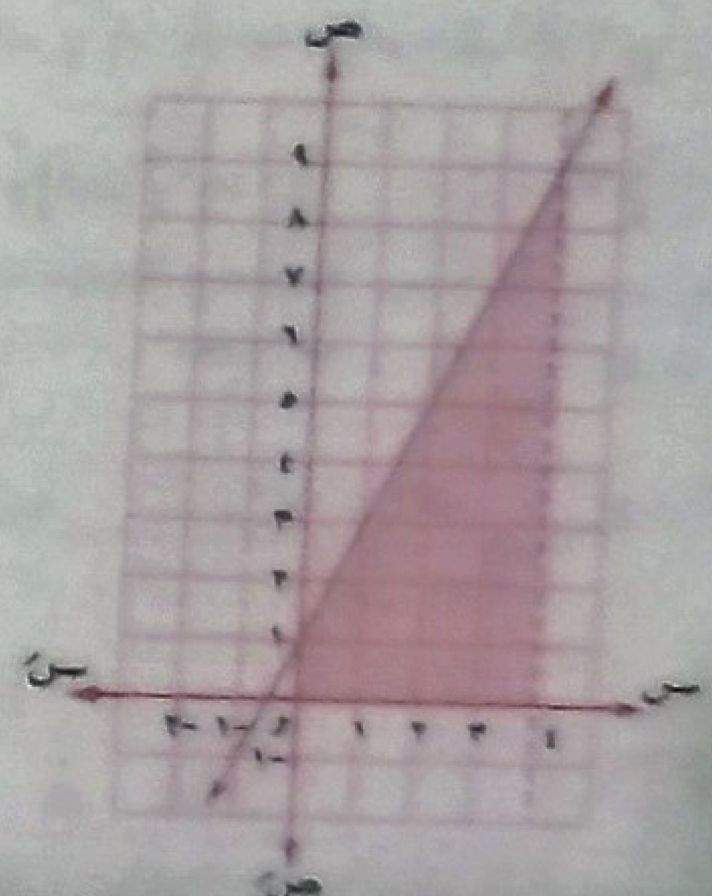
①



الحجم = $\pi \int_{0}^{3} (\text{ص})^2 \, \text{ءس} = \pi \int_{0}^{3} \text{س}^2 \, \text{ءس}$

$= \pi \left[\frac{1}{3} \text{س}^3\right]_{0}^{3} = ٩ \pi$ وحدة حجوم.

②



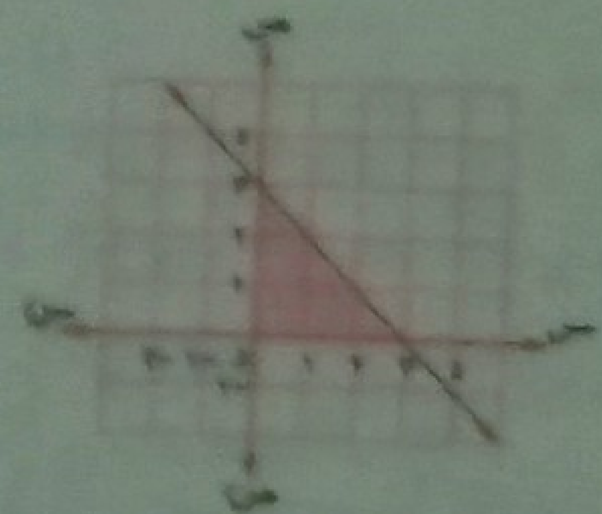
الحجم = $\pi \int_{0}^{4} \text{ص}^2 \, \text{ءس}$

$= \pi \int_{0}^{4} (٢\text{س} + ١)^2 \, \text{ءس}$

$= \pi \left[\frac{1}{6} (٢\text{س} + ١)^3\right]_{0}^{4}$

$= \frac{٣٦٤}{٣} \pi$ وحدة حجوم.

③



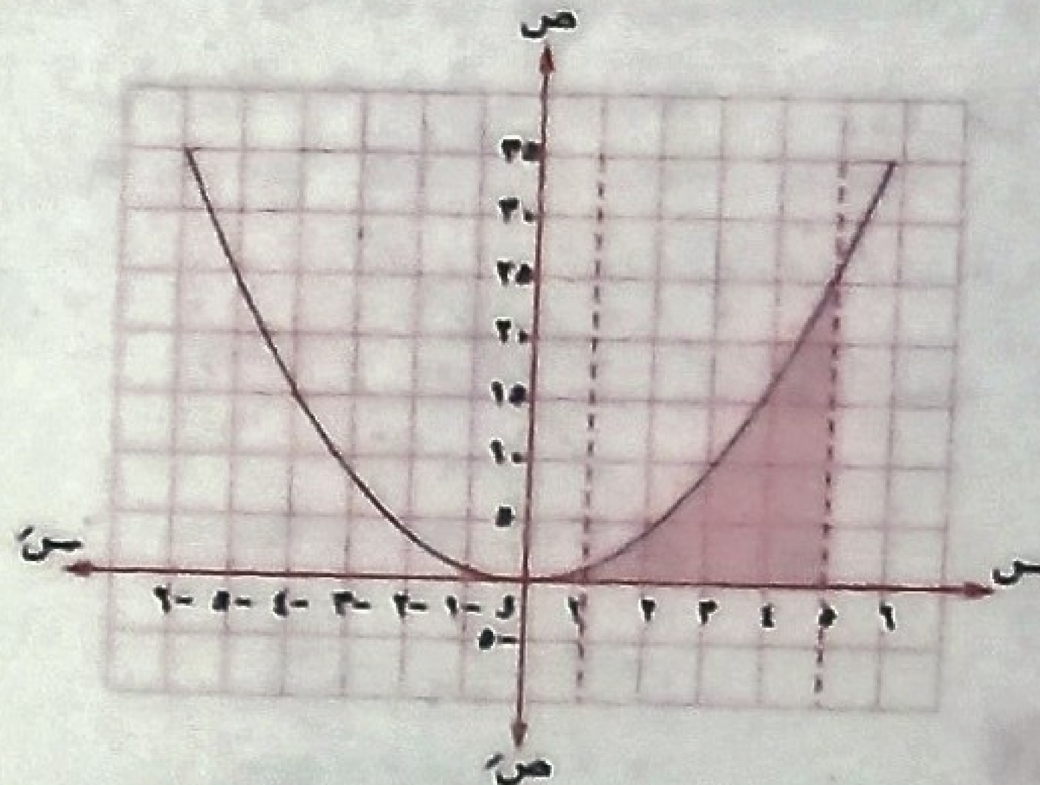
الحجم = $\pi \int_{0}^{3} \text{ص}^2 \, \text{ءس}$

$= \pi \int_{0}^{3} (٣ - \text{س})^2 \, \text{ءس}$

$= \pi \left[\frac{-1}{3} (٣ - \text{س})^3\right]_{0}^{3}$

$= ٩ \pi$ وحدة حجوم.

④

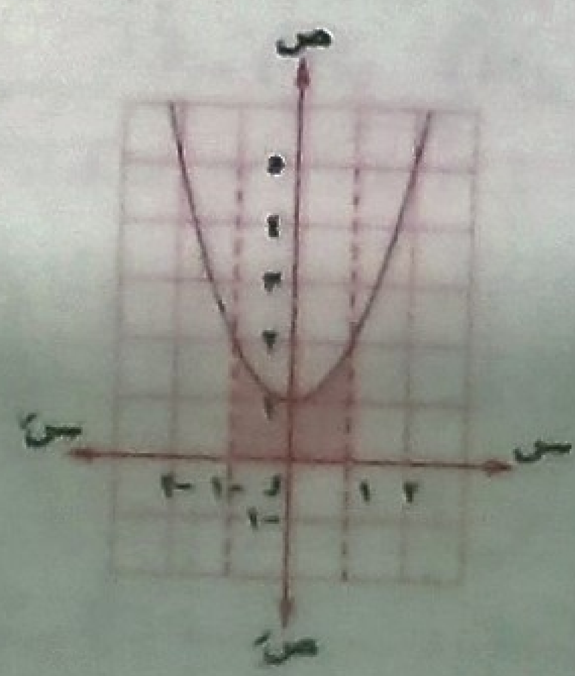


الحجم = $\pi \int_{1}^{5} \text{ص}^2 \, \text{ءس} = \pi \int_{1}^{5} (\text{س}^2)^2 \, \text{ءس}$

$= \pi \int_{1}^{5} \text{س}^4 \, \text{ءس} = \pi \left[\frac{1}{5} \text{س}^5\right]_{1}^{5}$

$= ٦٢٤ \frac{٤}{٥} \pi$ وحدة حجوم.

⑤



الحجم = $\pi \int_{-1}^{1} \text{ص}^2 \, \text{ءس}$

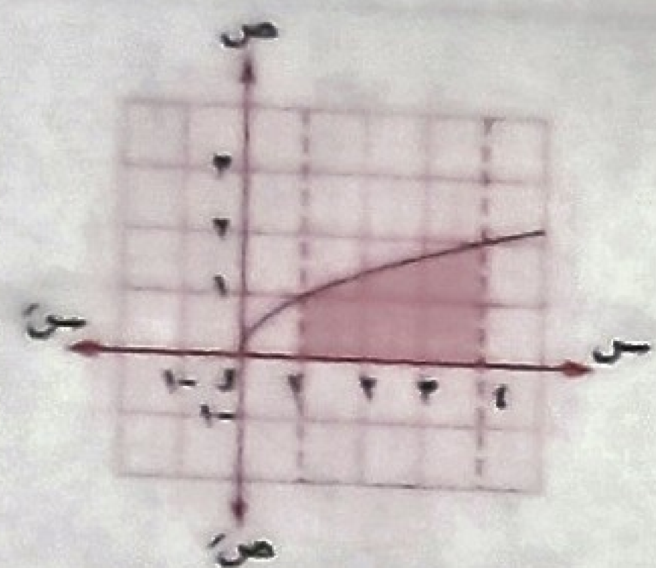
$= \pi \int_{-1}^{1} (\text{س}^2 + ١)^2 \, \text{ءس}$

$= \pi \int_{-1}^{1} (\text{س}^4 + ٢\text{س}^2 + ١) \, \text{ءس}$

$= \pi \left[\frac{1}{5} \text{س}^5 + \frac{2}{3} \text{س}^3 + \text{س}\right]_{-1}^{1}$

$= \frac{٥٦}{١٥} \pi$ وحدة حجوم.

⑥

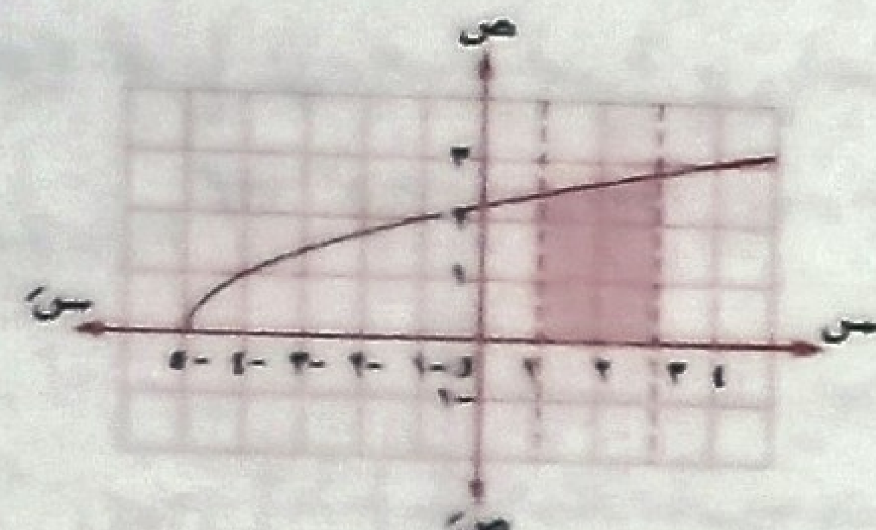


الحجم = $\pi \int_{1}^{4} \text{ص}^2 \, \text{ءس} = \pi \int_{1}^{4} (\sqrt{\text{س}})^2 \, \text{ءس}$

$= \pi \int_{1}^{4} \text{س} \, \text{ءس} = \pi \left[\frac{1}{2} \text{س}^2\right]_{1}^{4}$

$= ٧ \frac{1}{2} \pi$ وحدة حجوم.

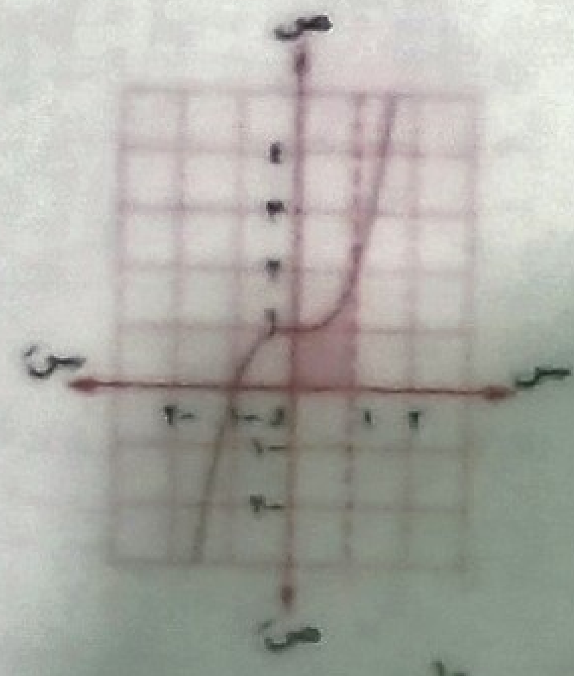
⑦



الحجم = $\pi \int_{1}^{3} \text{ص}^2 \, \text{ءس} = \pi \int_{1}^{3} (\text{س} + ٥) \, \text{ءس}$

$= \left[\frac{1}{2} \text{س}^2 + ٥\text{س}\right]_{1}^{3} = ١٤ \pi$ وحدة حجوم.

⑧



الحجم = $\pi \int_{0}^{1} \text{ص}^2 \, \text{ءس}$

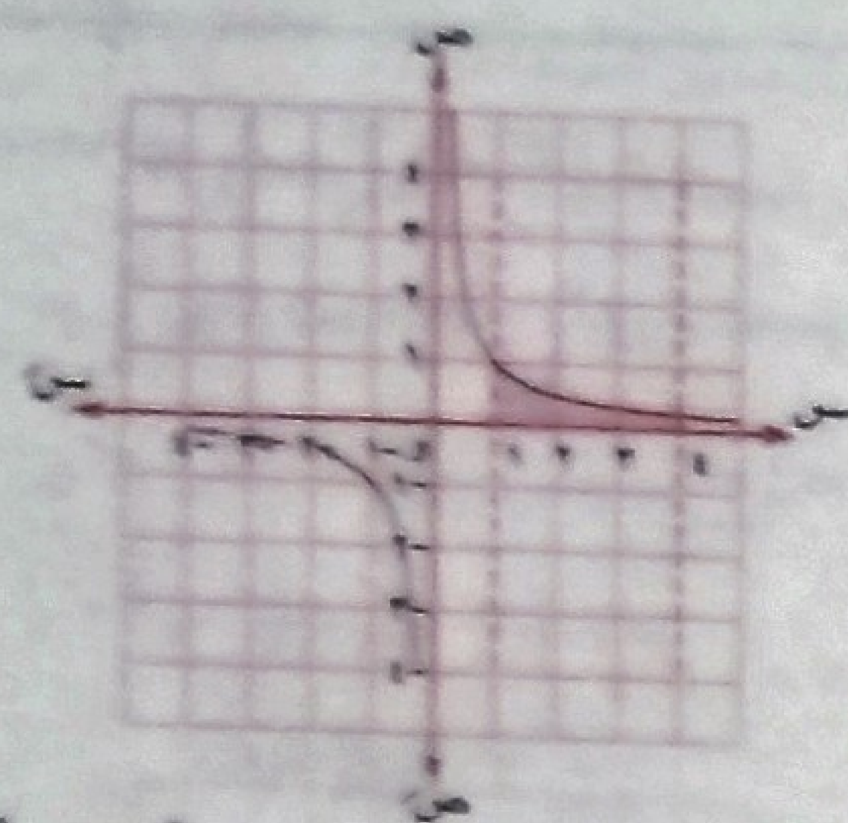
$= \pi \int_{0}^{1} (\text{س}^3 + ١)^2 \, \text{ءس}$

$= \pi \int_{0}^{1} (\text{س}^6 + ٢\text{س}^3 + ١) \, \text{ءس}$

$= \pi \left[\frac{1}{7} \text{س}^7 + \frac{1}{2} \text{س}^4 + \text{س}\right]_{0}^{1}$

$= \frac{٢٣}{١٤} \pi$ وحدة حجوم.

⑨

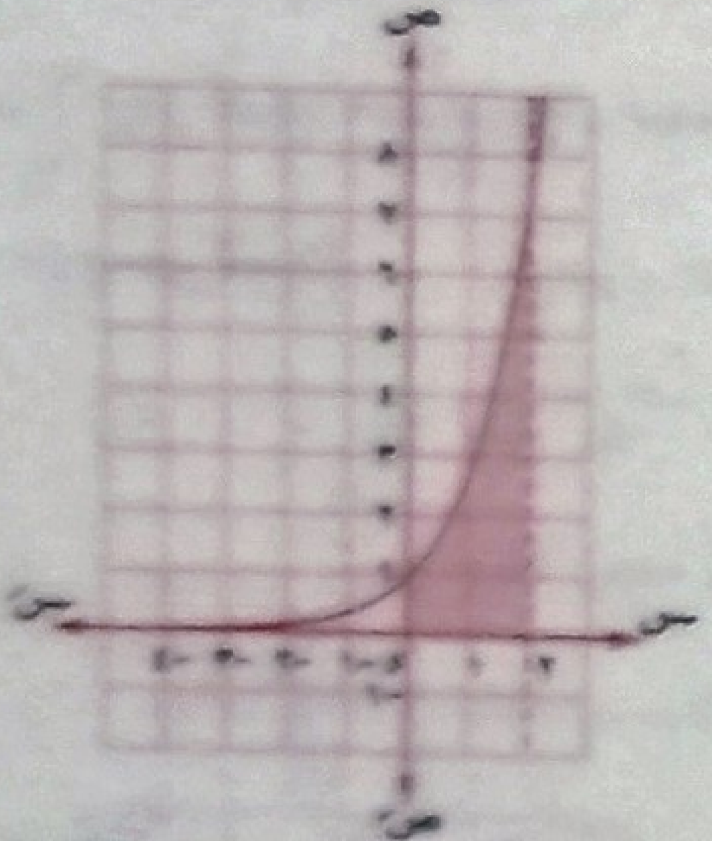


الحجم = $\pi \int_{1}^{4} \text{ص}^2 \, \text{ءس} = \pi \int_{1}^{4} \left(\frac{1}{\text{س}}\right)^2 \, \text{ءس}$

$= \pi \int_{1}^{4} \text{س}^{-2} \, \text{ءس} = \pi \times \left[-\text{س}^{-1}\right]_{1}^{4}$

$= \frac{٣}{٤} \pi$ وحدة حجوم.

⑩

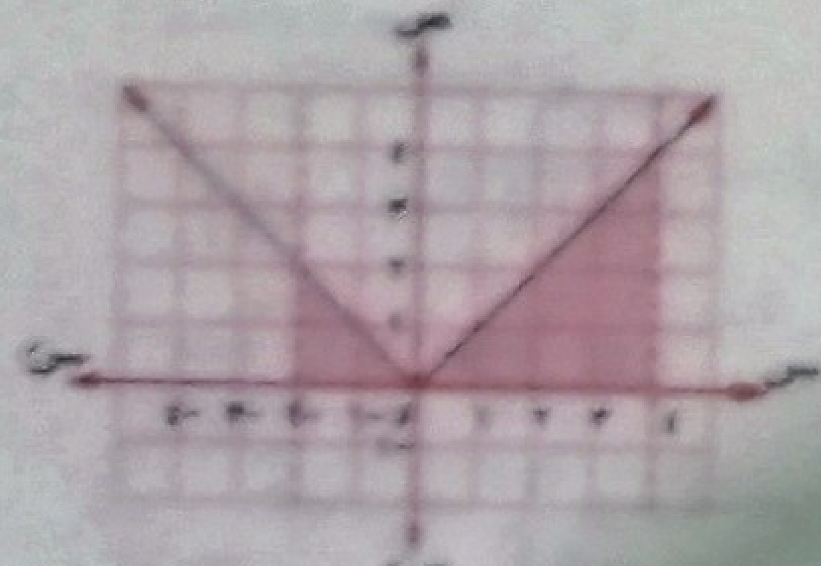


الحجم = $\pi \int_{0}^{1} \text{ص}^2 \, \text{ءس} = \pi \int_{0}^{1} \text{هـ}^{٢\text{س}} \, \text{ءس}$

$= \pi \left[\frac{\text{هـ}^{٢\text{س}}}{٢}\right]_{0}^{1}$

$= \frac{\pi}{٢} (\text{هـ}^2 - ١)$ وحدة حجوم.

⑪



ص = |س| = $\begin{cases} \text{س} & ،\ \text{س} \geq \text{صفر} \\ -\text{س} & ،\ \text{س} < ٠ \end{cases}$

الحجم = $\pi \int_{-2}^{0} (-س)^{2} \, ءس + \pi \int_{0}^{4} س^{2} \, ءس$

$= \pi \int_{-2}^{0} س^{2} \, ءس + \pi \int_{0}^{4} س^{2} \, ءس$

$= \pi \left[\frac{1}{3} س^{3} \right]_{-2}^{0} + \pi \left[\frac{1}{3} س^{3} \right]_{0}^{4}$

$= \frac{8}{3} \pi + \frac{64}{3} \pi = 24 \pi$ وحدة حجوم.

حل آخر :

الحجم = $\pi \int_{-2}^{4} ص^{2} \, ءس = \pi \int_{-2}^{4} (|س|)^{2} \, ءس$

$= \pi \int_{-2}^{4} س^{2} \, ءس = \pi \left[\frac{1}{3} س^{3} \right]_{-2}^{4}$

$= 24 \pi$ وحدة حجوم.

⑫

الحجم = $\pi \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} ص^{2} \, ءس$

$= \pi \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جا^{2} \, 2س \, ءس$

$= \pi \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} جتا \, 4س \right) ءس$

$= \pi \left[\frac{1}{2} س - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} جا \, 4س \right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{4} \pi^{2}$ وحدة حجوم.

⑬

الحجم = $\pi \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} ص^{2} \, ءس = \pi \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} قا^{2} س \, ءس$

$= \pi \left[ظا س \right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \pi$ وحدة حجوم.

⑭

الحجم = $\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} ص^{2} \, ءس$

$= \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} قتا^{2} س \, ءس$

$= \pi \left[- ظتا س \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi$ وحدة حجوم.

٢

①

ص = س

$\therefore$ س = ص

$\therefore$ الحجم = $\pi \int_{0}^{1} س^{2} \, ءص$

$= \pi \int_{0}^{1} ص^{2} \, ءص = \pi \left[\frac{1}{3} ص^{3} \right]_{0}^{1}$

$= \frac{1}{3} \pi$ وحدة حجوم.

②

س + ٢ ص = ٠ $\quad \therefore$ س = −٢ ص

$\therefore$ الحجم = $\pi \int_{0}^{3} س^{2} \, ءص$

$= \pi \int_{0}^{3} 4 ص^{2} \, ءص$

$= \pi \left[\frac{4}{3} ص^{3} \right]_{0}^{3} = 36 \pi$ وحدة حجوم.

③

ص = س^٢ يقطع الصادات فى صفر

الحجم = $\pi \int_{0}^{8} س^{2} \, ءص = \pi \int_{0}^{8} ص \, ءص$

$= \pi \left[\frac{1}{2} ص^{2} \right]_{0}^{8} = 32 \pi$ وحدة حجوم.

④

ص = س^٢ + ١

$\therefore$ س^٢ = ص − ١ يقطع الصادات فى ١

$\therefore$ الحجم = $\pi \int_{1}^{5} س^{2} \, ءص$

$= \pi \int_{1}^{5} (ص - 1) \, ءص$

$= \pi \left[\frac{1}{2} (ص - 1)^{2} \right]_{1}^{5}$

$= 8 \pi$ وحدة حجوم.

⑤

ص = س^٣

$\therefore$ س = ص^{١/٣} $\quad$ (يقطع الصادات فى صفر)

$\therefore$ الحجم = $\pi \int_{0}^{8} س^{2} \, ءص = \pi \int_{0}^{8} ص^{\frac{2}{3}} \, ءص$

$= \pi \left[\frac{3}{5} ص^{\frac{5}{3}} \right]_{0}^{8} = \frac{96}{5} \pi$ وحدة حجوم.

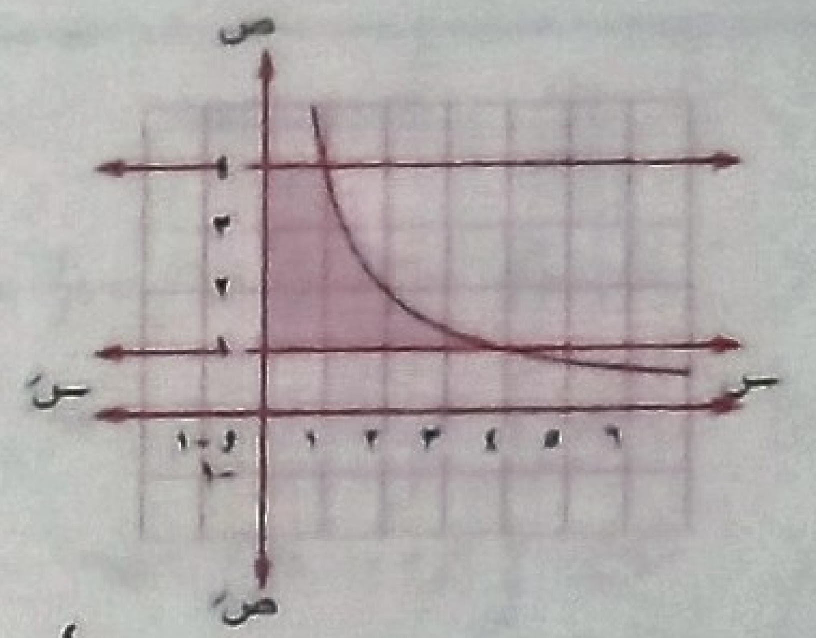
⑥

ص = $\sqrt{س}$ $\quad \therefore$ س = ص^٢

$\therefore$ الحجم = $\pi \int_{1}^{2} س^{2} \, ءص = \pi \int_{1}^{2} ص^{4} \, ءص$

$= \pi \left[\frac{1}{5} ص^{5} \right]_{1}^{2} = \frac{31}{5} \pi$ وحدة حجوم.

⑦



$س ص = ٤$ ∴ $س = \frac{٤}{ص}$

∴ الحجم $= \pi \int_{١}^{٤} س^{٢} \, ءص = \pi \int_{١}^{٤} \frac{١٦}{ص^{٢}} \, ءص$

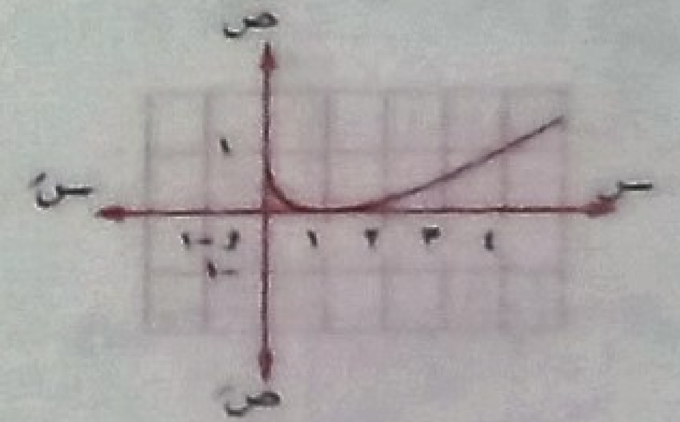
$= \pi \int_{١}^{٤} ١٦ ص^{-٢} \, ءص$

$= \pi \left[-١٦ ص^{-١} \right]_{١}^{٤}$

$= ١٢ \pi$ وحدة حجوم.

⑧ $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ١$ ∴ $\sqrt{س} = ١ - \sqrt{ص}$

∴ $س = (١ - \sqrt{ص})^{٢}$ يقطع الصادات فى ١



∴ الحجم $= \pi \int_{.}^{١} س^{٢} \, ءص$

$= \pi \int_{.}^{١} (١ - \sqrt{ص})^{٤} \, ءص$

بوضع $١ - \sqrt{ص} = ع$ ∴ $\sqrt{ص} = ١ - ع$

∴ $ص = (١ - ع)^{٢}$

∴ $ءص = -٢ (١ - ع) \, ءع$

، ص = ٠ فإن ع = ١ ، ص = ١ فإن ع = صفر

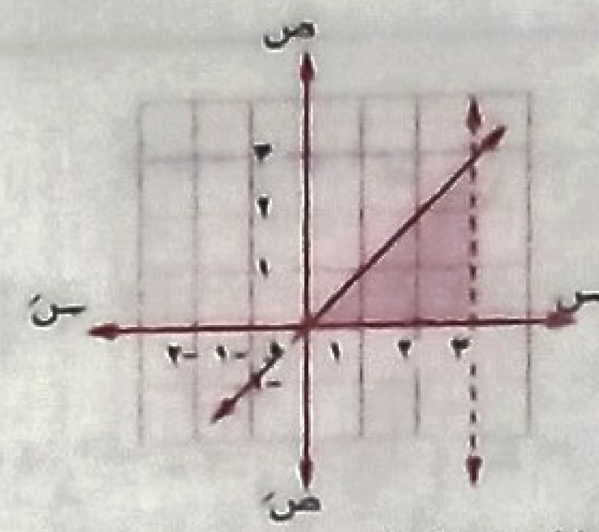
∴ الحجم $= \pi \int_{١}^{صفر} ع^{٤} \times -٢ (١ - ع) \, ءع$

$= \pi \int_{١}^{صفر} (-٢ ع^{٤} + ٢ ع^{٥}) \, ءع$

$= \pi \left[-\frac{٢}{٥} ع^{٥} + \frac{١}{٣} ع^{٦} \right]_{١}^{صفر}$

$= \frac{١}{١٥} \pi$ وحدة حجوم.

٣



بدوران المنطقة المستوية المحصورة بين س = ٠ ، س = ٣ ، د (س) = س حول محور السينات ينتج مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ٣ وحدات طول وارتفاعه ٣ وحدات طول.

∴ حجمه بالتكامل $= \pi \int_{.}^{٣} ص^{٢} \, ءس$

$= \pi \int_{.}^{٣} س^{٢} \, ءس$

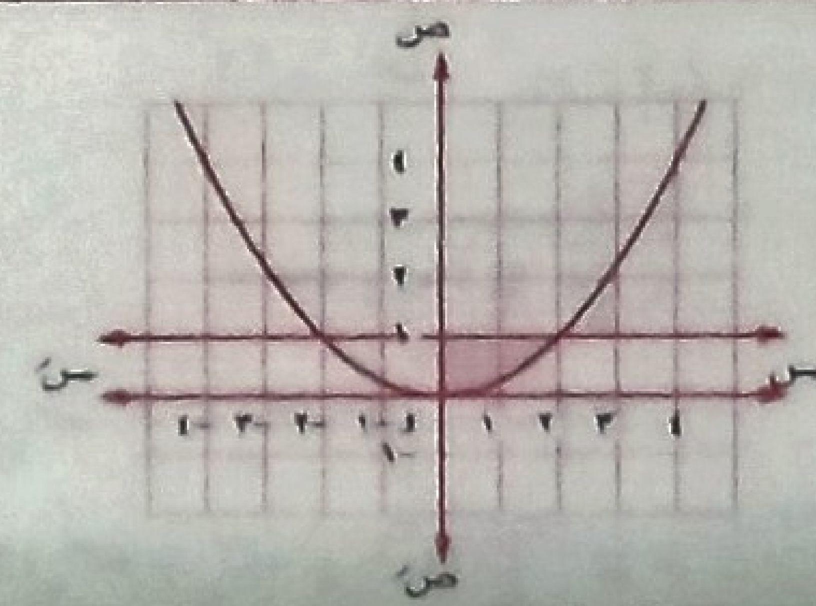
$= \pi \times \left[\frac{١}{٣} س^{٣} \right]_{.}^{٣}$

$= ٩ \pi$ وحدة حجوم.

، الحجم بواسطة قانون حجم المخروط

$= \frac{١}{٣} \pi (٣)^{٢} \times ٣ = ٩ \pi$ وحدة حجوم.

٤



① حول محور الصادات

الحجم $= \pi \int_{.}^{١} س^{٢} \, ءص = \pi \int_{.}^{١} ٤ ص \, ءص$

$= \pi \left[٢ ص^{٢} \right]_{.}^{١} = ٢ \pi$ وحدة حجوم.

② حول محور السينات : عند ص = ١ فإن س = ٢

∴ الحجم $= \pi \int_{.}^{٢} (١^{٢} - ص^{٢}) \, ءس$

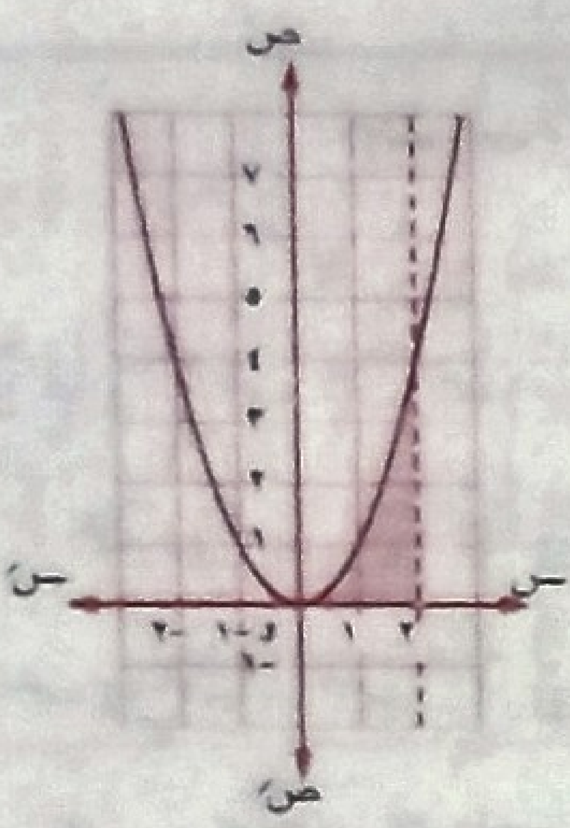
$= \pi \int_{.}^{٢} \left(١ - \left(\frac{١}{٤} س^{٢}\right)^{٢}\right) ءس$

$= \pi \int_{.}^{٢} \left(١ - \frac{١}{١٦} س^{٤}\right) ءس$

$= \pi \left[س - \frac{١}{٨٠} س^{٥} \right]_{.}^{٢}$

$= \frac{٨}{٥} \pi$ وحدة حجوم.

٥



① حول محور السينات

∴ ص = س² يقطع محور السينات فى صفر

∴ الحجم $= \pi \int_{.}^{٢} ص^{٢} \, ءس = \pi \int_{.}^{٢} س^{٤} \, ءس$

$= \pi \left[\frac{١}{٥} س^{٥} \right]_{.}^{٢} = \frac{٣٢}{٥} \pi$ وحدة حجوم.

② حول محور الصادات

عند س = ٢ فإن ص = ٤

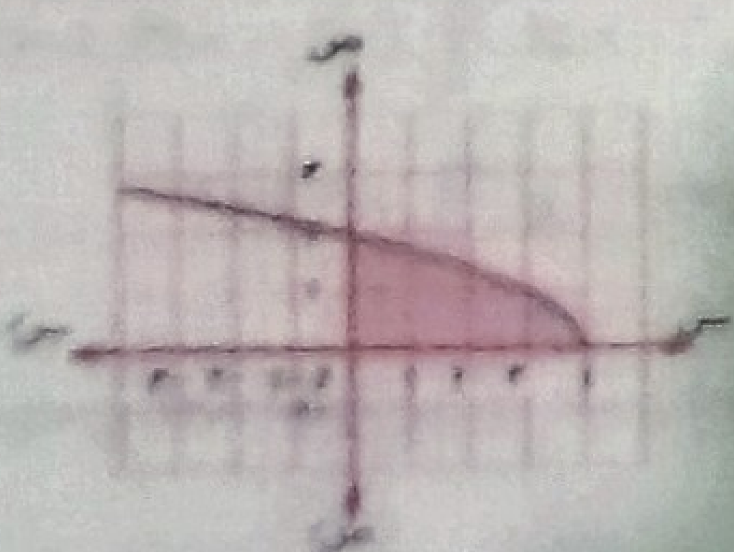
∴ الحجم $= \pi \int_{.}^{٤} (٤ - س^{٢}) \, ءص$

$= \pi \int_{.}^{٤} (٤ - ص) \, ءص$

$= \pi \left[٤ ص - \frac{١}{٢} ص^{٢} \right]_{.}^{٤}$

$= ٨ \pi$ وحدة حجوم

٦



$ص = \sqrt{٤ - س}$ ومنها $س = ٤ - ص^{٢}$

① حول محور السينات

∴ الحجم $= \pi \int_{.}^{٤} ص^{٢} \, ءس = \pi \int_{.}^{٤} (٤ - س) \, ءس$

$= \pi \left[٤ س - \frac{١}{٢} س^{٢} \right]_{.}^{٤} = ٨ \pi$ وحدة حجوم

② حول محور الصادات

∴ الحجم $= \pi \int_{.}^{٢} س^{٢} \, ءص$

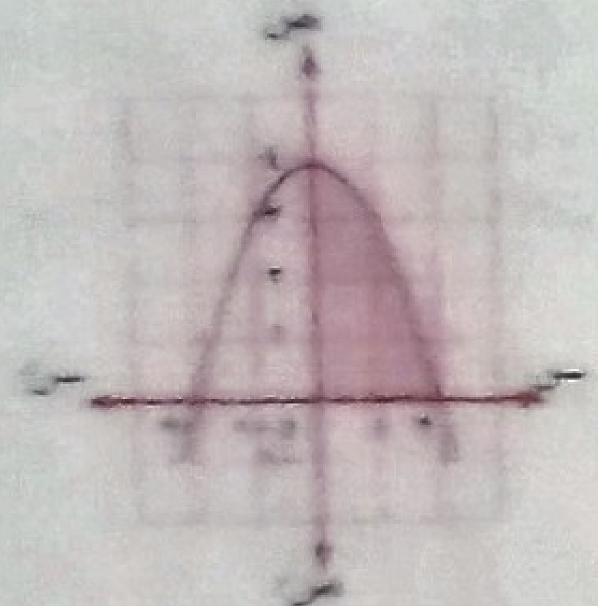
$= \pi \int_{.}^{٢} (٤ - ص^{٢})^{٢} \, ءص$

$= \pi \int_{.}^{٢} (١٦ - ٨ ص^{٢} + ص^{٤}) \, ءص$

$= \pi \left[١٦ ص - \frac{٨}{٣} ص^{٣} + \frac{١}{٥} ص^{٥} \right]_{.}^{٢}$

$= \frac{٢٥٦}{١٥} \pi$ وحدة حجوم

٧



ص = ٤ − س² ومنها س² = ٤ − ص

① حول محور السينات

∴ الحجم $= \pi \int_{.}^{٢} ص^{٢} \, ءس$

$= \pi \int_{.}^{٢} (٤ - س^{٢})^{٢} \, ءس$

$= \pi \int_{.}^{٢} (١٦ - ٨ س^{٢} + س^{٤}) \, ءس$

$= \pi \left[١٦ س - \frac{٨}{٣} س^{٣} + \frac{١}{٥} س^{٥} \right]_{.}^{٢}$

$= \frac{٢٥٦}{١٥} \pi$ وحدة حجوم

② حول محور الصادات

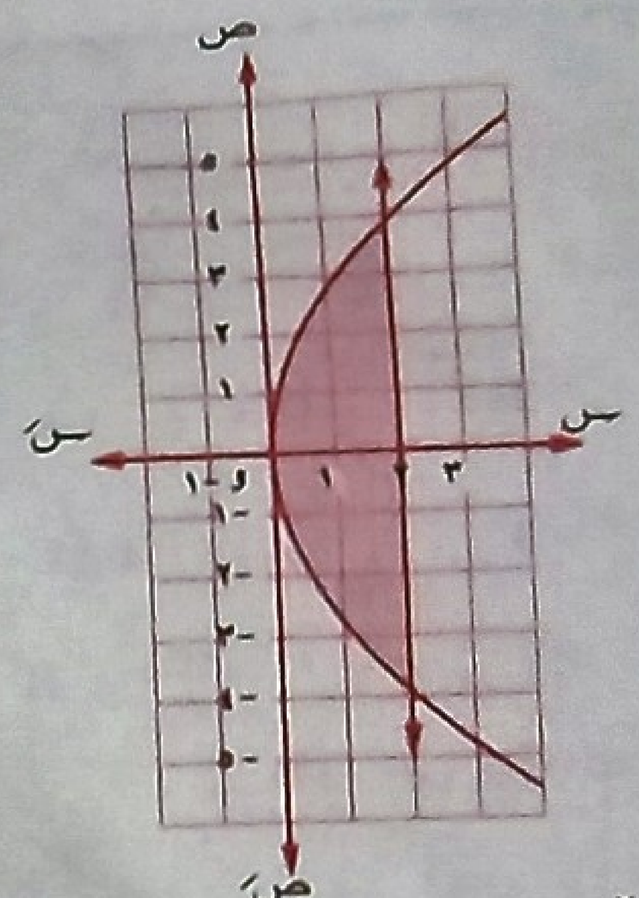
∴ الحجم $= \pi \int_{.}^{٤} س^{٢} \, ءص$

$= \pi \int_{.}^{٤} (٤ - ص) \, ءص$

$= \pi \left[٤ ص - \frac{١}{٢} ص^{٢} \right]_{.}^{٤}$

$= ٨ \pi$ وحدة حجوم

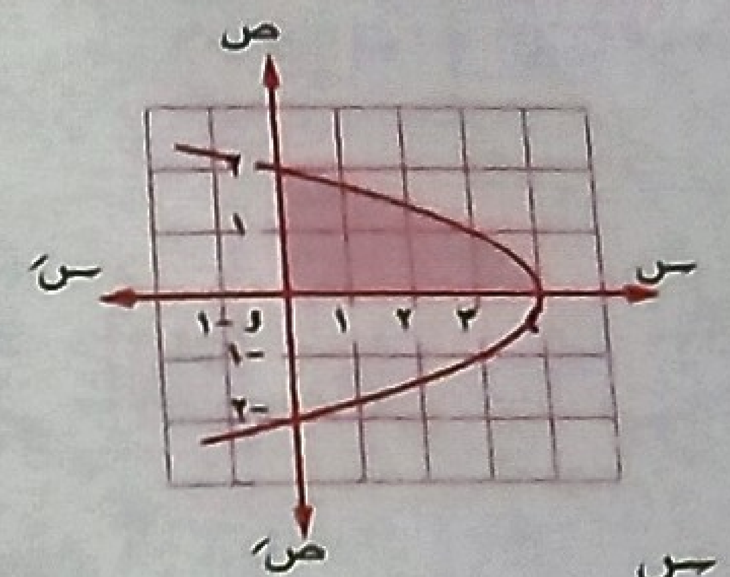
٨



الحجم $= \pi \int_{0}^{2} ص^2 \, ء س = \pi \int_{0}^{2} ٨ س \, ء س$

$= \pi \left[٤ س^2\right]_{0}^{2} = ١٦ \pi$ وحدة حجوم.

٩



$ص^2 = ٤ - س$

① حول محور السينات :

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{0}^{4} ص^2 \, ء س$

$= \pi \int_{0}^{4} (٤ - س) \, ء س$

$= \pi \left[٤ س - \frac{1}{2} س^2\right]_{0}^{4}$

$= ٨ \pi$ وحدة حجوم.

② حول محور الصادات :

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{0}^{2} س^2 \, ء ص$

$= \pi \int_{0}^{2} (٤ - ص^2)^2 \, ء ص$

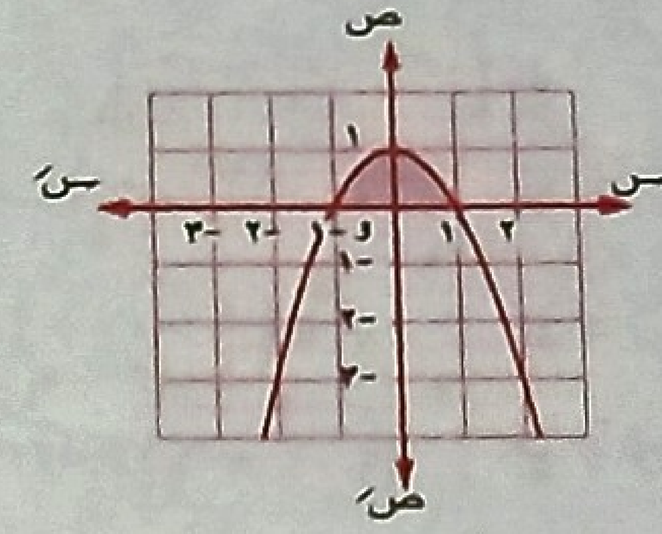
$= \pi \int_{0}^{2} (١٦ - ٨ ص^2 + ص^4) \, ء ص$

$= \pi \left[١٦ ص - \frac{8}{3} ص^3 + \frac{1}{5} ص^5\right]_{0}^{2}$

$= \frac{256}{15} \pi$ وحدة حجوم.

١٠

①



$د(س) = ١ - س^2$ يقطع محور السينات فى -١ ، ١

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{-1}^{1} ص^2 \, ء س$

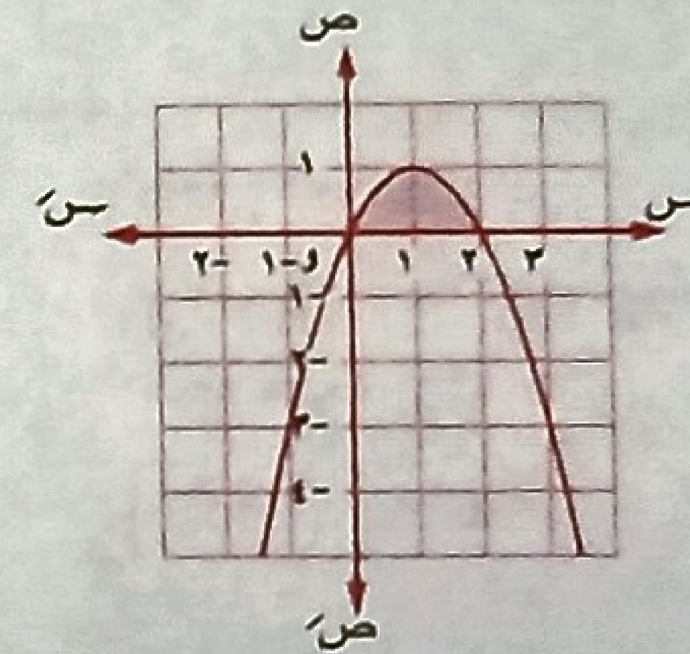
$= \pi \int_{-1}^{1} (١ - س^2)^2 \, ء س$

$= \pi \int_{-1}^{1} (١ - ٢ س^2 + س^4) \, ء س$

$= \pi \left[س - \frac{2}{3} س^3 + \frac{1}{5} س^5\right]_{-1}^{1}$

$= \frac{16}{15} \pi$ وحدة حجوم.

②



$د(س) = ٢ س - س^2$ يقطع محور السينات فى صفر ، ٢

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{0}^{2} ص^2 \, ء س$

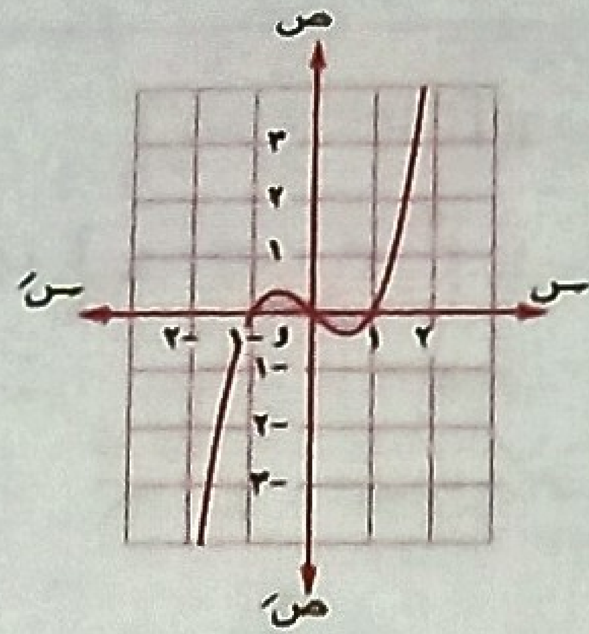
$= \pi \int_{0}^{2} (٢ س - س^2)^2 \, ء س$

$= \pi \int_{0}^{2} (٤ س^2 - ٤ س^3 + س^4) \, ء س$

$= \pi \left[\frac{4}{3} س^3 - س^4 + \frac{1}{5} س^5\right]_{0}^{2}$

$= \frac{16}{15} \pi$ وحدة حجوم.

③



$د(س) = س^3 - س$ يقطع محور السينات فى صفر ، ١ ، -١

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{-1}^{1} ص^2 \, ء س$

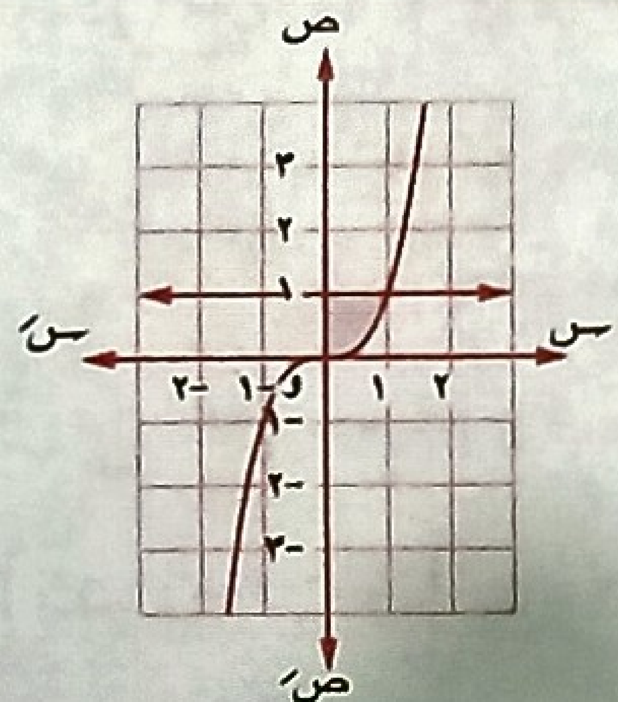
$= \pi \int_{-1}^{1} (س^3 - س)^2 \, ء س$

$= \pi \int_{-1}^{1} (س^6 - ٢ س^4 + س^2) \, ء س$

$= \pi \left[\frac{1}{7} س^7 - \frac{2}{5} س^5 + \frac{1}{3} س^3\right]_{-1}^{1}$

$= \frac{16}{105} \pi$ وحدة حجوم.

١١



$ص_1 = ١$ ، $ص_2 = س^3$

، $\because ص_1 \geq ص_2$ فى الفترة $[٠ ، ١]$

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{0}^{1} (ص_1^2 - ص_2^2) \, ء س$

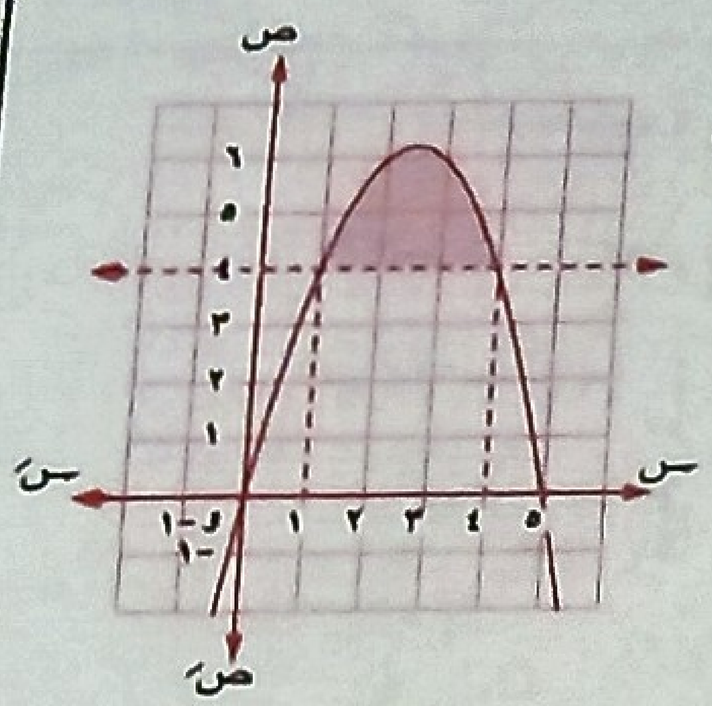
$= \pi \int_{0}^{1} (١ - س^6) \, ء س$

$= \pi \left[س - \frac{1}{7} س^7\right]_{0}^{1} = \frac{6}{7} \pi$ وحدة حجم.

$\therefore \pi$ نق$^2 \times ٤٢ = \frac{6}{7} \pi$

$\therefore$ نق $= \frac{1}{7}$ وحدة طول.

١٢



$ص_1 = ٥ س - س^2$

، $ص_2 = ٤$

يتقاطعا فى $س = ١$

، $س = ٤$

، $\because ص_1 \geq ص_2$

فى الفترة $[١ ، ٤]$

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{1}^{4} (ص_1^2 - ص_2^2) \, ء س$

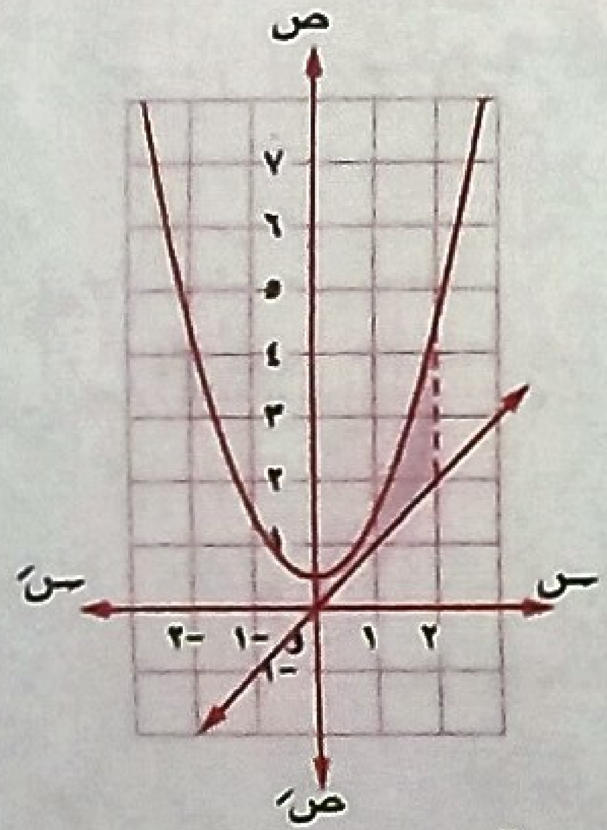
$= \pi \int_{1}^{4} ((٥ س - س^2)^2 - ٤^2) \, ء س$

$= \pi \int_{1}^{4} (٢٥ س^2 - ١٠ س^3 + س^4 - ١٦) \, ء س$

$= \pi \left[\frac{25}{3} س^3 - \frac{5}{2} س^4 + \frac{1}{5} س^5 - ١٦ س\right]_{1}^{4}$

$= ٤٤,١ \pi$ وحدة حجوم.

١٣



$ص_1 = \frac{1}{2} + س^2$ ، $ص_2 = س$

، $\because ص_1 \geq ص_2$ فى الفترة $[٠ ، ٢]$

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{0}^{2} (ص_1^2 - ص_2^2) \, ء س$

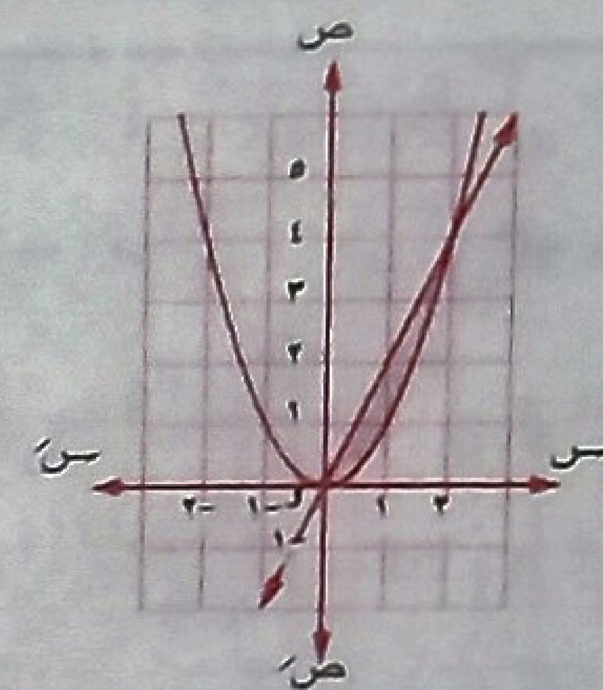
$= \pi \int_{0}^{2} \left(\left(\frac{1}{2} + س^2\right)^2 - س^2\right) \, ء س$

$= \pi \int_{0}^{2} \left(\frac{1}{4} + س^2 + س^4 - س^2\right) \, ء س$

$= \pi \left[\frac{1}{4} س + \frac{1}{5} س^5\right]_{0}^{2}$

$= ٦,٩ \pi$ وحدة حجوم.

١٤



$ص_١ = س^٢$ ، $ص_٢ = ٢ س$

يتقاطعا عند $س = ٠$ ، $س = ٢$

، في هذه الفترة $ص_٢ \geq ص_١$

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{٠}^{٢} (ص_٢^٢ - ص_١^٢)\, ء س$

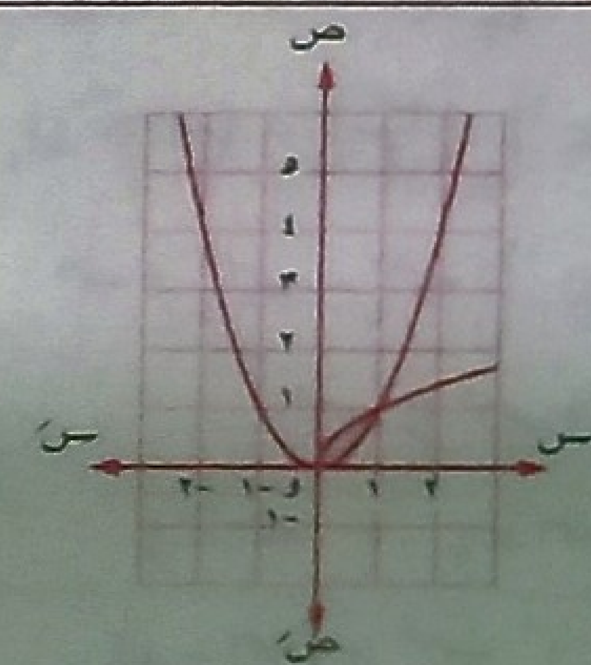
$= \pi \int_{٠}^{٢} \left((٢ س)^٢ - (س^٢)^٢\right) ء س$

$= \pi \int_{٠}^{٢} (٤ س^٢ - س^٤)\, ء س$

$= \pi \left[\frac{٤}{٣} س^٣ - \frac{١}{٥} س^٥\right]_{٠}^{٢}$

$= \frac{٦٤}{١٥} \pi$ وحدة حجوم.

١٥



$ص_١ = \sqrt{س}$ ، $ص_٢ = س^٢$

يتقاطعا عند $س = ٠$ ، $س = ١$

، $\because ص_١ \geq ص_٢$ في هذه الفترة

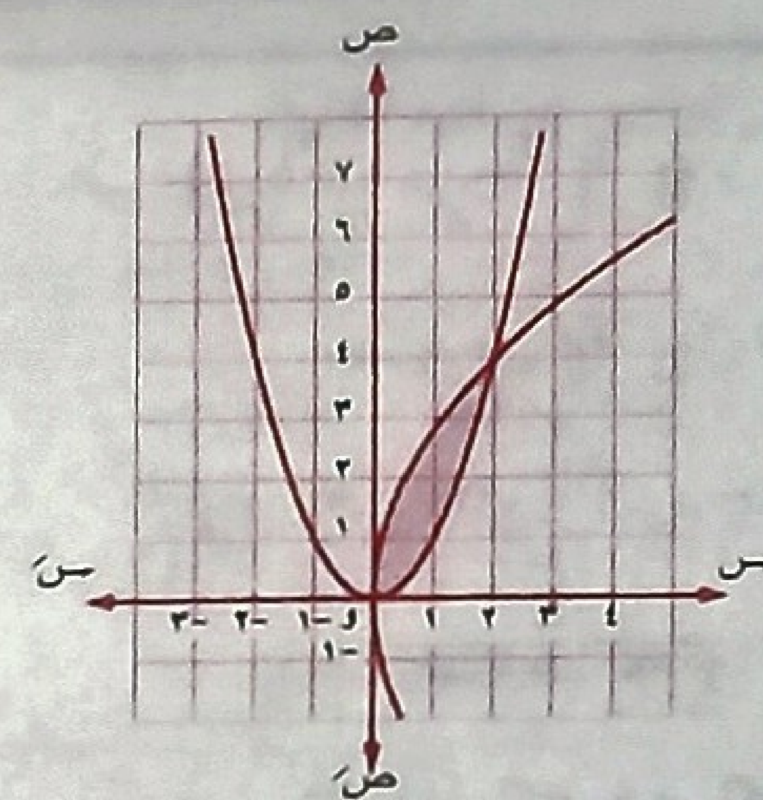
$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{٠}^{١} (ص_١^٢ - ص_٢^٢)\, ء س$

$= \pi \int_{٠}^{١} (س - س^٤)\, ء س$

$= \pi \left[\frac{١}{٢} س^٢ - \frac{١}{٥} س^٥\right]_{٠}^{١}$

$= \frac{٣}{١٠} \pi$ وحدة حجوم.

١٦



$ص_١^٢ = ٨ س$ ، $ص_٢ = س^٢$

يتقاطعا عند $س = ٠$ ، $س = ٢$

، $\because ص_١ \geq ص_٢$ في هذه الفترة

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{٠}^{٢} (ص_١^٢ - ص_٢^٢)\, ء س$

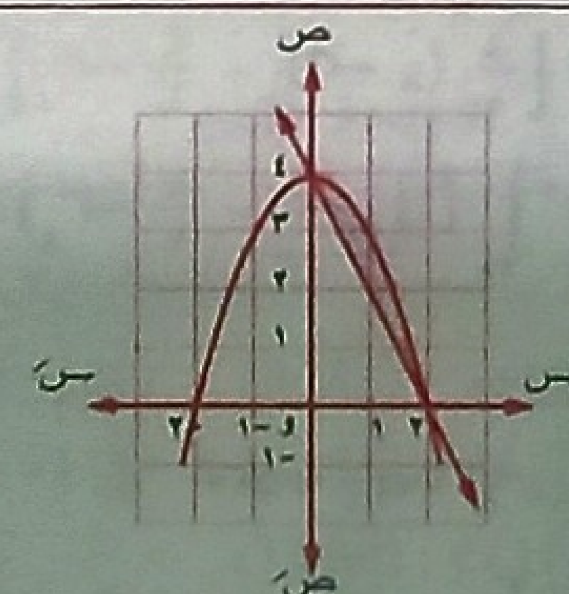
$= \pi \int_{٠}^{٢} \left(٨ س - (س^٢)^٢\right) ء س$

$= \pi \int_{٠}^{٢} \left((٨ س - س^٤)\right) ء س$

$= \pi \left[٤ س^٢ - \frac{١}{٥} س^٥\right]_{٠}^{٢}$

$= \frac{٤٨}{٥} \pi$ وحدة حجوم.

١٧



$ص = ٤ - س^٢$ $\therefore س_١^٢ = ٤ - ص$

، $٢ س + ص = ٤$ $\therefore س_٢ = ٢ - \frac{١}{٢} ص$

يتقاطعان عند $ص = ٠$ ، $ص = ٤$

وتكون $س_١ \geq س_٢$ في الفترة $[٠ ، ٤]$

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{٠}^{٤} (س_١^٢ - س_٢^٢)\, ء ص$

$= \pi \int_{٠}^{٤} \left((٤ - ص) - (٢ - \frac{١}{٢} ص)^٢\right) ء ص$

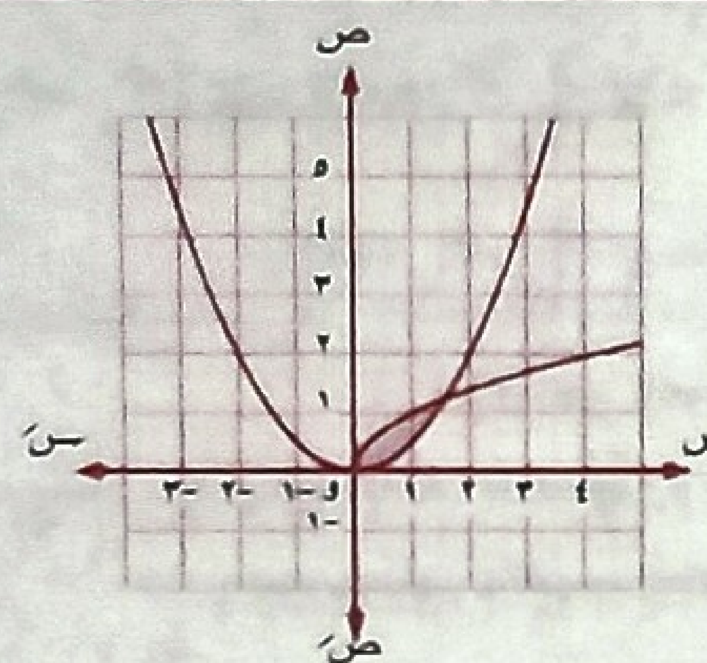
$= \pi \int_{٠}^{٤} (٤ - ص - ٤ + ٢ ص - \frac{١}{٤} ص^٢)\, ء ص$

$= \pi \int_{٠}^{٤} (ص - \frac{١}{٤} ص^٢)\, ء ص$

$= \pi \left[\frac{١}{٢} ص^٢ - \frac{١}{١٢} ص^٣\right]_{٠}^{٤}$

$= \frac{٨}{٣} \pi$ وحدة حجوم.

١٨



$س_١^٢ = ٢ ص$ ، $س_٢ = ص^٢$

يتقاطعا في $ص = ٠$ ، $ص = \sqrt[٣]{٢}$

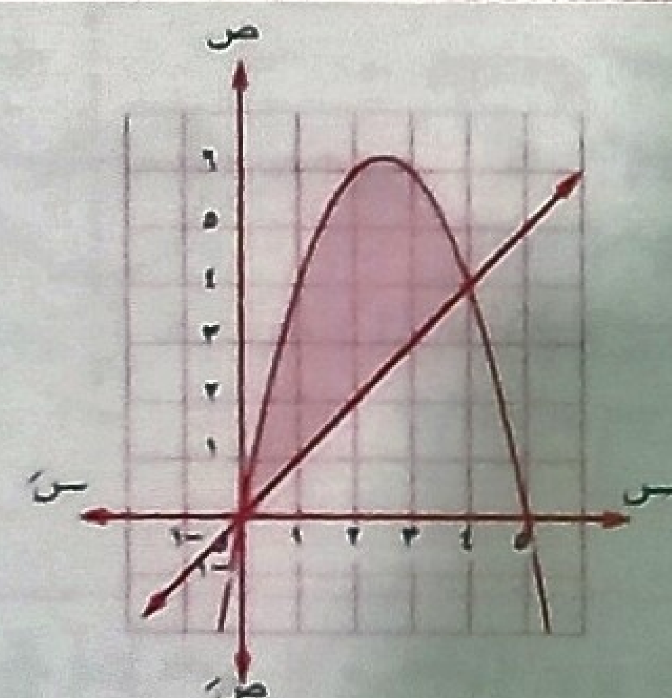
وفي هذه الفتره $س_١ \geq س_٢$

الحجم $= \pi \int_{٠}^{\sqrt[٣]{٢}} (س_١^٢ - س_٢^٢)\, ء ص$

$= \pi \int_{٠}^{\sqrt[٣]{٢}} (٢ ص - ص^٤)\, ء ص$

$= \pi \left[ص^٢ - \frac{١}{٥} ص^٥\right]_{٠}^{\sqrt[٣]{٢}} \simeq ٠.٩٥ \pi$ وحدة حجوم.

١٩



$ص_١ = ٥ س - س^٢$ ، $ص_٢ = س$

يتقاطعا عند $س = ٠$ ، $س = ٤$

وفي هذه الفترة $ص_١ \geq ص_٢$

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{٠}^{٤} (ص_١^٢ - ص_٢^٢)\, ء س$

$= \pi \int_{٠}^{٤} \left((٥ س - س^٢)^٢ - س^٢\right) ء س$

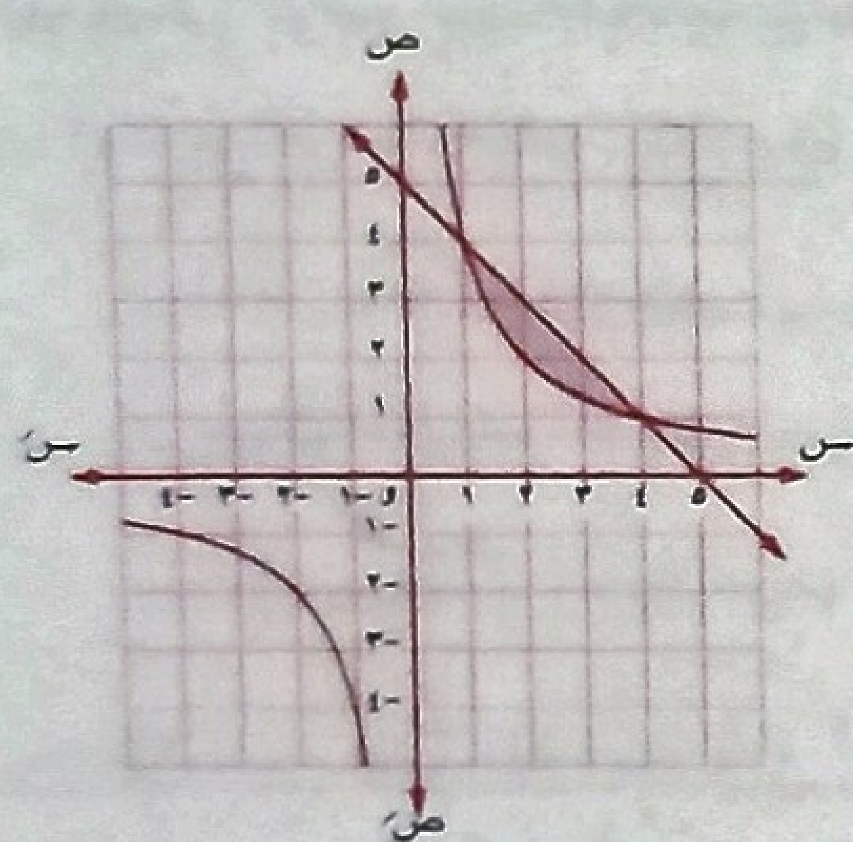
$= \pi \int_{٠}^{٤} (٢٥ س^٢ - ١٠ س^٣ + س^٤ - س^٢)\, ء س$

$= \pi \int_{٠}^{٤} (٢٤ س^٢ - ١٠ س^٣ + س^٤)\, ء س$

$= \pi \left[٨ س^٣ - \frac{٥}{٢} س^٤ + \frac{١}{٥} س^٥\right]_{٠}^{٤}$

$= \frac{٣٨٤}{٥} \pi = ٧٦.٨ \pi$ وحدة حجوم.

٢٠



$ص_١ = \frac{٤}{س}$ ، $ص_٢ = ٥ - س$

يتقاطعا عند $س = ١$ ، $س = ٤$

وتكون $ص_٢ \geq ص_١$ في هذه الفترة

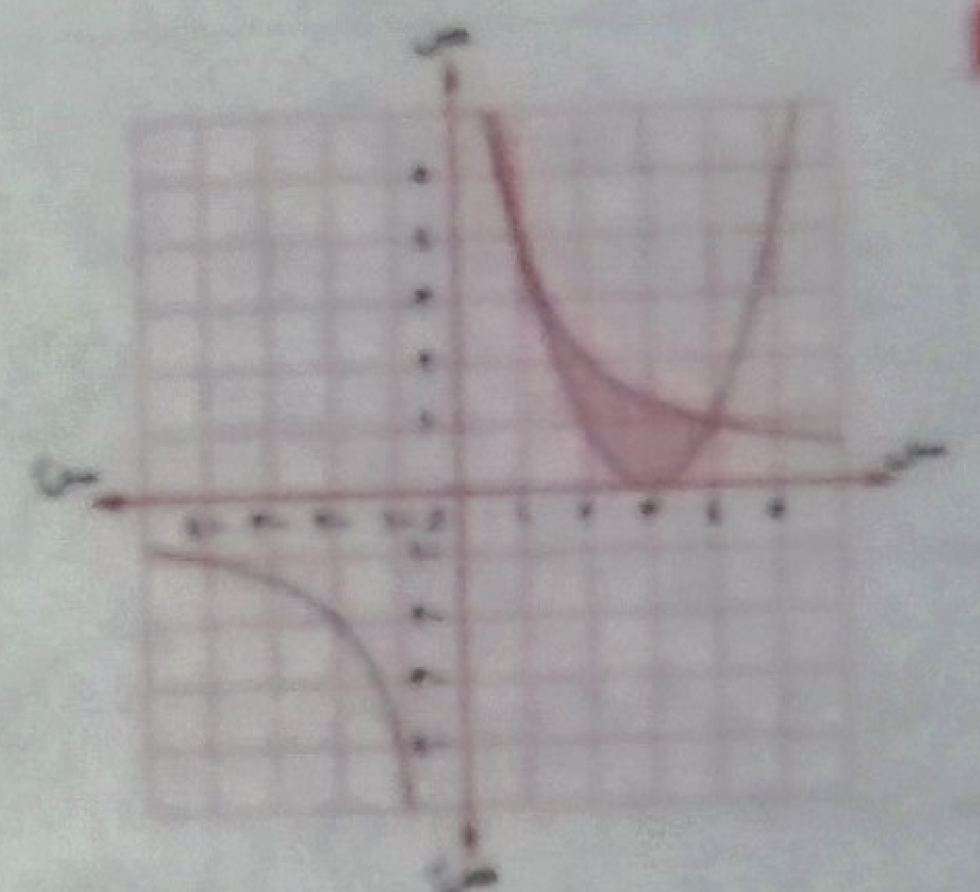
$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{١}^{٤} (ص_٢^٢ - ص_١^٢)\, ء س$

$= \pi \int_{١}^{٤} (٥ - س)^٢ - \left(\frac{٤}{س}\right)^٢ ء س$

$= \pi \int_{١}^{٤} \left(٢٥ - ١٠ س + س^٢ - \frac{١٦}{س^٢}\right) ء س$

$= \pi \left[٢٥ س - ٥ س^٢ + \frac{١}{٣} س^٣ + ١٦ س^{-١}\right]_{١}^{٤} = ٩ \pi$ وحدة حجوم.

٤١



$\text{ص}_1 = \frac{4}{\text{س}}$ ، $\text{ص}_2 = (\text{س} - 2)^2$

يتقاطعا عند $\text{س} = 1$ ، $\text{س} = 4$

وفي هذه الفترة $\text{ص}_1 \le \text{ص}_2$

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_1^4 \text{ص}_1^2 - \text{ص}_2^2 \, \text{ء س}$

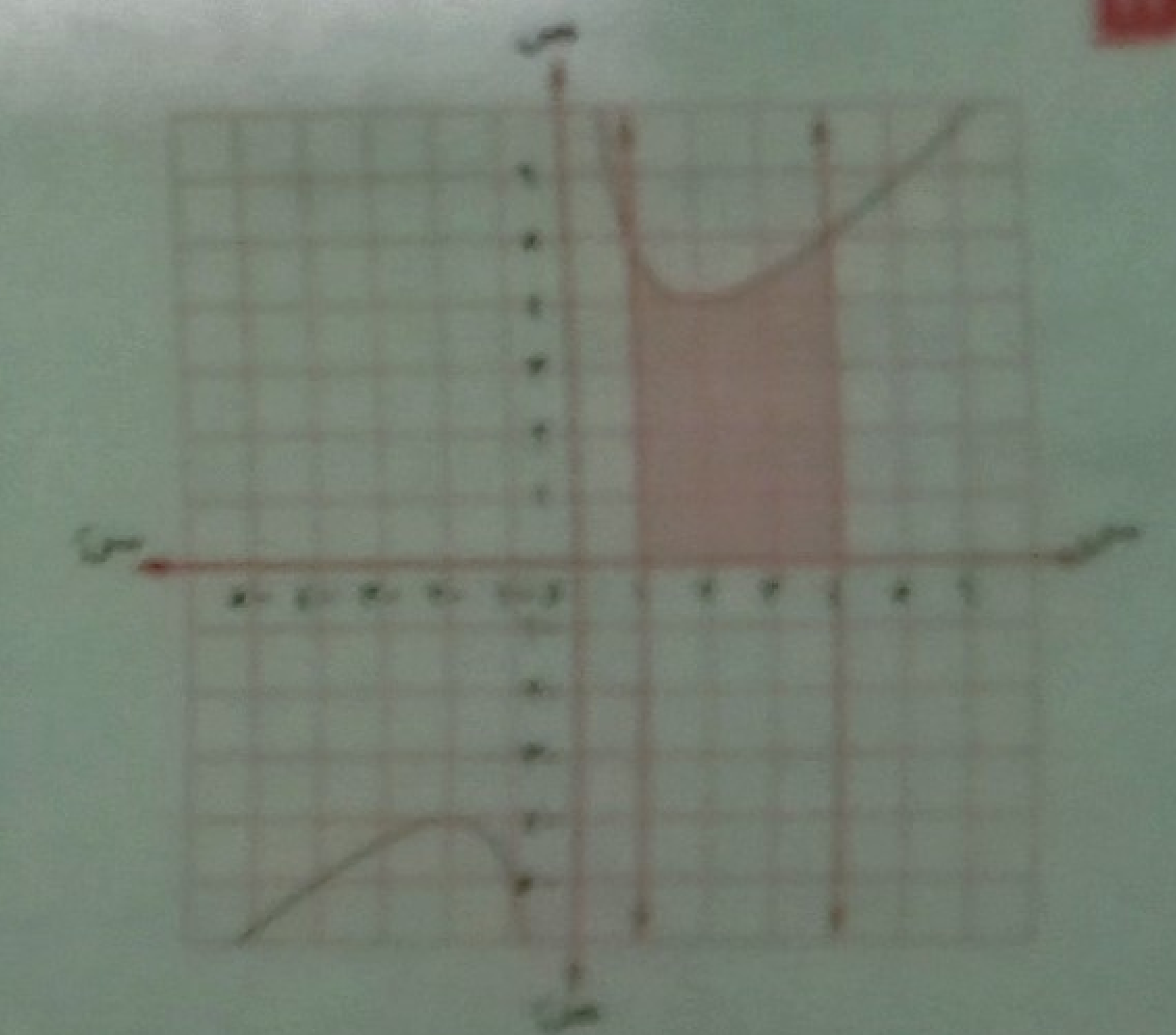
$= \pi \int_1^4 \left(\frac{4}{\text{س}}\right)^2 - (\text{س} - 2)^4 \, \text{ء س}$

$= \pi \int_1^4 \frac{16}{\text{س}^2} - (\text{س} - 2)^4 \, \text{ء س}$

$= \pi \left[-16 \, \text{س}^{-1} - \frac{1}{5}(\text{س} - 2)^5\right]_1^4$

$= 5.4 \, \pi$ وحدة حجوم

٤٢



$\because \text{س ص} = 4 + \text{س}^2$ $\therefore \text{ص} = \frac{4}{\text{س}} + \text{س}$

① المساحة $= \int_1^4 \left(\frac{4}{\text{س}} + \text{س}\right) \text{ء س}$

$= \left[4 \, \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| + \frac{1}{2}\text{س}^2\right]_1^4$

$= 4 \, \text{لو}_{\text{هـ}} 4 + \frac{15}{2}$ وحدة مساحة.

② الحجم $= \pi \int_1^4 \left(\frac{4}{\text{س}} + \text{س}\right)^2 \text{ء س}$

$= \pi \int_1^4 \left(\frac{16}{\text{س}^2} + 8 + \text{س}^2\right) \text{ء س}$

$= \pi \left[-16 \, \text{س}^{-1} + 8 \, \text{س} + \frac{1}{3}\text{س}^3\right]_1^4$

$= 57 \, \pi$ وحدة حجوم.

٤٣

① المساحة $= \int_0^2 \left(\sqrt{2\text{س}} - \frac{1}{2}\text{س}^2\right) \text{ء س}$

$= \left[\frac{1}{3}(2\text{س})^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}\text{س}^3\right]_0^2$

$= \frac{4}{3}$ وحدة مساحة.

② الحجم $= \pi \int_0^2 \left(\sqrt{2\text{س}}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\text{س}^2\right)^2 \text{ء س}$

$= \pi \int_0^2 \left(2\text{س} - \frac{1}{4}\text{س}^4\right) \text{ء س}$

$= \pi \left[\text{س}^2 - \frac{1}{20}\text{س}^5\right]_0^2$

$= \frac{12}{5} \, \pi$ وحدة حجوم.

٤٤

$\frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2} + \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = 1$ (بالضرب × $\text{أ}^2 \text{ب}^2$)

$\therefore \text{ب}^2 \text{س}^2 + \text{أ}^2 \text{ص}^2 = \text{أ}^2 \text{ب}^2$

$\therefore \text{ص}^2 = \frac{\text{أ}^2\text{ب}^2 - \text{ب}^2\text{س}^2}{\text{أ}^2}$

، عندما $\text{ص} = 0$ فإن: $\text{س} = \pm \text{أ}$

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{-\text{أ}}^{\text{أ}} \text{ص}^2 \, \text{ء س}$

$= \pi \int_{-\text{أ}}^{\text{أ}} \left(\text{ب}^2 - \frac{\text{ب}^2\text{س}^2}{\text{أ}^2}\right) \text{ء س}$

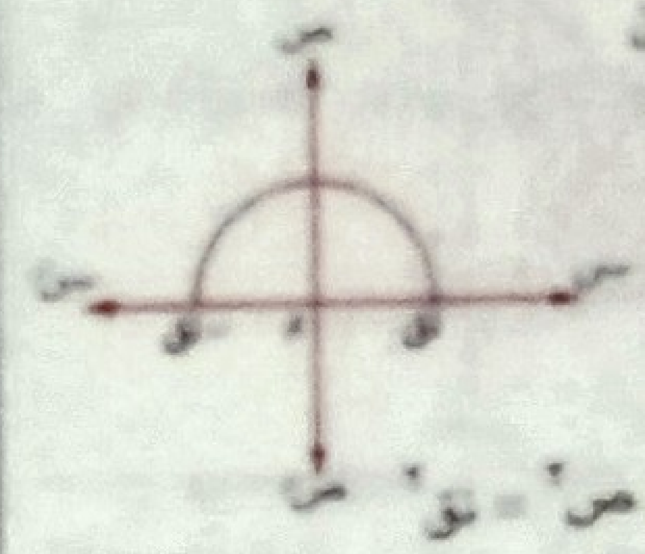
$= 2\pi \int_0^{\text{أ}} \left(\text{ب}^2 - \frac{\text{ب}^2\text{س}^2}{\text{أ}^2}\right) \text{ء س}$

$= 2\pi \left[\text{ب}^2 \text{س} - \frac{1}{3} \frac{\text{ب}^2\text{س}^3}{\text{أ}^2}\right]_0^{\text{أ}}$

$= 2\pi \left(\text{أ ب}^2 - \frac{1}{3}\text{أ ب}^2\right) = \frac{4}{3} \text{أ ب}^2 \pi$

٤٥

① الكرة تنشأ عن دوران نصف دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها نق حول محور السينات



$\therefore$ معادلتها $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = \text{نق}^2$

$\therefore \text{ص}^2 = \text{نق}^2 - \text{س}^2$

$\therefore$ حجم الكرة $= \pi \int_{-\text{نق}}^{\text{نق}} \text{ص}^2 \, \text{ء س}$

$= 2\pi \int_0^{\text{نق}} (\text{نق}^2 - \text{س}^2) \, \text{ء س}$

$= 2\pi \left[\text{نق}^2 \text{س} - \frac{1}{3}\text{س}^3\right]_0^{\text{نق}}$

$= 2\pi \left(\text{نق}^3 - \frac{1}{3}\text{نق}^3\right) = \frac{4}{3} \pi \, \text{نق}^3$

② الأسطوانة الدائرية القائمة تنشأ عن دوران مستطيل بعداه نق ، ع حول محور الصادات



الحجم $= \pi \int_0^{\text{ع}} \text{س}^2 \, \text{ء ص}$

$= \pi \int_0^{\text{ع}} \text{نق}^2 \, \text{ء ص} = \pi \left[\text{نق}^2 \text{ص}\right]_0^{\text{ع}}$

$= \pi \, \text{نق}^2 \, \text{ع}$

③ المخروط ينشأ عن دوران مستقيم معادلته $\frac{\text{س}}{\text{نق}} + \frac{\text{ص}}{\text{ع}} = 1$ حول محور الصادات



$\therefore$ الحجم $= \pi \int_0^{\text{ع}} \text{س}^2 \, \text{ء ص}$

$= \pi \int_0^{\text{ع}} \left(\text{نق} - \frac{\text{نق ص}}{\text{ع}}\right)^2 \text{ء ص}$

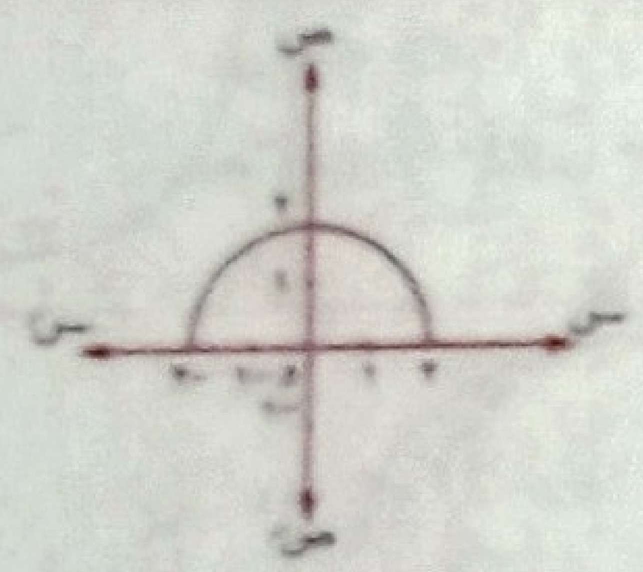
$= \pi \int_0^{\text{ع}} \left(\text{نق}^2 - 2\frac{\text{نق}^2 \text{ص}}{\text{ع}} + \frac{\text{نق}^2\text{ص}^2}{\text{ع}^2}\right) \text{ء ص}$

$= \pi \left[\text{نق}^2 \text{ص} - \frac{\text{نق}^2 \text{ص}^2}{\text{ع}} + \frac{1}{3}\frac{\text{نق}^2\text{ص}^3}{\text{ع}^2}\right]_0^{\text{ع}}$

$= \pi \left(\text{نق}^2 \text{ع} - \text{نق}^2 \text{ع} + \frac{1}{3}\text{نق}^2 \text{ع}\right)$

$= \frac{1}{3} \pi \, \text{نق}^2 \, \text{ع}$

٤٦



$\text{ص} = \sqrt{4 - \text{س}^2}$ منها $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 4$

هي معادلة دائرة طول نصف قطرها ٢ وحدة طول.

$\therefore$ الحجم الناشئ من دوران $\text{ص} = \sqrt{4 - \text{س}^2}$ حول محور السينات دورة كاملة.

$= \pi \int_{-2}^{2} \text{ص}^2 \, \text{ء س} = \pi \int_{-2}^{2} (4 - \text{س}^2) \, \text{ء س}$

$= \pi \left[4\text{س} - \frac{1}{3}\text{س}^3\right]_{-2}^{2}$

$= \frac{32}{3} \pi$ وحدة حجوم.

٤٧

يتقاطع المنحنيان $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{25 - \text{س}^2}$

، $\text{ر}(\text{س}) = 3$ عند $\text{س} = -4$ ، $\text{س} = 4$

، $\because \text{د}(\text{س}) > \text{ر}(\text{س})$ في هذه الفترة

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{-٤}^{٤} [د(س)]^{٢} - [ر(س)]^{٢}\, ءس$

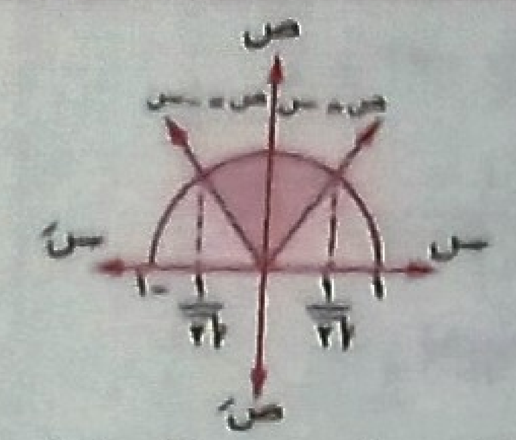
$= ٢\pi \int_{٠}^{٤} (٢٥ - س^{٢} - ٣^{٢})\, ءس$

$= ٢\pi \int_{٠}^{٤} (١٦ - س^{٢})\, ءس$

$= ٢\pi \left[١٦ س - \frac{١}{٣} س^{٣} \right]_{٠}^{٤}$

$= \frac{٢٥٦}{٣} \pi$ وحدة حجوم.

٢٨



$\because$ الشكل متماثل حول محور الصادات

$\therefore$ الحجم $= ٢\pi \int_{٠}^{\frac{١}{\sqrt{٢}}} \left(\sqrt{١ - س^{٢}}\right)^{٢} - (س)^{٢}\, ءس$

$= ٢\pi \int_{٠}^{\frac{١}{\sqrt{٢}}} (١ - س^{٢} - س^{٢})\, ءس$

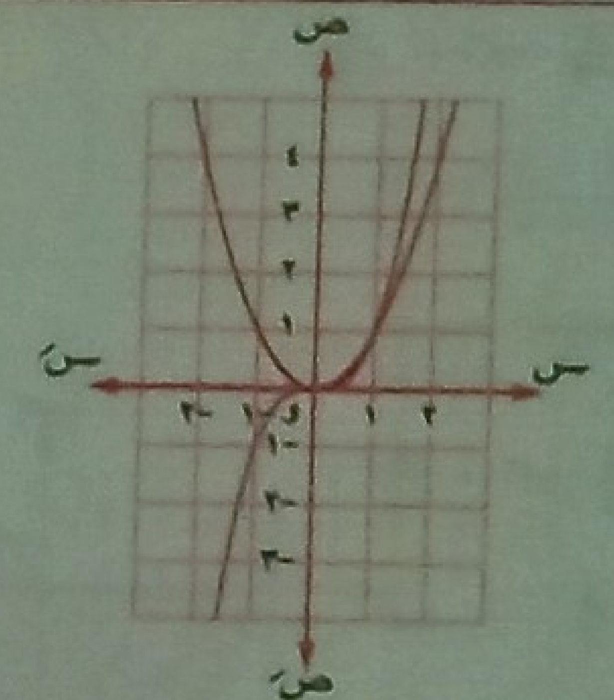
$= ٢\pi \int_{٠}^{\frac{١}{\sqrt{٢}}} (١ - ٢ س^{٢})\, ءس$

$= ٢\pi \left[س - \frac{٢}{٣} س^{٣} \right]_{٠}^{\frac{١}{\sqrt{٢}}}$

$= ٢\pi \left[\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{٣\sqrt{٢}} \right]$

$= \frac{٢\sqrt{٢}}{٣} \pi$ وحدة حجوم.

٢٩



$\because س_{١} = \sqrt{ص}$ ، $س_{٢} = \sqrt[٣]{ص}$

المنحنيان يتقاطعان في ص = ٠ ، ص = ١

، $\because س_{٢} > س_{١}$ في هذه الفترة.

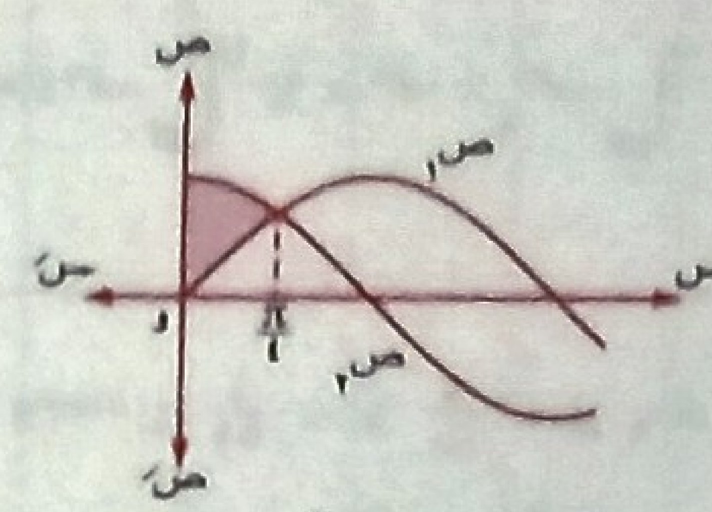
$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{٠}^{١} (س_{٢}^{٢} - س_{١}^{٢})\, ءص$

$= \pi \int_{٠}^{١} (ص^{\frac{٢}{٣}} - ص)\, ءص$

$= \pi \left[\frac{٣}{٥} ص^{\frac{٥}{٣}} - \frac{١}{٢} ص^{٢} \right]_{٠}^{١}$

$= \frac{١}{١٠} \pi$ وحدة حجوم.

٣٠



$ص_{١} = جا س$ ، $ص_{٢} = جتا س$

، $\because$ جتا س > جا س في الفترة $\left[٠ ، \frac{\pi}{٤} \right]$

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} (جتا س)^{٢} - (جا س)^{٢}\, ءس$

$= \pi \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} جتا ٢ س\, ءس$

$= \pi \left[\frac{١}{٢} جا ٢ س \right]_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$

$= \frac{١}{٢} \pi$ وحدة حجوم.

٣١

① (ب) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (د) ⑤ (أ)

⑥ (جـ) ⑦ (جـ) ⑧ (ب) ⑨ (أ) ⑩ (جـ)

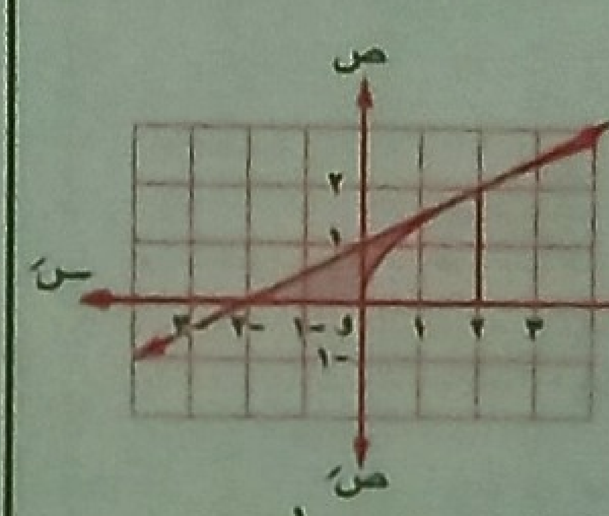
⑪ (د) ⑫ (أ) ⑬ (أ)

٣٢

$ص_{١} = \sqrt{٢ س}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٢}{٢\sqrt{٢ س}}$

$= \frac{١}{\sqrt{٢ س}}$



$\therefore$ ميل المماس عند النقطة (٢ ، ٢) $= \frac{١}{٢}$

$\therefore$ معادلة المماس عند هذه النقطة : $\frac{ص - ٢}{س - ٢} = \frac{١}{٢}$

$\therefore س - ٢ ص + ٢ = ٠$ $\quad \therefore ص_{٢} = \frac{١}{٢} س + ١$

، $\because$ المماس يقطع محور السينات عند س = -٢

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{-٢}^{٢} ص_{٢}^{٢}\, ءس - \pi \int_{٠}^{٢} ص_{١}^{٢}\, ءس$

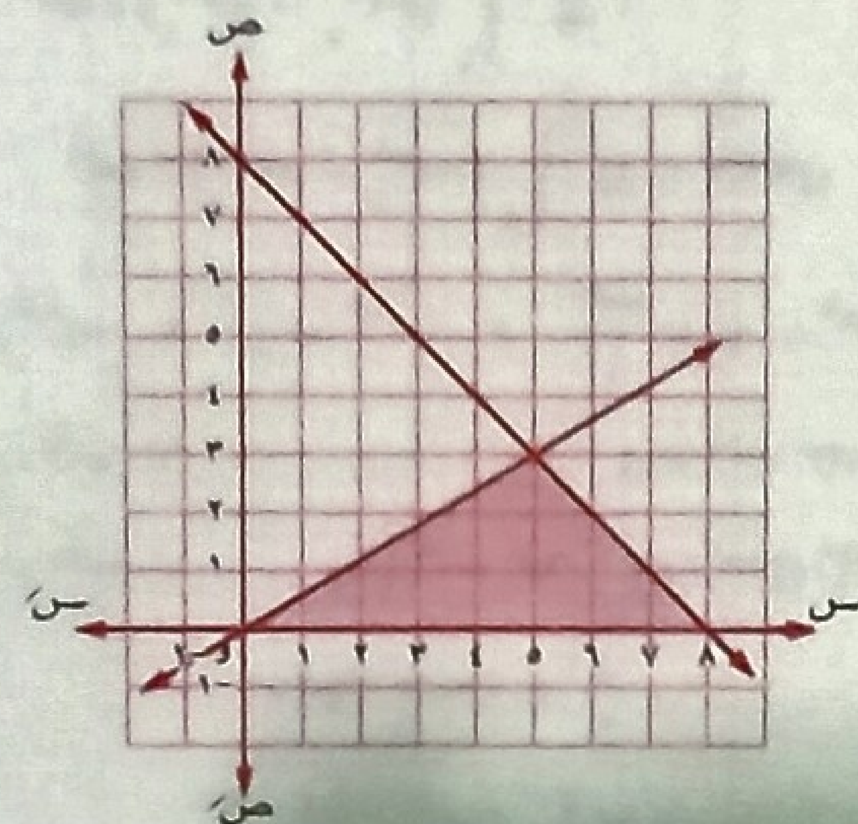
$= \pi \int_{-٢}^{٢} \left(\frac{١}{٢} س + ١ \right)^{٢} ءس$

$- \pi \int_{٠}^{٢} ٢ س\, ءس$

$= \pi \left[\frac{\left(\frac{١}{٢} س + ١ \right)^{٣}}{٣ \times \frac{١}{٢}} \right]_{-٢}^{٢} - \pi \left[س^{٢} \right]_{٠}^{٢}$

$= \frac{١٦}{٣} \pi - ٤ \pi = \frac{٤}{٣} \pi$ وحدة مكعبة.

٣٣



$س + ص = ٨$ $\quad \therefore ص_{١} = ٨ - س$

، $٣ س - ٥ ص = ٠$ $\quad \therefore ص_{٢} = \frac{٣}{٥} س$

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{٠}^{٥} (ص_{٢})^{٢} ءس + \pi \int_{٥}^{٨} (ص_{١})^{٢} ءس$

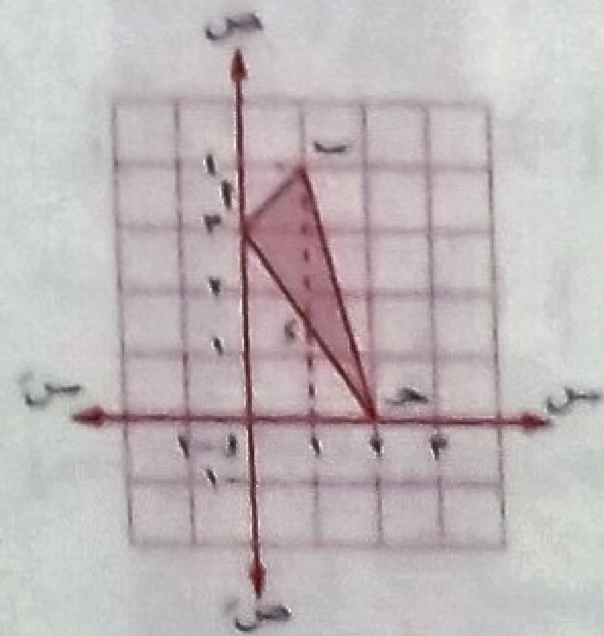
$= \pi \int_{٠}^{٥} \left(\frac{٣}{٥} س \right)^{٢} ءس$

$+ \pi \int_{٥}^{٨} (٨ - س)^{٢} ءس = \pi \left[\frac{٣}{٢٥} س^{٣} \right]_{٠}^{٥}$

$+ \pi \left[\frac{-١}{٣} (٨ - س)^{٣} \right]_{٥}^{٨} = (١٥ \pi) + (٩ \pi)$

$= ٢٤ \pi$ وحدة حجوم.

٣٤



معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$:

$\frac{ص - ٣}{س - ٠} = \frac{٤ - ٣}{١ - ٠} = \frac{١}{١}$

$\therefore ص - ٣ = س$

$\therefore ص = س + ٣$

، معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{بحـ}$:

$\frac{ص - ٠}{س - ٢} = \frac{٤ - ٠}{١ - ٢} = -٤$

$\therefore ص = -٤ س + ٨$

، معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أحـ}$:

$\frac{ص - ٣}{س - ٠} = \frac{٠ - ٣}{٢ - ٠} = \frac{-٣}{٢}$ $\quad \therefore ص = \frac{-٣}{٢} س + ٣$

$\therefore$ مساحة سطح المثلث أ ب حـ

= مساحة Δ أ ب ء + مساحة المثلث ء ب حـ

$= \int_{٠}^{١} (س + ٣) - \left(\frac{-٣}{٢} س + ٣ \right) ءس$

$+ \int_{١}^{٢} (-٤ س + ٨) - \left(\frac{-٣}{٢} س + ٣ \right) ءس$

$= \int_{٠}^{١} \frac{٥}{٢} س\, ءس + \int_{١}^{٢} \left(\frac{-٥}{٢} س + ٥ \right) ءس$

$= \left[\frac{٥}{٤} س^{٢} \right]_{٠}^{١} + \left[\frac{-٥}{٤} س^{٢} + ٥ س \right]_{١}^{٢}$

$= \frac{٥}{٤} + \frac{٥}{٤} = \frac{٥}{٢}$ وحدة مساحة.

إذا كان $ص = \frac{-٣}{٢} س + ٣$

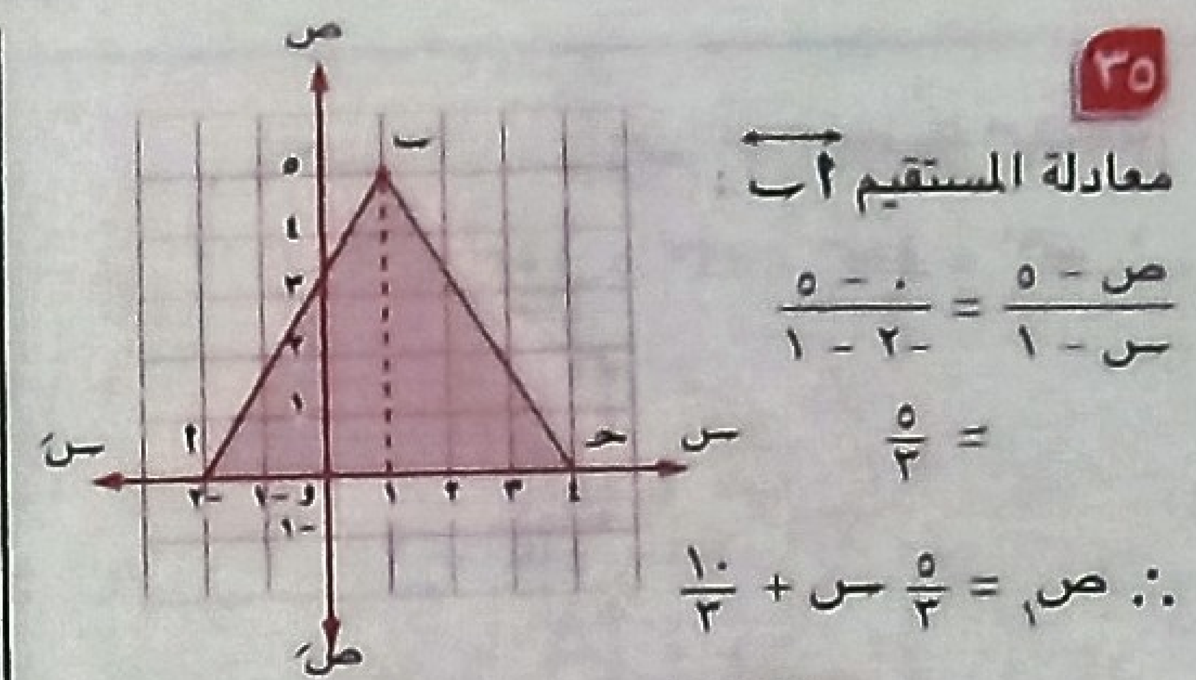
$\therefore س = \frac{-٢}{٣} ص + ٢$

$\therefore$ الحجم الناشئ من دوران Δ أ ء حـ حول محور الصادات

$= \pi \int_{٠}^{٣} س^{٢}\, ءص = \pi \int_{٠}^{٣} \left(\frac{-٢}{٣} ص + ٢ \right)^{٢} ءص$

$= \pi \left[\frac{-١}{٢} \left(\frac{-٢}{٣} ص + ٢ \right)^{٣} \right]_{٠}^{٣} = ٤ \pi$ وحدة حجوم.

٣٥



معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$:

$$\frac{ص - ٥}{س - ١} = \frac{٠ - ٥}{-٢ - ١}$$

$$= \frac{٥}{٣}$$

∴ $ص_١ = \frac{٥}{٣} س + \frac{١٠}{٣}$

، معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ب حـ}$:

$$\frac{ص - ٥}{س - ١} = \frac{٠ - ٥}{٤ - ١} = \frac{-٥}{٣}$$

∴ $ص_٢ = \frac{-٥}{٣} س + \frac{٢٠}{٣}$

∴ الحجم $= \pi \int_{-٢}^{١} (ص_١)^٢ \, ءس + \pi \int_{١}^{٤} (ص_٢)^٢ \, ءس$

$$= \pi \int_{-٢}^{١} \left(\frac{٥}{٣} س + \frac{١٠}{٣}\right)^٢ ءس$$

$$+ \pi \int_{١}^{٤} \left(\frac{-٥}{٣} س + \frac{٢٠}{٣}\right)^٢ ءس$$

$$= \pi \left[\frac{١}{٥}\left(\frac{٥}{٣} س + \frac{١٠}{٣}\right)^٣\right]_{-٢}^{١}$$

$$+ \pi \left[-\frac{١}{٥}\left(\frac{-٥}{٣} س + \frac{٢٠}{٣}\right)^٣\right]_{١}^{٤}$$

$= ٢٥ \pi + ٢٥ \pi = ٥٠ \pi$ وحدة حجوم.

٣٦

(١) معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$:

$$\frac{ص - ٢}{س - ٠} = \frac{٤ - ٢}{٦ - ٠} = \frac{١}{٣}$$

∴ $ص = \frac{١}{٣} س + ٢$

(٢) المنحنى د يقطع المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ عندما

$\frac{٩}{س} = \frac{١}{٣} س + ٢$ ∴ $٢٧ = س^٢ + ٦ س$

∴ $س^٢ + ٦ س - ٢٧ = ٠$

∴ $س = -٩$ (مرفوض) أ، $س = ٣$

∴ $ص = ٣$ ∴ حـ = (٣ ، ٣)

(٣) ميل المماس للمنحنى عند أى نقطة : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-٩}{س^٢}$

∴ ميل المماس عند حـ = −١

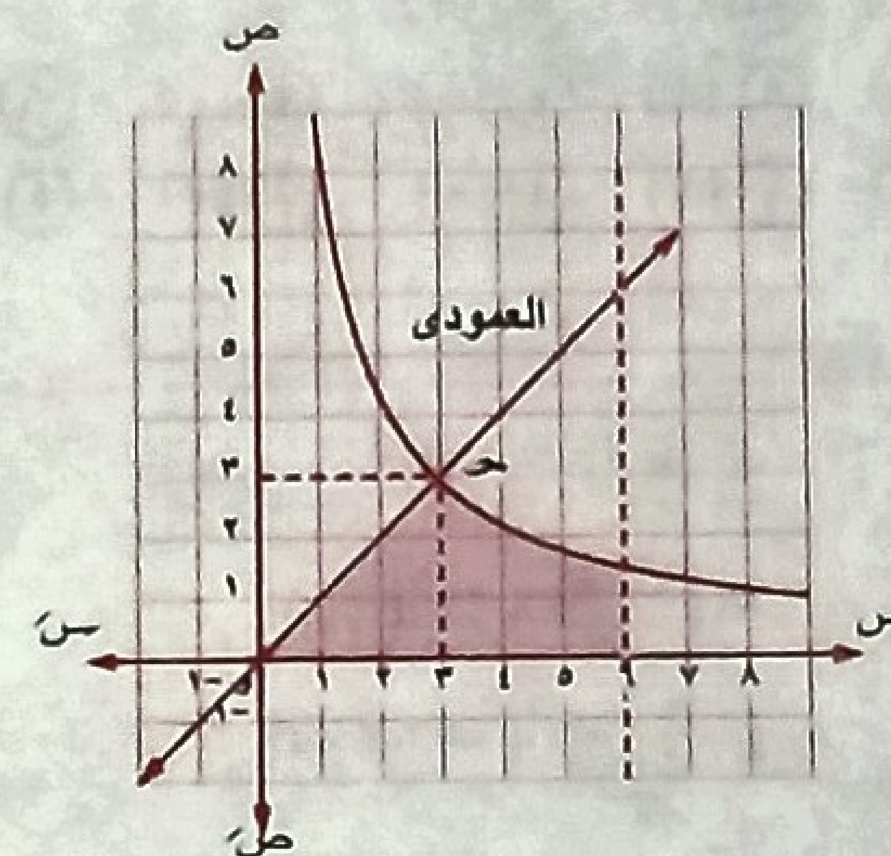
∴ ميل العمودى $= \frac{-١}{-١} = ١$

∴ معادلة العمودى : $\frac{ص - ٣}{س - ٣} = ١$

∴ $س - ص = ٠$

∴ يمر بنقطة الأصل

(٤)



الحجم $= \pi \int_{٠}^{٣} س^٢ \, ءس + \pi \int_{٣}^{٦} \left(\frac{٩}{س}\right)^٢ ءس$

$$= \pi \left[\frac{١}{٣} س^٣\right]_{٠}^{٣} + \pi \left[-٨١ س^{-١}\right]_{٣}^{٦}$$

$= ٩ \pi + \frac{٢٧}{٢} \pi = \frac{٤٥}{٢} \pi$ وحدة حجوم.

٣٧

الحجم $= \pi \int_{١}^{ك} ص^٢ \, ءس = \pi \int_{١}^{ك} س \, ءس$

$$= \pi \left[\frac{١}{٢} س^٢\right]_{١}^{ك} = \frac{\pi}{٢} (ك^٢ - ١)$$

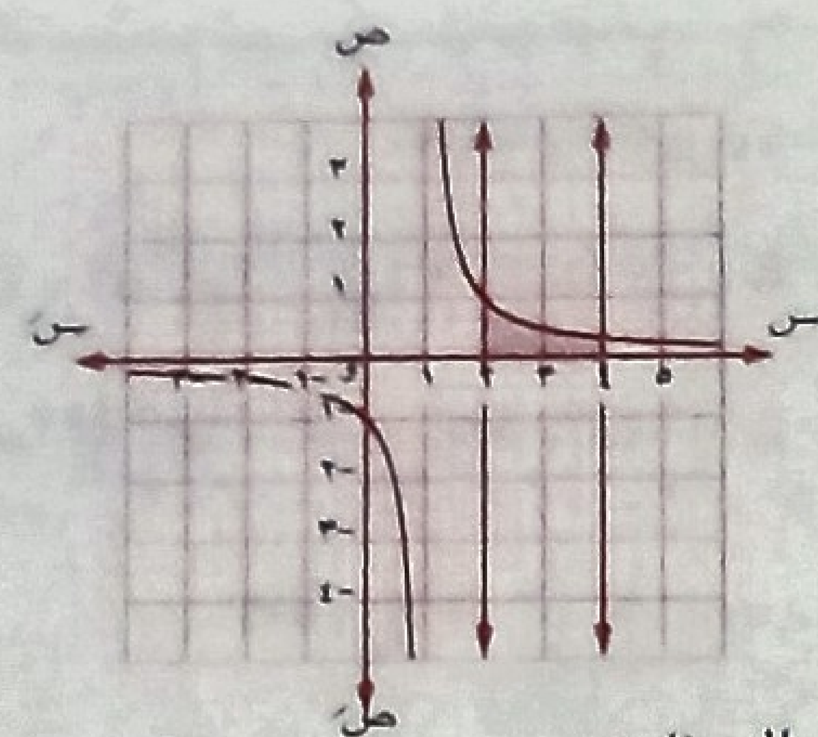
∴ $\frac{\pi}{٢} (ك^٢ - ١) = ١٢ \pi$

∴ $ك^٢ - ١ = ٢٤$ ∴ $ك^٢ = ٢٥$

∴ $ك = \pm ٥$ ∵ $ك > ١$

∴ $ك = ٥$

٣٨



(١) حول السينات :

∴ الحجم $= \pi \int_{٢}^{٤} \left(\frac{١}{س - ١}\right)^٢ ءس$

$$= \pi \int_{٢}^{٤} (س - ١)^{-٢} \, ءس$$

$$= \pi \left[-(س - ١)^{-١}\right]_{٢}^{٤}$$

$= \frac{٢}{٣} \pi$ وحدة مكعبة.

(٢) حول الصادات : عند $س = ٢$ ∴ $ص = ١$

، عند $س = ٤$ ∴ $ص = \frac{١}{٣}$

$س_١ = ١ + \frac{١}{ص}$ ، $س_٢ = ٢$ ، $س_٣ = ٤$

∴ الحجم $= \pi \int_{٠}^{\frac{١}{٣}} (س_٣^٢ - س_٢^٢) \, ءص$

$$+ \pi \int_{\frac{١}{٣}}^{١} (س_١^٢ - س_٢^٢) \, ءص$$

$$= \pi \int_{٠}^{\frac{١}{٣}} (١٦ - ٤) \, ءص$$

$$+ \pi \int_{\frac{١}{٣}}^{١} \left(\left(١ + \frac{١}{ص}\right)^٢ - ٤\right) ءص$$

$$= \pi \int_{٠}^{\frac{١}{٣}} ١٢ \, ءص$$

$$+ \pi \int_{\frac{١}{٣}}^{١} \left(\frac{٢}{ص} + \frac{١}{ص^٢} - ٣\right) ءص$$

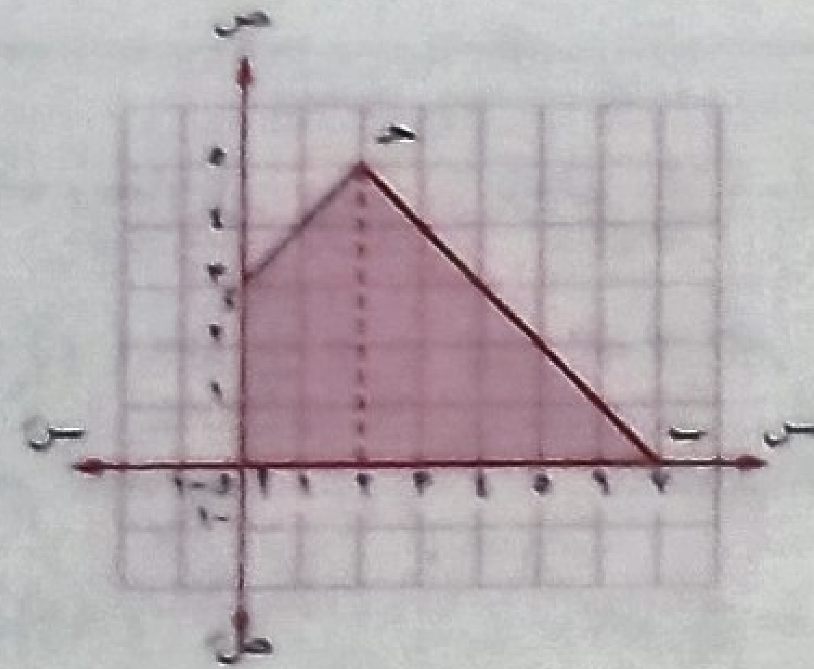
$$= \pi \left[١٢ ص\right]_{٠}^{\frac{١}{٣}}$$

$$+ \pi \left[٢ \, لو_{هـ} |ص| - \frac{١}{ص} - ٣ ص\right]_{\frac{١}{٣}}^{١}$$

$= ٤ \pi + ٢ \pi \, لو_{هـ} ٣$

$= ٢ \pi (٢ + لو_{هـ} ٣)$ وحدة حجوم.

٣٩



معادلة $\overleftrightarrow{حـ ء}$:

$$\frac{ص - ٣}{س - ٠} = \frac{٥ - ٣}{٢ - ٠}$$

∴ $\frac{ص - ٣}{س} = ١$ ∴ $ص = س + ٣$

∴ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ب حـ}$: $\frac{ص - ٠}{س - ٧} = \frac{٥ - ٠}{٢ - ٧} = -١$

∴ $ص = -س + ٧$

∴ الحجم $= \pi \int_{٠}^{٢} (س + ٣)^٢ \, ءس$

$$+ \pi \int_{٢}^{٧} (-س + ٧)^٢ \, ءس$$

$$= \pi \left[\frac{١}{٣} (س + ٣)^٣\right]_{٠}^{٢}$$

$$+ \pi \left[\frac{-١}{٣} (-س + ٧)^٣\right]_{٢}^{٧}$$

$= \frac{٩٨}{٣} \pi + \frac{١٢٥}{٣} \pi = \frac{٢٢٣}{٣} \pi$ وحدة حجوم.

* معادلة $\overleftrightarrow{ب ء}$ هى $\frac{س}{٧} + \frac{ص}{٣} = ١$

∴ $ص = \frac{-٣}{٧} س + ٣$

∴ الحجم الناشئ من دوران Δ ب حـ ء

حول محور السينات

$= \frac{٢٢٣}{٣} \pi$ − الحجم الناشئ من دوران Δ ب ء أ

$$= \frac{٢٢٣}{٣} \pi - \pi \int_{٠}^{٧} \left(\frac{-٣}{٧} س + ٣\right)^٢ ءس$$

$$= \frac{٢٢٣}{٣} \pi - \pi \left[\frac{-٧}{٩} \left(\frac{-٣}{٧} س + ٣\right)^٣\right]_{٠}^{٧}$$

$= \frac{٢٢٣}{٣} \pi - ٢١ \pi = \frac{١٦٠}{٣} \pi$ وحدة حجوم.